ОПД.Ф.02.04 ДЕТАЛИ МАШИН
ОСНОВЫ ПРОЕКТИРОВАНИЯ МАШИН

Учебное пособие

Изложены теоретические основы методов проектирования машин, механизмов и других механических систем и конструкций. Рассмотрены методы расчетов на прочность, жесткость и устойчивость, численные методы (МКР и МКЭ), а также методы, применяемые при инженерном проектировании.

Материал изложен на основе нормативных методов, принятых в практике конструирования, и отражает многолетний опыт автора в преподавании курса «Основы проектирования машин» в МГТУ им. Н. Э. Баумана.

Содержание книги в большей или меньшей степени соответствует программе таких учебных курсов, как сопротивление материалов, теория упругости, детали машин, теория механизмов и машин, техническая механика, прикладная механика, строительная механика, САПР и т. п.

Книга является удобной формой освоения теоретических основ российской CAD/CAE системы автоматизированного проектирования машин «АРМ WinMachine», разработанной в Научно-техническом Центре «Автоматизированное проектирование машин» (НТЦ АПМ) и широко используемой в учебном процессе сотен российских и зарубежных ВУЗов, а также на сотнях предприятиях, в том числе и за рубежом.

Для студентов технических университетов, изучающих общеинженерные дисциплины. Может быть полезна студентам выпускающих кафедр по проектированию машин в различных отраслях, аспирантам, преподавателям, а также инженерам-конструкторам предприятий, научно–исследовательских и проектно-конструкторских организаций.

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие 5
Введение 6

ЧАСТЬ I. ОБЩИЕ МЕТОДЫ И СРЕДСТВА РАСЧЕТА И ПРОЕКТИРОВАНИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Раздел 1. **Статистико-вероятностный анализ при проектировании** 11
Глава 1.1. Основные статистические характеристики случайных величин 11
Глава 1.2. Погрешности геометрических размеров деталей 20
Глава 1.3. Надежность механических систем 30

Раздел 2. **Методы расчета напряженно-деформированного состояния простых моделей** 36
Глава 2.1. Основные понятия и определения 36
Глава 2.2. Растяжение (сжатие) стержневых моделей 40
Глава 2.3. Геометрические характеристики поперечных сечений 48
Глава 2.4. Сдвиг и кручение 54
Глава 2.5. Изгиб 68
Глава 2.6. Методы расчета деформированного состояния упругих систем 78
Глава 2.7. Напряженное состояние в точке. Теория предельных напряженных состояний 92
Глава 2.8. Расчет толстостенных цилиндрических тел и тонкостенных осесимметричных оболочек 103
Глава 2.9. Устойчивость механических конструкций 111
Глава 2.10. Расчет прочности при переменном характере внешнего нагружения 119
Глава 2.11. Машиностроительные материалы 137
Глава 2.12. Критерии расчета машин, механизмов и конструкций 148

Раздел 3. **Теория упругости** 152
Глава 3.1. Общий случай расчета напряженно-деформированного состояния в точке. Полная система уравнений теории упругости 152
Глава 3.2. Напряжения и деформации на контакте двух тел 164
Глава 3.3. Приближенные методы решения линейных задач теории упругости. 171
Глава 3.4. Теория механических колебаний 186

ЧАСТЬ II. СОЕДИНЕНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ МАШИН

Раздел 4. **Разъемные соединения** 204
Глава 4.1. Резьбовые соединения 204
Глава 4.2. Соединения деталей при передаче вращения 226
4.2.1. Соединения с натягом 226
4.2.2. Конические соединения 235
4.2.3. Соединения коническими кольцами 237
4.2.4. Шпоночные соединения 240
4.2.5. Штифтовые соединения 247
4.2.6. Шлицевые (зубчатые) соединения 249
4.2.7. Профильные соединения 251
4.2.8. Клеммовые соединения 253

Раздел 5. **Неразъемные соединения** 256
Глава 5.1. Заклепочные соединения 256
Глава 5.2. Сварные соединения 259

ЧАСТЬ III. ПЕРЕДАТОЧНЫЕ МЕХАНИЗМЫ

Раздел 6. **Общие характеристики передаточных механизмов** 276

Раздел 7. **Зубчатые передачи** 282
Глава 7.1. Цилиндрические зубчатые передачи 282
7.1.1. Геометрия цилиндрических зубчатых передач 283
7.1.2. Силовой расчет цилиндрических зубчатых передач 297
7.1.3. Причины разрушения и критерии расчета зубчатых передач 303
7.1.4. Особенности расчета на изгиб косозубых и шевронных колес ... 311
7.1.5. Внешняя нагрузка и ее характеристики. Режимы работы зубчатой передачи 313
7.1.6. Материалы. термообработка и допускаемые напряжения для зубчатых колес 316
Глава 7.2. Передачи коническими зубчатыми колесами 320
Глава 7.3. Червячные передачи 337
Глава 7.4. Планетарные и дифференциальные передачи..... 355

Раздел 8. **Передачи гибкой связью** 364
Глава 8.1. Ременные передачи 364
Глава 8.2. Цепные передачи 380

Раздел 9. **Передаточные механизмы специального вида** 396
Глава 9.1. Винтовые передачи 396

ЧАСТЬ IV. ТИПОВЫЕ ДЕТАЛИ МАШИН И МЕХАНИЗМОВ

Раздел 10 **Детали общего назначения** 401
Глава 10.1. Валы и оси 401
Глава 10.2. Упругие элементы машин 410
Глава 10.3. Подшипники скольжения 424
Глава 10.4. Подшипники качения 439

Литература 468

Проектирование механического оборудования и конструкций — процесс, который требует от разработчика фундаментальных знаний и опыта практической работы. В основе методов расчета и проектирования лежат законы механики, математики и прикладных инженерных дисциплин. Использование этих знаний и опыта в сочетании с применением современных компьютерных программ позволяет проектировщикам создавать механическое оборудование на уровне лучших мировых аналогов.

Настоящее издание представляет собой теоретический курс, посвященный вопросам расчета и проектирования современных машин и конструкций. Изложенные здесь методы и средства расчета рассмотрены на примере деталей общего назначения. При написании книги использованы материалы курса лекций, который автор на протяжении многих лет читает в Московском государственном техническом университете им. Н. Э. Баумана.

Рассмотренные в книге методы расчета и проектирования были использованы при разработке CAD/CAE системы АРМ WinMachine, созданной под руководством автора в НТЦ «Автоматизированное проектирование машин». Система АРМ WinMachine внедрена на многих предприятиях машиностроительного, нефтехимического, строительного и других профилей. Она также с успехом применяется в российских и зарубежных технических университетах и колледжах при подготовке студентов по общетехническим и специальным дисциплинам. В этой связи данный учебник по проектированию можно рассматривать как теоретическое пособие для многочисленных пользователей системы АРМ WinMachine.

Теоретическое изучение основ проектирования полезно дополнять решением задач. Существенную помощь при этом может оказать продолжение предлагаемого читателю теоретического курса — учебное пособие Шелофаста В. В. и Чугуновой Т. Б. «Основы проектирования машин. Примеры решения задач», в котором на конкретных примерах рассматриваются аналитические и численные методы решения различных задач, возникающих при проектировании.

Автор выражает огромную благодарность доценту кафедры математической физики и вычислительной математики МГТУ им. Н. Э. Баумана Стайновой Елене Геннадьевне за помощь в систематизации материала книги и литературную обработку текста, а также за многочисленные обсуждения, проходившие на всем протяжении работы над книгой. Кроме того, Стайновой Е. Г. написана глава 3.4 и изложен метод конечных разностей в главе 3.3.

Ценные замечания при изложении метода конечных элементов в главе 3.3 сделаны Шелофастом Вадимом Владимировичем. Им также выполнен численный расчет матрицы жесткости.

Автор благодарит Карнопелеву Елену Васильевну за подготовку рисунков и работу по созданию оригинал-макета книги.

Наконец, автор благодарен всем читателям, приславшим предложения по улучшению содержания книги после выхода первого издания.

Механической системой называется такая совокупность твердых тел, в которой положение (движение) каждого элемента определяется положением (движением) остальных.

Совокупность механических систем образует бесчисленное множество конструкций, машин, механизмов и различных вспомогательных устройств.

Механическая система геометрически неизменных элементов называется конструкцией. Перемещение отдельных точек конструкции возможно лишь в результате деформации системы.

Машина — устройство, выполняющее преобразование движения, энергии, материалов и информации. В зависимости от функций, которые они выполняют, машины подразделяются на энергетические, транспортные, технологические, информационные и специальные.

Часть машины, преобразующая движение одного или нескольких тел в требуемое движение других тел, называется механизмом. Твердое тело, входящее в состав механизма, носит название звена. Механизм состоит из следующих частей: *входного звена*, которому сообщается преобразуемое в дальнейшем механизмом движение, *промежуточных звеньев* и *выходного звена*, которое и совершает требуемое от механизма движение.

Звенья бывают *неподвижные* (которые не перемещаются в процессе работы механизма) и *подвижные* (перемещающиеся). Подвижное соединение звеньев называется *кинематической парой*. Звенья кинематической пары допускают относительное движение, которое можно характеризовать *числом степеней свободы*, равным числу возможных независимых перемещений данной механической системы.

Кинематической цепью называется система звеньев, образующих кинематические пары. Кинематические цепи подразделяются на *плоские* и *пространственные*. В плоской цепи все звенья совершают движение, параллельное одной и той же неподвижной плоскости.

Элемент механической системы, изготовленный из материала одной марки без применения сборочных операций, называется *деталью*. Деталь представляет собой общее понятие, которое в каждом конкретном случае можно уточнить соответствующем названием.

Узел *(сборочная единица)* — комплекс деталей, собранных посредством сборочных операций отдельно от других составных частей и совместно выполняющих определенные функции. Совокупность простейших узлов образует более сложное механическое устройство, такое как сложный узел, механизм, машина и т. д.

Машина, как правило, состоит из сотен, тысяч и даже миллионов отдельных деталей, и выход из строя хотя бы одной из них может привести к прекращению работы машины в целом. Это обстоятельство требует от разработчика глубоких знаний и практического опыта при принятии конструкторских решений. Кроме

того, сегодня невозможно создать надежную конкурентоспособную конструкцию машины без использования компьютерных методов анализа, которые позволяют определить ее основные геометрические размеры и сделать выбор материалов.

ОСНОВНЫЕ ТРЕБОВАНИЯ, ПРЕДЪЯВЛЯЕМЫЕ К МАШИНАМ И МЕХАНИЗМАМ

Как отдельные детали и узлы любой машины, так и машина в целом должны удовлетворять следующим требованиям:

- работоспособности;
- надежности;
- технологичности;
- экономичности;
- эргономичности.

Работоспособными называются детали, выходные параметры которых удовлетворяют условиям, оговоренным при их конструировании.

Надежность — способность детали сохранять выходные параметры в установленных пределах в течение заданного промежутка времени.

Технологичными называются детали, затраты средств, времени и труда на изготовление которых минимальны.

Экономичность деталей определяется затратами на ее проектирование, изготовление и последующую эксплуатацию. Для обеспечения экономичности прежде всего следует добиваться снижения материалоемкости, энергоемкости и трудоемкости производства.

Наконец, детали должны быть эргономичными, т. е. иметь современные эстетичные формы и отделку, а также обеспечивать удобство в обращении при их эксплуатации и техническом обслуживании.

Оптимальное удовлетворение совокупности описанных выше требований, которые к тому же зачастую противоречат друг другу, и определяет как квалификацию конструктора, так и уровень проектирования в целом.

МОДЕЛИРОВАНИЕ

Для практического выполнения указанных требований необходимо перейти от конкретной детали к ее *модели*. При этом точность определения характеристик детали существенно зависит от ее адекватности модели. Дадим краткое описание моделей, принимаемых при выполнении расчетов.

Модель материала. При выполнении статических расчетов материал (если противное не оговорено особо) представляется как однородная сплошная среда, обладающая изотропными свойствами. Изотропия свойств предполагает постоянство характеристик материала по любому направлению внутри него. Эта модель хорошо описывают металлические материалы, работающие в упругой зоне, однако для композиционных материалов оказывается неприемлемой.

Важными физическими свойствами материалов с точки зрения машиностроения являются упругость, пластичность и ползучесть.

Упругость — свойство материала восстанавливать форму и размеры после снятия нагрузки.

Пластичность — свойство материала частично сохранять деформацию после снятия нагрузки.

Ползучесть — свойство материала увеличивать деформацию со временем при постоянной нагрузке.

Модель формы. В ряде случаев форма детали оказывается сложной, и ее упрощение (без существенной потери степени адекватности реальной детали) может значительно облегчить выполнение необходимых расчетов.

Наиболее часто в качестве моделей формы используют брусья, стержни, балки, пластины, оболочки и т. д. Справедливости ради заметим, что такое упрощение оказывается не всегда оправданным, но в ряде случаев приводит к удовлетворительным результатам.

Брус — твердое тело, один из размеров которого значительно больше двух других. Геометрически брус получается параллельным перемещением плоской геометрической фигуры вдоль одной из осей.

Стержнем называется брус, который нагружается силами растяжения либо сжатия. Совокупность стержней, соединенных шарнирами, образует ферменную конструкцию. Если же брус в процессе нагружения преимущественно изгибается, то он называется балкой. Совокупность балок, жестко соединенных между собой, носит название рамы.

Оболочка — тело, образованное двумя геометрически подобными и близко расположенными поверхностями. Если этими поверхностями являются параллельные плоскости, то мы имеем дело с пластиной.

С математической точки зрения твердое тело при моделировании наиболее строго можно описать как совокупность геометрически подобных элементов, связанных между собой таким образом, что они образуют структуру, близкую по форме к моделируемому объекту. Такой прием составляет основу ***метода конечных элементов (МКЭ)***. В этом случае форма детали моделируется достаточно точно. В качестве конечных элементов при решении плоских конечно-элементных задач обычно используются стержни, треугольники, квадраты и т. д., а в случае моделирования объемов — кубы, тетраэдры, призматические элементы и т. п.

В подавляющем большинстве случаев при формировании модели учет макро- и микрогеометрии поверхностного слоя не производится. Иногда это может привести к существенным ошибкам, что заставляет разработчиков, особенно при построении объемных моделей, учитывать наличие неоднородного поверхностного слоя. При этом следует отметить, что микрогеометрия определяется чистотой обработки поверхности, а макрогеометрия описывается допуском на погрешность формы поверхности.

Модели нагружения. Внешнее воздействие на отдельную деталь либо конструкцию в целом условно можно представить как действие таких силовых факторов, как:

- сосредоточенная сила;
- сосредоточенный момент;

- сила, распределенная по длине;
- сила, распределенная по площади;
- момент, распределенный по длине;
- момент, распределенный по площади;
- объемная нагрузка;
- массовая нагрузка.

Под *нагружением моментом* понимается действие на объект пары параллельных сил. *Массовыми* называются силы, действующие на частицы материала, например, инерционные, силы тяжести и т. д.

Если нагрузка остается постоянной во времени, то она называется *статической*, в противном случае — *переменной*. Переменное нагружение может быть *регулярным* и *нерегулярным* (*случайным*). Регулярно изменяющаяся нагрузка характеризуется периодическим законом изменения, а нерегулярное нагружение описывается случайной функцией.

Модель закрепления. Под закреплением понимается ограничение числа степеней свободы точки закрепления.

Принятые модели можно использовать для комплексного анализа элементов механических систем. В большинстве случаев такой анализ выполняется для геометрически определенных размеров деталей. Задача конструктора при этом сводится к проверке обоснованности принятых параметров, а серия расчетов называется проверочными расчетами. Проверочные расчеты удобно выполнять с помощью современных программных средств. Наибольший эффект получается при использовании параметризованных компьютерных программ, что позволяет без больших затрат изменять параметры модели, добиваясь тем самым определения наилучших конструктивных соотношений.

В отдельных случаях, исходя из условий нагружения, а также кинематических, динамических и других параметров, можно с достаточной степенью точности прогнозировать основные геометрические размеры. Такие расчеты в дальнейшем называются проектировочными. Для проектировочных расчетов необходимо знать аналитические зависимости, связывающие между собой основные параметры, которые можно разрешить относительно любой из анализируемых переменных.

Анализ выполняется по ряду критериев. Если удается ряд расчетных критериев привести к одному объединенному, то он рассматривается как *функция цели*. *Оптимизацией* называется процедура минимизации целевой функции. Наиболее часто в механике машин и конструкций в качестве параметров оптимизации принимаются вес, габаритные размеры, стоимость и т. д. Иногда задачу оптимизации приходится решать с ограничениями, т. е. выполнять ряд дополнительных условий.

Очевидно, что конструкция, полученная посредством оптимизации, является наилучшей, а сам процесс оптимизации является необходимым инструментом создания конкурентоспособных машин.

В заключение перечислим обозначения и размерности основных физических величин, которые используются везде в дальнейшем, если нет других конкретных

указаний. Это сделано для того, чтобы избежать путаницы при выводе аналитических зависимостей и возможных повторов в тексте.

Величина	**Обозначение**	**Размерность**
Линейный размер		мм
Сила	F	Н
Момент вращения	T	Н · м
Момент изгиба	M	Н · м
Напряжение нормальное	σ	Н/мм^2 ≡ МПа
Напряжение касательное	τ	Н/мм^2 ≡ МПа
Частота вращения	n	об/мин
Мощность	P	кВт = 10^3 Н·м/с

Часть I. ОБЩИЕ МЕТОДЫ И СРЕДСТВА РАСЧЕТА И ПРОЕКТИРОВАНИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Раздел 1. СТАТИСТИКО-ВЕРОЯТНОСТНЫЙ АНАЛИЗ ПРИ ПРОЕКТИРОВАНИИ

Глава 1.1. Основные статистические характеристики случайных величин

Детерминированной называется такая величина, значение которой постоянно и не изменяется в течение времени наблюдения за ее поведением. Значение случайной величины невозможно предсказать при единичном наблюдении. Количественные характеристики случайного параметра не могут быть раз и навсегда определены, так как они меняются во времени. Строго говоря, любая физическая величина случайна, а детерминированная трактовка оправдана лишь точностью выполнения расчетов.

Из вышесказанного следует, что большинство параметров, характеризующих работу любой механической системы, случайны. Тогда, используя аппарат теории вероятностей, а в более сложных случаях и аппарат теории случайных функций, можно предсказать и количественно описать случайные закономерности, возникающие в процессе работы машин и механизмов.

Основные числовые характеристики случайных величин. Числовые характеристики случайной величины определяются из анализа единичных реализаций, происходящих в период наблюдения за этой величиной. Наука, которая занимается методами обработки опытных данных, полученных в результате такого наблюдения, называется *математической статистикой*. Поэтому методы обработки случайных величин называются *статистическими*.

Математическая статистика подробно анализирует поведение случайных величин. В данной главе приведены основные понятия теории вероятностей и математической статистики, которые необходимы для понимания физической сути проблем, связанных с проектированием машин, механизмов и конструкций.

В простейшем случае случайное событие имеет два возможных исхода — *да* или *нет*. Если при большом числе испытаний количество благоприятных исходов равно числу неблагоприятных, то говорят, что случайные события *взаимно независимы*. Под вероятностью благоприятного исхода понимают отношение фактического числа таких исходов к полному числу испытаний. Очевидно, что вероятность появления одного из двух независимых случайных событий равна 1/2. Наблюдения за случайными событиями показали, что реализация двух последовательных благоприятных исходов происходит с вероятностью 1/4. Это означает, что вероятность сложного события, составленного из любого числа простых взаимно независимых, равна произведению вероятностей этих простых событий.

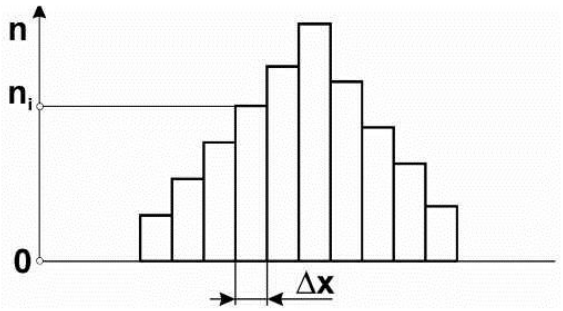


Рис. 1.1.1

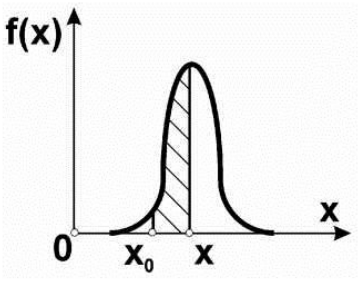


Рис. 1.1.2

В теории вероятностей такой вывод формулируется как *теорема умножения вероятностей.*

Соотношение, устанавливающее тем или иным способом связь между возможными значениями случайной величины и их вероятностями, называется *законом распределения* случайной величины. Закон распределения дискретной случайной величины обычно задается с помощью гистограммы. Каждому значению случайной величины X_i отвечает определенная вероятность P_i. В качестве примера на рис. 1.1.1 приведена гистограмма рассеяния (разброса) погрешности X одного из линейных размеров деталей в партии, полученной в результате механической обработки. По горизонтальной оси откладываются различные возможные значения данной случайной величины, а именно погрешности линейного размера, а по вертикали — количество деталей, имеющих такую погрешность. Если в интервал Δx попало n_i значений случайной величины из общего количества N, то вероятность P_i появления такого значения равна

$$P_i = \frac{n_i}{N}. \qquad (1.1.1)$$

Рассчитав вероятности каждого из текущих событий, можно получить совокупность вероятностей и также изобразить ее в виде гистограммы, составленной из отрезков прямых. При $\Delta x \to 0$ кусочно-линейная функция может быть заменена непрерывной функцией $f(x)$, называемой функцией плотности вероятности. График функции $f(x)$ называется кривой распределения (рис. 1.1.2). Геометрически вероятность $P\left(x_0 < X < x\right)$ попадания случайной величины X в диапазон $\left(x_0, x\right)$ равна площади заштрихованной криволинейной трапеции:

$$P(x_0 < X < x) = \int_{x_0}^{x} f(x)dx. \qquad (1.1.2)$$

Назовем математическим ожиданием (средним значением) $M(X)$ случайной величины следующее отношение:

$$M(X) = \frac{P_1 x_1 + P_2 x_2 + \ldots + P_k x_k}{P_1 + P_2 + \ldots + P_k} = \frac{\sum_{i=1}^{k} P_i x_i}{\sum_{i=1}^{k} P_i}, \qquad (1.1.3)$$

где k — число участков разбиения интервала изменения случайной величины. Очевидно, что $\sum_{i=1}^{k} P_i = 1$, следовательно, из (1.1.3) и (1.1.2) получаем

$$M(X) = \sum_{i=1}^{k} P_i x_i = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx . \qquad (1.1.4)$$

Важной характеристикой статистического распределения является дисперсия $D(X)$ — мера отклонения случайной величины от ее математического ожидания, равная

$$D(X) = \sum_{i=1}^{k} [x_i - M(X)]^2 P_i . \qquad (1.1.5)$$

В интегральной форме выражение (1.1.5) имеет вид

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} [x - M(X)]^2 f(x) dx . \qquad (1.1.6)$$

При практическом применении удобно вместо дисперсии использовать квадратный корень из этой величины, который получил название среднего квадратичного отклонения $\hat{\sigma}(x)$:

$$\hat{\sigma}(X) = \sqrt{D(X)} = \hat{\sigma} . \qquad (1.1.7)$$

Для оценки рассеяния используется также коэффициент вариации γ,

$$\gamma = \frac{\hat{\sigma}}{M(X)} . \qquad (1.1.8)$$

Изменение площади под кривой распределения описывается функцией распределения $F(x)$. Функция распределения случайной величины X задаст вероятность того, что эта величина примет значение, меньшее некоторого заданного x:

$$F(x) \equiv P(X < x) = \int_{-\infty}^{x} f(x) dx . \qquad (1.1.9)$$

Из определения (1.1.9) ясно, что $F(x)$ является неубывающей функцией, т. е. $F(x_2) \geq F(x_1)$ при $x_2 > x_1$; в пределах изменения случайной величины X она изменяется от 0 до 1: $F(-\infty) = 0$, $F(\infty) = 1$.

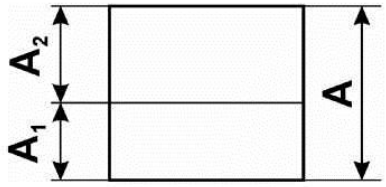


Рис. 1.1.3

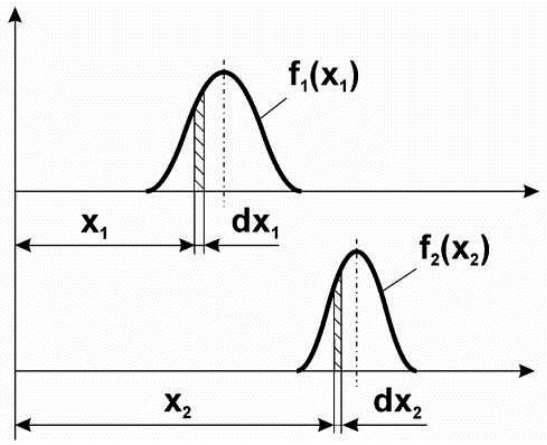


Рис. 1.1.4

Случайная величина может представлять собой совокупность более простых величин. В качестве примера рассмотрим контакт двух плоских деталей (рис.1.1.3). Случайным здесь является размер A, полученный в результате сложения взаимно независимых случайных размеров A_1 и A_2. Рассеяние линейных размеров A_1 и A_2 вызвано ошибками изготовления и может быть описано функциями плотности вероятности $f_1(x_1)$ и $f_2(x_2)$ соответственно (рис. 1.1.4). Полученный после контакта размер A также оказывается рассеянным и характеризуется функцией плотности $f(x)$, аргумент которой равен $x_1 + x_2$. Результат сложения можно определить прямым подсчетом. Для этого под кривой плотности $f_1(x_1)$ выделяем элементарный участок dx_1. Число деталей из первой партии, имеющих размер x_1, равно $N f_1(x_1)dx_1$. Аналогично для деталей из второй партии — $N f_2(x_2)dx_2$ из них имеют размер x_2. Вероятность того, что одновременно найдутся детали с размерами x_1 и x_2, по теореме об умножении вероятностей равна произведению

$$f(x) = f_1(x_1) f_2(x_2) . \qquad (1.1.10)$$

Определим математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$ функции $f(x)$. На основании (1.1.4) с учетом (1.1.10) получаем

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x_1 + x_2) f_1(x_1) f_2(x_2) dx_1 dx_2 =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 f_1(x_1) f_2(x_2) dx_1 dx_2 + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_2 f_1(x_1) f_2(x_2) dx_1 dx_2 = \qquad (1.1.11)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x_1 f_1(x_1) dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} f_2(x_2) dx_2 + \int_{-\infty}^{\infty} x_2 f_2(x_2) dx_2 \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x_1) dx_1 .$$

Так как по определению

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x_1)dx_1 = 1, \quad \int_{-\infty}^{\infty} f_2(x_2)dx_2 = 1,$$

$$\int_{\infty}^{\infty} x_1 f_1(x_1)dx_1 = M(x_1), \quad \int_{\infty}^{\infty} x_2 f_2(x_2)dx_2 = M(x_2), \tag{1.1.12}$$

то из (1.1.11) следует

$$M(X) = M(X_1) + M(X_2). \tag{1.1.13}$$

Очевидно, что для случая разности двух случайных величин, $X = X_1 - X_2$, математическое ожидание результата по аналогии с (1.1.13) равно

$$M(X) = M(X_1) - M(X_2).$$

В общем случае справедлив следующий вывод: при сложении n независимых случайных величин математическое ожидание результирующего распределения равно алгебраической сумме математических ожиданий составляющих величин:

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} M(X_i). \tag{1.1.14}$$

Полученный результат (1.1.14) не зависит от вида функций плотности вероятности величин.

Определим далее дисперсию распределения (1.1.10). Согласно (1.1.6) имеем:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}[(x_1 + x_2) - (M(X_1) + M(X_2))]^2 f_1(x_1) f_2(x_2)dx_1 dx_2 =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}[x_1 - M(X_1)]^2 f_1(x_1) f_2(x_2)dx_1 dx_2 + \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}[x_2 - M(X_2)]^2 f_1(x_1) f_2(x_2)dx_1 dx_2$$

$$+ 2\int_{-\infty}^{\infty}[x_1 - M(X_1)] f_1(x_1)dx_1 \int_{-\infty}^{\infty}[x_2 - M(X_2)] f_2(x_2)dx_2,$$

откуда с учетом очевидных равенств (1.1.12) следует

$$D = D_1 + D_2; \quad \hat{\sigma}^2 = \hat{\sigma}_1^2 + \hat{\sigma}_2^2.$$

Аналогичный результат получается в случае вычитания двух или нескольких случайных чисел из серии случайных распределений с плотностями $f_1(x_1)$, $f_2(x_2)$, $f_3(x_3)$ и т. д. В общем случае имеем

$$D = \sum_{i=1}^{k} D_i; \quad \hat{\sigma}^2 = \sum_{i=1}^{k} \hat{\sigma}_i^2. \tag{1.1.15}$$

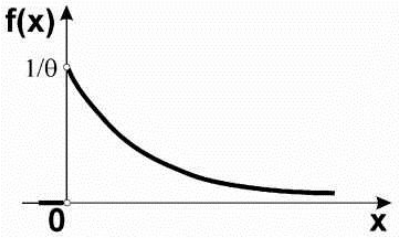


Рис. 1.1.5

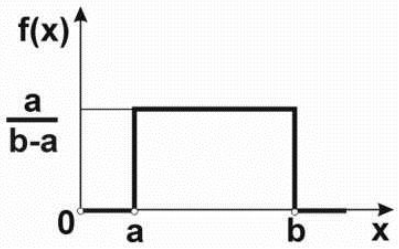


Рис. 1.1.6

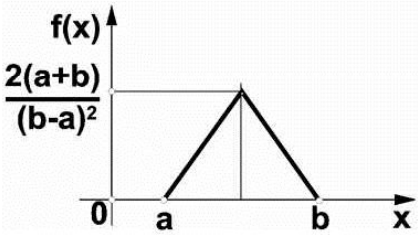


Рис. 1.1.7

Различные виды функций плотности вероятности. Функция плотности вероятности случайной величины в общем случае может иметь совершенно произвольный вид. Однако есть ряд аналитических зависимостей, которые используются в математической статистике в качестве функций плотности наиболее часто.

Остановимся на них более подробно.

Показательное (экспоненциальное) распределение. Случайная величина имеет *показательное* распределение, если ее функция плотности вероятности представима в виде

$$f(x) = \left.\begin{array}{ll} \dfrac{1}{\theta}\exp(-x/\theta), & x \ge 0 \\ 0, & x < 0 \end{array}\right\}, \qquad (1.1.16)$$

где положительная величина θ — параметр распределения (рис. 1.1.5).

Равномерное распределение. Говорят, что случайная величина распределена на участке от a до b *равномерно*, если $f(x)$ на этом участке постоянна (рис. 1.1.6),

$$f(x) = \left.\begin{array}{ll} \dfrac{1}{b-a}, & x \in [a,\ b] \\ 0, & x \notin [a,\ b] \end{array}\right\}. \qquad (1.1.17)$$

Распределение (1.1.17) называют еще *равновероятным.*

Треугольное распределение. Если случайная величина на участке (a,b) представляет собой сумму двух других случайных равномерно распределенных величин, то можно показать, что функция плотности вероятности этой величины подчиняется так называемому *треугольному* распределению (рис. 1.1.7):

$$f(x) = \left.\begin{array}{l} \dfrac{4}{(b-a)^2}(x-a),\ x \in \left[a,\ \dfrac{a+b}{2}\right] \\ \dfrac{4}{(b-a)^2}(b-x),\ x \in \left[\dfrac{a+b}{2},\ b\right] \end{array}\right\}. \qquad (1.1.18)$$

Нормальное распределение. Можно показать, что алгебраическая сумма шести и более равномерно распределенных случайных величин дает случайную вели-

чину, распределенную по **нормальному закону (закону Гаусса).** Нормальный закон распределения играет важнейшую роль в теории вероятностей вообще и в ее инженерных приложениях в частности. Среди других законов распределения он занимает особое место. Нормальным распределением можно описать любое сложное событие, составленное из совокупности простых взаимно независимых случайных явлений. Вот почему например, фактический разброс линейных размеров деталей после механической обработки подчиняется именно закону нормального распределения. Функция плотности вероятности в этом случае имеет вид

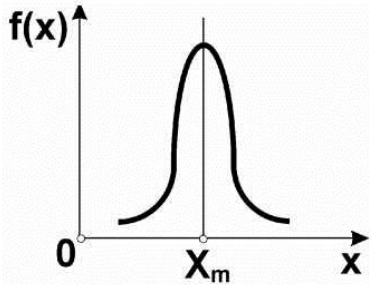


Рис. 1.1.8

$$f(x) = \frac{1}{\hat{\sigma}\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2} \frac{(x - x_m)^2}{\hat{\sigma}^2} \right], \qquad (1.1.19)$$

где x_m и $\hat{\sigma}$ — параметры нормального распределения, т. е. математическое ожидание и среднее квадратичное отклонение соответственно. Кривая нормального распределения имеет симметричный колоколообразный вид (рис. 1.1.8).

Вероятность попадания нормально распределенной случайной величины X в диапазон (a, b) с учетом (1.1.19) и (1.1.2) равна

$$P(a < X < b) = \frac{1}{\hat{\sigma}\sqrt{2\pi}} \int_a^b \exp\left[-\frac{1}{2} \frac{(x - x_m)^2}{\hat{\sigma}^2} \right] dx. \qquad (1.1.20)$$

Сделав замену переменной $t = \dfrac{x - x_m}{\hat{\sigma}}$ и введя обозначения $t_1 = \dfrac{a - x_m}{\hat{\sigma}}$, $t_2 = \dfrac{b - x_m}{\hat{\sigma}}$, перепишем (1.1.20) как

$$P(a < X < b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{t_1}^{t_2} \exp\left[-\frac{t^2}{2} \right] dt. \qquad (1.1.21)$$

Отношение $t = \dfrac{x - x_m}{\hat{\sigma}}$ называется квантилью нормального распределения и обычно обозначается как u_P. Квантиль имеет следующий смысл: она равна значению случайной величины, соответствующему заданной вероятности P.

Интеграл (1.1.21) не выражается через элементарные функции, и его расчет проводится с помощью специальной функции $\Phi(x)$,

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \exp(-t^2/2)\, dt, \qquad (1.1.22)$$

которая называется функцией Лапласа или интегралом вероятностей. Для вычисления функции Лапласа имеются таблицы (например, табл. 1.1.1).

Функция Лапласа $\Phi(x)$ обладает следующими свойствами: 1) $\Phi(0) = 0$; 2) $\Phi(-x) = -\Phi(x)$ (нечетная функция); 3) $\Phi(+\infty) = 0{,}5$ и, значит, $\Phi(-\infty) = -0{,}5$.

С учетом (1.1.22) вероятность (1.1.21) попадания случайной величины в промежуток от a до b принимает вид

$$P(a < X < b) = \Phi\left(\frac{b - x_m}{\hat{\sigma}}\right) - \Phi\left(\frac{a - x_m}{\hat{\sigma}}\right). \qquad (1.1.23)$$

Из (1.1.23) следует, что нахождение вероятности попадания нормально распределенной случайной величины в некоторый интервал (a, b) сводится к выборке значений из таблицы функции $\Phi(x)$.

Таблица 1.1.1. **Значения функции Лапласа $\Phi(x)$**

x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)
0,0	0,00000	1,1	0,36433	2,2	0,48610
0,1	0,03983	1,2	0,38493	2,3	0,48928
0,2	0,07926	1,3	0,40320	2,4	0,49180
0,3	0,11791	1,4	0,41924	2,5	0,49379
0,4	0,15542	1,5	0,43319	2,6	0,49534
0,5	0,19146	1,6	0,44520	2,7	0,49653
0,6	0,22575	1,7	0,45543	2,8	0,49744
0,7	0,25804	1,8	0,46407	2,9	0,49813
0,8	0,28814	1,9	0,47128	3,0	0,49865
0,9	0,31594	2,0	0,47725	3,5	0,49977
1,0	0,34134	2,1	0,48214	4,0	0,499968
				5,0	0,499999

Если участок (a, b) симметричен относительно математического ожидания, то, используя понятие квантили нормального распределения, координаты $x_{\min}$ и $x_{\max}$ границ участка с заданной вероятностью попадания в него случайной величины можно определить по формулам

$$x_{\min} = x_m + u_P\hat{\sigma} \;;\; x_{\max} = x_m + u_{1-P}\hat{\sigma}\,. \qquad (1.1.24)$$

На практике важно знать, какова величина границ (1.1.24). Расчеты вероятности $P(x_{\min} < X < x_{\max})$ попадания случайной величины X в различные интервалы из промежутка $(x_{\min}, x_{\max})$, выполненные по формуле (1.1.23), приведены в таблице 1.1.2. Как следует из таблицы, случайная величина, описываемая законом нормального распределения, с большой долей вероятности не выходит за пределы $x_m \pm 3\hat{\sigma}$ (так называемое правило «трех сигма»),

$$x_{\min} = x_m - 3\hat{\sigma} \le X \le x_{\max} = x_m + 3\hat{\sigma}\,. \qquad (1.1.25)$$

Таблица 1.1.2. **Правило «трех сигма»**

X	P
$x_m \le X < x_m + \hat{\sigma}$	0,341
$x_m + \hat{\sigma} \le X < x_m + 2\hat{\sigma}$	0,136
$x_m + 2\hat{\sigma} \le X \le x_m + 3\hat{\sigma}$	0,021

Вероятность попадания значения величины X в интервал $\left|X - x_m\right| > 3\hat{\sigma}$ мала: $P\left(\left|X - x_m\right| > 3\hat{\sigma}\right) \approx 0{,}0027$. В связи с этим при проведении инженерных расчетов полагают, что отклонение случайной нормально распределенной величины от ее среднего значения не превышает $3\hat{\sigma}$.

Если по результатам наблюдения за нормально распределенной случайной величиной определены ее экстремальные значения $x_{\min}$ и $x_{\max}$, то среднее значение x_m и квадратичное отклонение $\hat{\sigma}$, учитывая (1.1.25), равны

$$x_m = \frac{x_{\max} + x_{\min}}{2};\ \hat{\sigma} = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{6}. \qquad (1.1.26)$$

Распределение Вейбулла. Плотность вероятности в этом случае описывается формулой

$$f(x) = \frac{\beta(x-\delta)^{\beta-1}}{(\theta-\delta)^{\beta}} \exp\left[-\left(\frac{x-\delta}{\theta-\delta}\right)^{\beta}\right], \quad x \ge \delta \ge 0, \qquad (1.1.27)$$

где β — параметр формы, $(\theta - \delta)$ — параметры масштаба. Эти величины всегда положительны. Различные формы кривой распределения показаны на рис. 1.1.9 при $\delta = 0$.

Можно показать, что при $\beta = 1$ и $\delta = 0$ распределение Вейбулла трансформируется в экспоненциальное.

Подводя итог, заметим, что в настоящее время широкое распространение получили методы численного моделирования случайных событий. В этой связи разработаны алгоритмы генерации случайных чисел, а подсчет вероятностей и иные вычисления выполняются за счет непосредственной обработки массивов случайных величин, подчиненных заданным законам распределения.

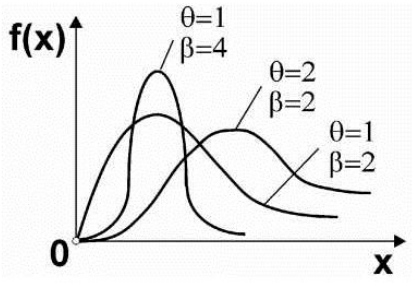


Рис. 1.1.9

Глава 1.2. **Погрешности геометрических размеров деталей**

Геометрические размеры детали, которые проставляются на ее чертеже, называются *номинальными*. Номинальные размеры принято согласовывать с рядом предпочтительных чисел. Это позволят сократить количество инструментов, используемых при изготовления детали. Ряды предпочтительных чисел представляют собой геометрические прогрессии, знаменатели которых равны $\sqrt[5]{10}$, $\sqrt[10]{10}$, $\sqrt[20]{10}$, $\sqrt[40]{10}$. Ряды чисел, вычисленных как члены геометрических прогрессий с такими знаменателями, обозначаются соответственно $R5$, $R10$, $R20$, $R40$. При этом наиболее часто используется ряд $R40$.

Полученная после изготовления по чертежам деталь всегда имеет отклонения от правильной геометрической формы и номинальных размеров, т. е. выполнена с той или иной *точностью*. Точность — степень приближения действительных параметров детали (формы и размеров) к номинальным. Отклонение действительных формы и размеров детали от номинальных, возникающее в процессе производства, называется *погрешностью*. Погрешности условно можно разделить на макро- и микрогеометрические. Параметры микрогеометрии определяют чистоту обработки поверхности детали, а макрогеометрии — погрешность формы. Фактическую

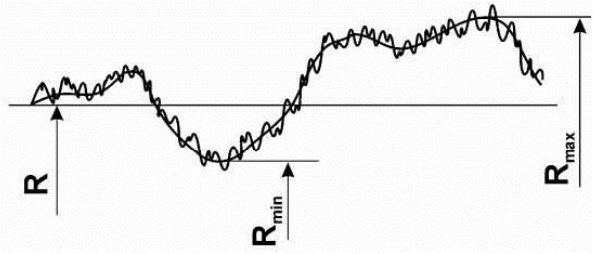


Рис. 1.2.1

погрешность формы поверхности можно определить как разность $\Delta R = R_{\max} - R_{\min}$, где $R_{\max}$ и $R_{\min}$ — соответственно максимальное и минимальное значения размера R. На рис. 1.2.1 показан фрагмент неидеальной поверхности в сечении, где наглядно представлены макро- и микрогеометрические ошибки.

Для получения работоспособной конструкции изготовителю кроме погрешности формы необходимо знать границы рассеяния размера каждой детали. Введем несколько понятий.

Вал и отверстие — термины, применяемые для обозначения наружных и внутренних размеров детали соответственно.

Допуском размера называется разность между наибольшим и наименьшим допустимыми размерами. Как следует из рис. 1.2.2, допуск t_D диаметра отверстия равен $t_D = D_{\max} - D_{\min}$, а диаметра вала — $t_d = d_{\max} - d_{\min}$, где $D_{\max}$ и $D_{\min}$ — наиболее и наименее допустимые диаметры отверстия, а $d_{\max}$ и $d_{\min}$ — наиболее и наименее допустимые диаметры вала.

Поле допуска — интервал размеров внутри границ рассеивания. Величина поля допуска зависит от *квалитета* — степени точности выполнения размера, который в свою очередь определяет точность обработки детали. Естественно, при

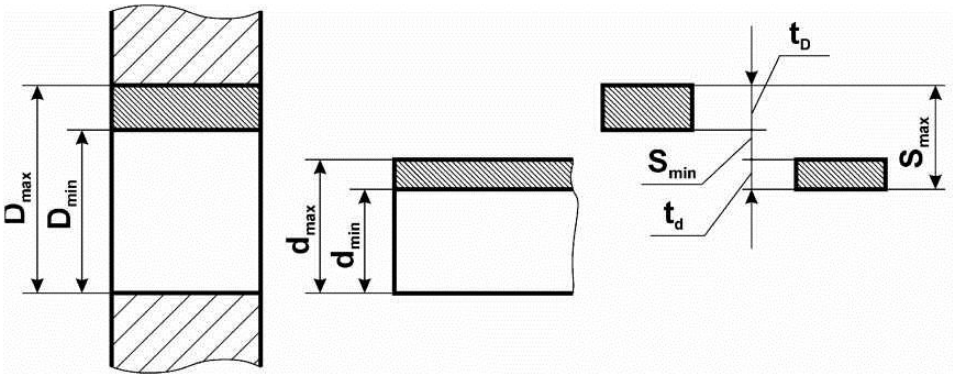


Рис. 1.2.2

увеличении допуска сложность изготовления детали (и, следовательно, себестоимость) снижается. Поле допуска является функцией размера и класса точности. Всего в России предусмотрено 19 классов точности (квалитетов), которые по мере их уменьшения обозначаются последовательным рядом чисел 01, 0, 1, 2, … , 17. При этом классы точности 01, 0, 1, 2, 3, 4 используются при изготовлении эталонных измерительных деталей, а квалитеты 5, 6, … , 13 — деталей сопряжения. Остальные классы точности предназначены для задания свободных размеров деталей.

Допуски могут существенно влиять на характер контактного взаимодействия деталей. На чертежах допуски размеров проставляются в виде предельных отклонений, например, символ $A_{0,01}^{0,035}$ на чертеже означает, что размер A выполняется с нижним отклонением $0{,}01$ и верхним $0{,}035$.

З а з о р — разность размеров отверстия и сопряженного с ним вала в том случае, когда размер отверстия больше размера вала (рис. 1.2.2). Если рассматривать зазор как случайную величину, ограниченную рамками допуска, то можно определить границы допустимых зазоров,

$$S_{\max} = D_{\max} - d_{\min}; \qquad S_{\min} = D_{\min} - d_{\max}.$$

Н а т я г — разность размеров отверстия и сопряженного с ним вала, если размер вала больше размера отверстия.

П о с а д к а определяет характер контактного взаимодействия деталей. Если в результате такого взаимодействия гарантирован зазор, то имеет место посадка *с зазором*. В том случае, когда контактное взаимодействие обеспечивает натяг — посадка *с натягом*. Наконец, если результатом такого взаимодействия является либо натяг, либо зазор, то посадка называется *переходной*.

Для того чтобы рассчитать величины возможных посадок, следует знать значения основных отклонений.

О с н о в н о е о т к л о н е н и е — ближайшее к нулевой линии предельное отклонение размера, односторонне ограничивающее поле допуска. Эти отклонения могут обозначаться буквами (рис. 1.2.3, 1.2.4). Очевидно, что наибольшее отклонение от нулевой линии определяется как сумма либо разность отклонений основного отклонения и допуска, зависящего от квалитета.

В зависимости от положения основного отклонения различают две системы образования посадок: *систему отверстия* и *систему вала*.

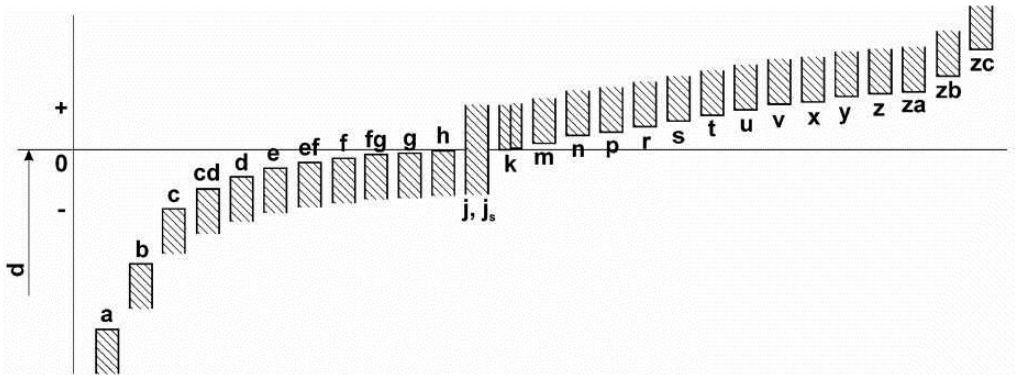


Рис. 1.2.3

В системе отверстия образование посадки реализуется за счет отклонения вала, а допуск отверстия не зависит от посадки и определяется исключительно величиной квалитета. При этом основное отклонение размера равно нулю, а поле допуска направлено так, что оно увеличивает размер отверстия.

Отклонение отверстия условно обозначается как $H7$, где цифра в обозначении указывает на класс точности.

Основные отклонения валов в системе отверстия и их условные обозначения приведены на рис. 1.2.3. Следует отметить, что размер поля допуска вала определяется величиной квалитета. Отклонения вала, также как и отклонения отверстия, определяют величину и характер посадки. В таком случае условное обозначение посадки вала с номинальным диаметром ϕ 70 мм в отверстие можно представить в виде $\phi\ 70H7/p6$.

Что касается системы вала, то допуск вала в этом случае не зависит от посадки, а сама посадка определяется совокупностью отклонений отверстий. Поля допусков отверстий в системе вала изображены на рис. 1.2.4. Основное отклонение вала при этом равно нулю, а величина допуска вала направлена в сторону его уменьшения. Пример условного обозначения размера в системе вала — $\phi\ 70F8/h7$.

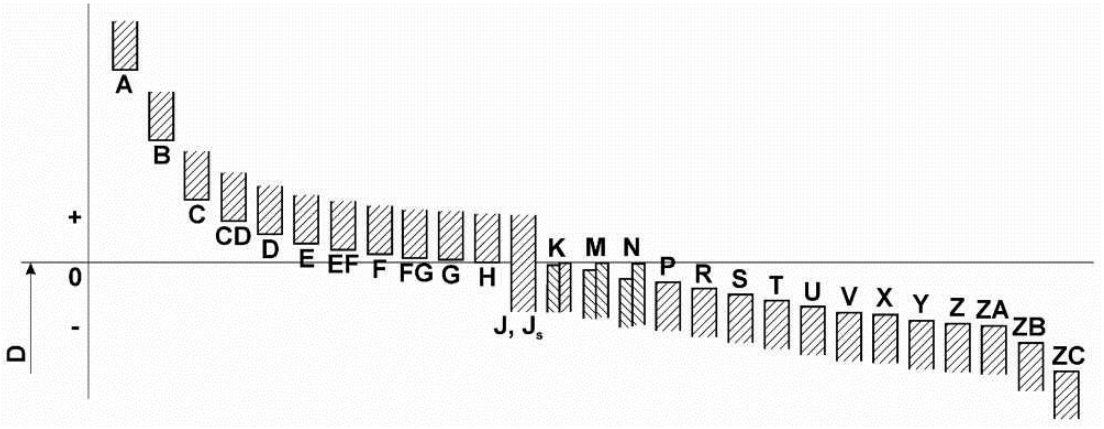


Рис. 1.2.4

Технологически система отверстия является более предпочтительной, а потому именно она широко используется на практике.

Ошибки геометрической формы. Приближенный учет погрешности формы поверхности можно выполнить, если эту поверхность заменить совокупностью участков, имеющих плоскую макрогеометрическую форму с микронеровностью. Это оказывается возможным для участков малых размеров, на которых погрешностью формы можно пренебречь. Уровни расположения участков можно описать функцией плотности $f(h_i)$ и в дальнейших расчетах использовать статистические методы (рис. 1.2.5). Основная погрешность вычислений в этом случае вызвана отсутствием учета взаимного влияния соседних участков (погрешностью формы которых ввиду малости линейных размеров можно пренебречь) на напряженно — деформированное состояние текущего участка, который, согласно принятой модели, является идеально плоским с поверхностным шероховатым слоем. Ошибка вычисления может быть значительно уменьшена при совместном использовании метода численного моделирования погрешности и метода конечных элементов (МКЭ).

В большинстве случаев из-за практических сложностей погрешностью формы пренебрегают, однако иногда это может привести к существенно неверным результатам. Рассмотрим ошибки микрогеометрии, которые определяют чистоту обработки поверхности, более подробно. Чистота обработки трактуется еще и как шероховатость поверхности. Укрупненное изображение шероховатости поверхности, полученное в результате замера, дано на рис. 1.2.6.

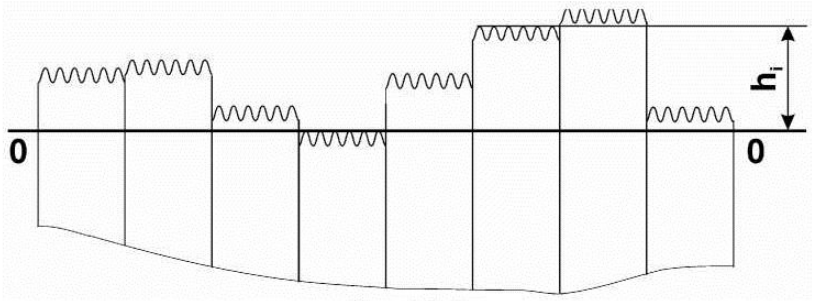


Рис. 1.2.5

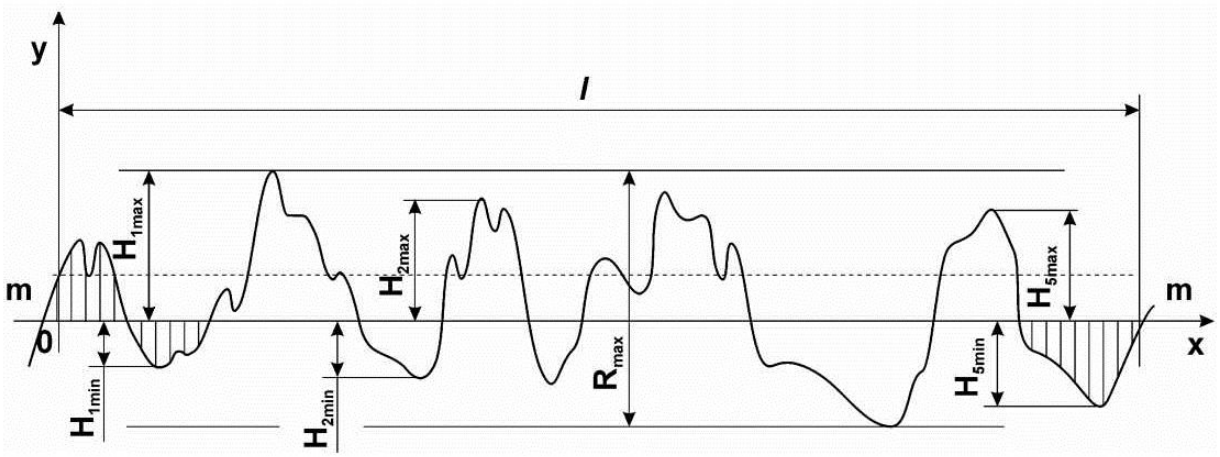


Рис. 1.2.6

Основной микрогеометрической характеристикой является измеренный на длине l модуль среднего арифметического отклонения профиля относительно средней линии Ra:

$$Ra = \frac{1}{l}\int_0^l |y(x)|dx, \qquad (1.2.1)$$

для определения которого используются специальные измерительные средства. С величиной Ra связывают значения классов чистоты поверхности (табл. 1.2.1).

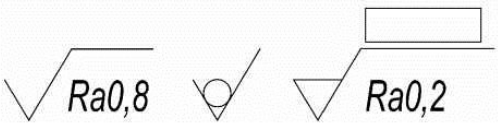
Таблица 1.2.1. **Классы чистоты поверхности**

Класс шероховатости	Разряд	Среднее арифметическое отклонение профиля Ra, мкм
6	а	2,5—2,0
	б	2,0—1,6
	в	1,6—1,25
7	а	1,25—1,0
	б	1,0—0,80
	в	0,80—0,63
8	а	0,63—0,50
	б	0,50—0,40
	в	0,40—0,32
9	а	0,32—0,25
	б	0,25—0,20
	в	0,20—0,16
10	а	0,160—0,125
	б	0,125—0,100
	в	0,100—0,080
11	а	0,080—0,063
	б	0,063—0,050
	в	0,050—0,040
12	а	0,040—0,032
	б	0,032—0,025
	в	0,025—0,020

Чистота обработки поверхности также указывается на чертеже. Для этого в России применяется специальный символ (рис. 1.2.7а). Число, записанное в поле символа, равно параметру Ra. Если обработка поверхности изготовляемой по данному чертежу детали не предполагается, то используется обозначение, изображенное на рис. 1.2.7b.

В том случае, когда чистоту поверхности необходимо обеспечить только предусмотренной конструктором механической обработкой, она может быть оговорена в поле, ограниченном прямоугольником (рис. 1.2.7c).

На чертежах деталей кроме допуска на размер можно указать погрешности формы поверхностей. Делается это в том случае, когда по условиям работы величины погрешностей формы меньше величин соответствующих допусков. В качест-



а) б) с)

Рис. 1.2.7

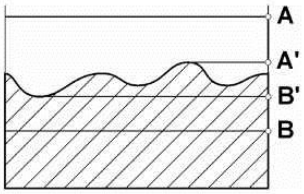
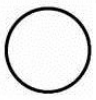


Рис. 1.2.8

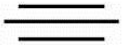
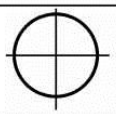
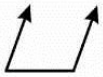
ве примера рассмотрим плоскую деталь, допуск одного из линейных размеров которой равен AB (рис. 1.2.8). При этом величина отклонения от идеальной плоской поверхности не превышает длины отрезка $A'B'$. Отметим, что величина отклонения от идеальной поверхности также может быть ограничена допуском. При этом размер этого допуска не должен превышать допуска линейного размера, а поле допуска располагается внутри AB.

Условные обозначения, характеризующие допуск формы и относительное расположение поверхностей, приведены в таблице 1.2.2.

Таблица 1.2.2. **Знаки условного обозначения допусков формы и расположения поверхностей**

Допуск	Знак
Формы	
Цилиндричности	
Плоскостности	
Формы заданного профиля	
Круглости	
Профиля продольного сечения цилиндрической поверхности	
Прямолинейности	

Продолжение таблицы 1.2.2.

Допуск	Знак
Параллельности	
Перпендикулярности	
Наклона	
Соосности	
Симметричности	
Оси плоскости симметрии (позиционный)	
Пересечения осей	
Полного радиального или торцового биения	
Биения радиального, торцового или в заданном направлении	

Термины, приведенные в таблице, следует понимать следующим образом: круглость — степень отклонения от окружности, соосность — степень отклонения осей соосных деталей, и т. д.

Если ограничиваются параметры двух или нескольких поверхностей, то они либо обозначаются группой стрелок (рис. 1.2.9), либо один из параметров получает ограничения относительно базы. При этом местонахождение базовой поверхности

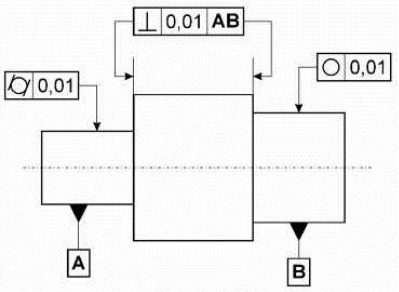


Рис. 1.2.9

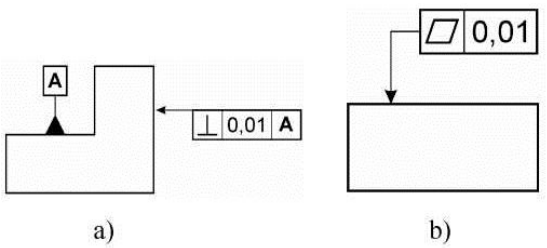


Рис. 1.2.10

указывается равнобедренным треугольником, а сама поверхность обозначается буквой внутри прямоугольника (рис. 1.2.10a). Когда же ограничения касаются одной поверхности, то она помечается стрелкой (рис. 1.2.10b).

Расчет экстремальных натягов (зазоров) в сопряжении деталей цилиндрической формы. Эта задача является одной из наиболее практически важных, а потому остановимся на ней более подробно.

Вал и отверстие цилиндрической формы после сборки имеют разные по величине натяги либо зазоры, что зависит от величин допусков размеров вала и отверстия (рис. 1.2.2). Будем полагать, что размеры вала и отверстия являются случайными величинами, распределенными по нормальному закону (1.1.19). Обозначим через d_m и D_m средние значения диаметров вала и отверстия соответственно (т. е. их математические ожидания). Если использовать предельно допустимые размеры сопряженных диаметров (рис. 1.2.2), то согласно (1.1.26) можно записать

$$d_m = \frac{d_{\max} + d_{\min}}{2}; \quad D_m = \frac{D_{\max} + D_{\min}}{2}. \tag{1.2.2}$$

Математическое ожидание δ_m среднего натяга равно

$$\delta_m = d_m - D_m. \tag{1.2.3}$$

Натяг, полученный при сборке вала с отверстием, представляет собой сумму двух независимых случайных величин. Поэтому, как следует из (1.1.15), его можно характеризовать величиной среднего квадратичного отклонения натяга $\hat{\sigma}_\delta$:

$$\hat{\sigma}_\delta = \sqrt{\hat{\sigma}_d^2 + \hat{\sigma}_D^2}. \tag{1.2.4}$$

При условии нормального распределения средние квадратичные отклонения диаметров согласно (1.1.26) равны

$$\hat{\sigma}_d = \frac{t_d}{6}; \qquad \hat{\sigma}_D = \frac{t_D}{6}, \tag{1.2.5}$$

так что в этом случае выражение (1.2.4) с учетом (1.2.5) принимает вид

$$\hat{\sigma}_\delta = \sqrt{\hat{\sigma}_d^2 + \hat{\sigma}_D^2} = \frac{1}{6}\sqrt{t_d^2 + t_D^2}. \tag{1.2.6}$$

Наибольшее и наименьшее значение натяга в соответствии с (1.1.25) можно определить как

$$\delta_{\max} = \delta_m + 3\hat{\sigma}_\delta; \quad \delta_{\min} = \delta_m - 3\hat{\sigma}_\delta. \tag{1.2.7}$$

Описанным выше способом можно вычислить экстремальные значения натягов, вероятность которых, по правилу «трех сигма» (1.1.25), крайне низка. Таким образом, расчет, ориентированный на определение маловероятных граничных натягов, приводит к созданию излишних запасов и тем самым не обеспечивает возможность выбора

оптимального натяга. По этой причине для проектирования важна задача расчета натяга с заданной вероятностью. При уменьшении этой вероятности можно существенно снизить величины запасов при незначительном изменении надежности.

Рассмотрим в качестве примера расчет посадок при заданной величине надежности.

Расчет максимальных и минимальных вероятностных натягов и зазоров при сборке деталей цилиндрической формы. Граничные значения отклонений, полученные в предыдущем примере, можно изменить, связывая их с изменением вероятности появления натяга либо зазора в цилиндрическом соединении (рис. 1.2.11).

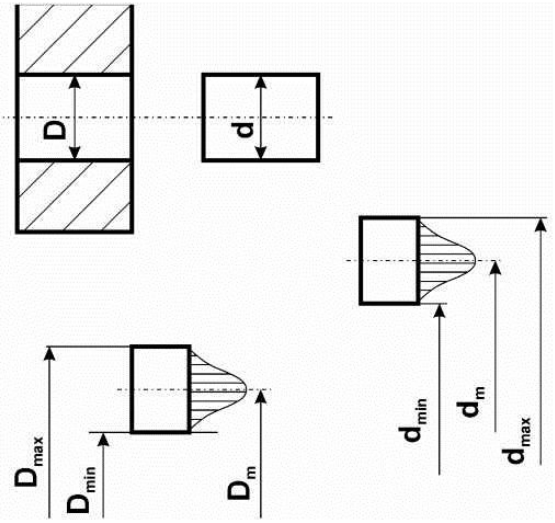


Рис. 1.2.11

Среднее значение S_m зазора по определению равно

$$S_m = \frac{D_m - d_m}{2}. \qquad (1.2.8)$$

Границы интервала суммарного зазора $S_{\min}, S_{\max}$ при заданной величине вероятности попадания в этот интервал определяются аналогично (1.1.24) как

$$S_{\min} = S_m + u_P \hat{\sigma}_\delta; \quad S_{\max} = S_m + u_{1-P} \hat{\sigma}_\delta. \qquad (1.2.9)$$

Задача расчета точности замыкающего звена размерной цепи. Размерной цепью называется совокупность взаимосвязанных размеров, образующих замкнутый контур. Звеном называется каждый из размеров, входящий в состав цепи.

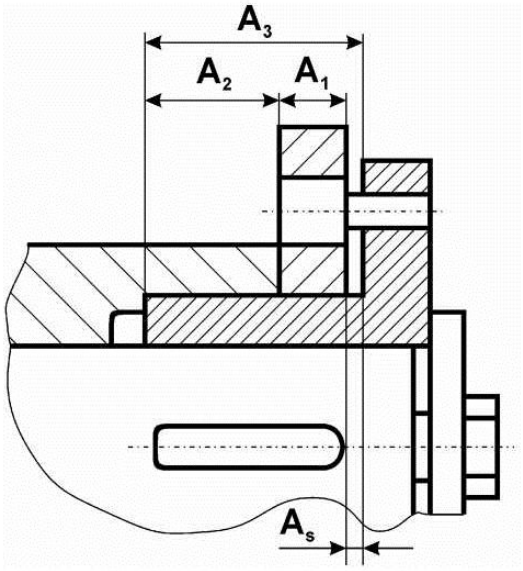


Рис. 1.2.12

На рис. 1.2.12 изображен фрагмент конструкции, в котором необходимо обеспечить зазор, лежащий в заданных пределах. Требуется найти допуск на размер A_s одного из звеньев по известным размерам A_1 и A_2 остальных звеньев.

Обозначим предельные значения размеров как $A_{1\min}, A_{1\max}$, $A_{2\min}, A_{2\max}$, $A_{3\min}, A_{3\max}$ и $A_{s\min}, A_{s\max}$. Тогда математические ожидания и допуски этих величин (при условии нормального распределения) согласно (1.1.26) имеют следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} A_{1m} &= \frac{A_{1\max} + A_{1\min}}{2}, \quad t_{A1} = A_{1\max} - A_{1\min} \\ A_{2m} &= \frac{A_{2\max} + A_{2\min}}{2}, \quad t_{A2} = A_{2\max} - A_{2\min} \\ A_{3m} &= \frac{A_{3\max} + A_{3\min}}{2}, \quad t_{A3} = A_{3\max} - A_{3\min} \\ A_{sm} &= \frac{A_{s\max} + A_{s\min}}{2}, \quad t_{As} = A_{s\max} - A_{s\min} \end{aligned}\right\}, \tag{1.2.10}$$

так что

$$A_{s\max} = A_{sm} + \frac{t_{As}}{2}; \quad A_{s\min} = A_{sm} - \frac{t_{As}}{2}. \tag{1.2.11}$$

В свою очередь, математическое ожидание A_{sm} размера замыкающего звена A_s в соответствии с (1.1.14) представляет собой результат алгебраического сложения математических ожиданий размеров остальных звеньев:

$$A_{sm} = A_{3m} - A_{1m} - A_{2m}, \tag{1.2.12}$$

а дисперсия σ_{As}, как следует из (1.1.15), равна

$$\hat{\sigma}_{As} = \sqrt{\hat{\sigma}_{A3}^2 - \hat{\sigma}_{A1}^2 - \hat{\sigma}_{A2}^2}, \tag{1.2.13}$$

где согласно (1.2.5)

$$\hat{\sigma}_{A1} = \frac{t_{A1}}{6}; \ \hat{\sigma}_{A2} = \frac{t_{A2}}{6}; \quad \hat{\sigma}_{A3} = \frac{t_{A3}}{6}; \quad \hat{\sigma}_{As} = \frac{t_{As}}{6}.$$

Следовательно, допуск t_{As} на размер зазора A_s равен

$$t_{As} = 6\hat{\sigma}_{As},$$

где дисперсия σ_{As} рассчитывается по формуле (1.2.13); наибольшее $A_{s\max}$ и наименьшее $A_{s\min}$ значения зазора определяются из (1.2.11).

Глава 1.3. Надежность механических систем

Надежность и ее оценка. Под надежностью, как уже упоминалось во введении, понимают свойство объекта сохранять выходные характеристики в установленных пределах в течение заданного промежутка времени. Изучением количественных соотношений при расчете надежности занимается *теория надежности*. Основой этой теории является эксперимент.

Рассмотрим, к примеру, результат испытаний на прочность образцов, работающих в условиях переменного нагружения. Очевидно, время работы до разрушения для каждого из образцов различно, и его можно рассматривать как случайное событие. Время работы до отказа называется наработкой до отказа. Пусть T — случайная величина, обозначающая время наработки до отказа. Если за выделенный промежуток времени Δt разрушилось n_i образцов из общего количества N, то, согласно (1.1.1), вероятность разрушения за выделенный промежуток времени равна $P_i = \dfrac{n_i}{N}$. Пусть $f(t)$ — плотность вероятности отказа (функция отказов). Вероятность отказа в течение промежутка времени от t_0 до t, как следует из (1.1.2), равна площади под кривой плотности (рис. 1.1.2):

$$P(t_0 < T < t) = \int_{t_0}^{t} f(t)dt . \qquad (1.3.1)$$

Вероятность того, что система выйдет из строя к моменту времени t, т. е. функция распределения наработки до отказа $F(t)$, имеет вид:

$$F(t) = \int_{-\infty}^{t} f(t)dt \equiv P(T < t) . \qquad (1.3.2)$$

Ясно, что если $t \to \infty$, то $F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 1$. Вероятность безотказной работы $R(t)$ (т. е. вероятность того, что система будет выполнять требуемую функцию в заданный момент времени t) определим как

$$R(t) = 1 - F(t) \equiv P(T > t) = 1 - \int_{-\infty}^{t} f(t)dt = \int_{t}^{\infty} f(t)dt . \qquad (1.3.3)$$

Вероятность отказа в данный промежуток времени (t_1, t_2) с помощью (1.3.1), (1.3.2) и (1.3.3) можно выразить либо через функцию распределения $F(t)$:

$$P(t_1 < T < t_2) = \int_{t_1}^{t_2} f(t)dt = \int_{-\infty}^{t_2} f(t)dt - \int_{-\infty}^{t_1} f(t)dt = F(t_2) - F(t_1) ,$$

либо через вероятность безотказной работы $R(t)$:

$$P(t_1 < T < t_2) = \int_{t_1}^{t_2} f(t)dt = \int_{t_1}^{\infty} f(t)dt - \int_{t_2}^{\infty} f(t)dt = R(t_1) - R(t_2). \qquad (1.3.4)$$

Частота появления отказа $h(t_1, t_2)$ в некотором промежутке времени (t_1, t_2) называется интенсивностью отказов в указанном интервале. Интенсивность отказов вычисляется по формуле

$$h(t_1, t_2) = \frac{R(t_1) - R(t_2)}{(t_2 - t_1)R(t_1)}. \qquad (1.3.5)$$

Если обозначить $t_1 = t$ и $t_2 = t + \Delta t$, то мгновенное значение интенсивности отказов $h(t)$ определяется как предел интенсивности отказов (1.3.5) при стремлении к нулю интервала Δt:

$$h(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{R(t) - R(t + \Delta t)}{\Delta t R(t)} = \frac{1}{R(t)}\left[-\frac{d}{dt} R(t) \right]. \qquad (1.3.6)$$

Учитывая, что согласно (1.3.3) справедливо равенство

$$\frac{d}{dt} R(t) = -f(t), \qquad (1.3.7)$$

для мгновенной интенсивности отказов (1.3.6) имеем

$$h(t) = \frac{f(t)}{R(t)}. \qquad (1.3.8)$$

Умножив обе части выражения (1.3.8) на dt и принимая во внимание (1.3.7), перепишем его в виде $-h(t)dt = \frac{dR(t)}{R(t)}$, что при дальнейшем интегрировании позволяет получить фундаментальную зависимость теории надежности:

$$R(t) = \exp\left(-\int_0^t h(t)dt \right). \qquad (1.3.9)$$

В статистическом плане под интенсивностью отказа понимают отношение числа отказов n_i за малый промежуток времени к числу работоспособных объектов N_0, т. е. $h(t) = \frac{n_i}{\Delta t N_0}$.

График интенсивности отказов как функции времени имеет характерный вид (рис. 1.3.1). Эта кривая условно может быть разделена на три участка. Начальному

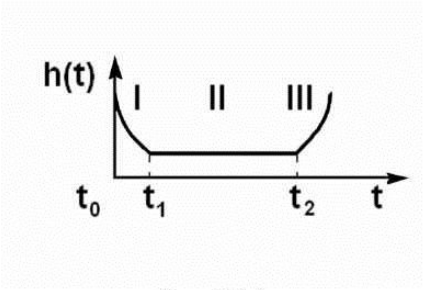


Рис. 1.3.1

периоду времени (интервал **I**, от t_0 до t_1) свойственно наличие ранних отказов из-за производственных дефектов и дефектов внутренней структуры материалов. Участок **II** (промежуток от t_1 до t_2) описывает режим нормальной эксплуатации. Равновероятный отказ на этом участке может быть вызван, например, недопустимым условием нагружения. На третьем участке **III**, от t_2 до t, интенсивность отказов возрастает за счет разрушений, вызванных усталостью, износом, старением и т. д.

Статистические законы надежности. Статистической характеристикой работы изделия до разрушения может служить введенная выше функция распределения наработки до отказа $F(t)$. Для нахождения функции распределения, адекватно описывающей рассматриваемое явление, обычно проводят ряд наблюдений за поведением объекта в процессе его эксплуатации и обобщают полученную об отказах информацию методами математической статистики. С теоретической точки зрения функций, которые соответствуют результатам наблюдений, может быть бесчисленное множество. Однако накопленный практический материал выделяет из них ряд наиболее значимых с точки зрения их распространенности в теории надежности. К их числу относятся *показательное (экспоненциальное) распределение, нормальное распределение* и *распределение Вейбулла* (гл. 1.1).

При показательном распределении (график плотности отказов такого распределения приведен на рис. 1.1.5) функция плотности имеет вид (1.1.16), так что в соответствии с (1.3.3) вероятность безотказной работы определяется как

$$R(t) = \int_t^\infty f(t)dt = \exp(-t/\theta), \quad t \geq 0. \tag{1.3.10}$$

Формулу (1.3.10) можно интерпретировать следующим образом: если рассматриваемый объект проработал без отказа в течение некоторого промежутка времени t_0, то вероятность безотказной работы в последующее время (при $t > t_0$) задается выражением

$$R(t) = \exp\left[-(t_0 - t)/\theta\right], \quad t \geq 0.$$

Очевидно, что интенсивность отказов при этом постоянна и с учетом (1.3.8) и (1.3.10) равна

$$h(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = \frac{1}{\theta}. \tag{1.3.11}$$

Из (1.3.11) следует, что экспоненциальный закон надежности для описания надежности машин и механизмов справедлив только в том случае, если интенсивность их отказов постоянна, т. е. в режиме нормальной эксплуатации (участок **II** рис. 1.3.2). Для постепенных отказов (т. е. связанных с износом в широком смысле слова — участок **III** кривой 1.3.2) требуются такие законы распределения времени

безотказной работы, в соответствии с которыми плотность вероятности вначале небольшая, затем резко возрастает и далее спадает до нуля из-за уменьшения числа работоспособных элементов. Такими законами являются, например, нормальное распределение (1.1.19) и распределение Вейбулла (1.1.27).

Нормальное распределение (1.1.19) наиболее широко применяется на практике, поскольку оно в значительной степени универсально. Дело в том, что, как уже упоминалось ранее, любая случайная величина подчиняется нормальному закону распределения, если на ее изменение оказывают влияние многие приблизительно равнозначные факторы, причем чем таких факторов больше, тем точнее нормальное распределение приближается к реальному поведению случайной величины.

При нормальном распределении вероятность попадания случайной величины в промежуток (t_1, t_2) рассчитывается по формуле (1.1.23),

$$P(t_1 < T < t_2) = \Phi\left(\frac{t_2 - t_m}{\hat{\sigma}}\right) - \Phi\left(\frac{t_1 - t_m}{\hat{\sigma}}\right), \qquad (1.3.12)$$

где $\Phi(x)$ — функция Лапласа (1.1.22), t_m — среднее значение времени. Для расчета вероятности безотказной работы в (1.3.12) следует положить $t_2 = t$, $t_1 = -\infty$. Тогда с помощью (1.3.12), табл. 1.1.1 и (1.3.3) получаем

$$R(t) = \frac{1}{2} - \Phi\left(\frac{t - t_m}{\hat{\sigma}}\right). \qquad (1.3.13)$$

Следует отметить, что для описания задач надежности распределения довольно часто используется и распределение Вейбулла (1.1.27). Пользуясь (1.3.2), (1.3.3) и (1.1.27), можно показать, что для $\delta \le t$

$$R(t) = \exp\left[-\left(\frac{t-\delta}{\theta-\delta}\right)^{\beta}\right]; \qquad h(t) = \frac{\beta(t-\delta)^{\beta-1}}{(\theta-\delta)^{\beta}}.$$

Статистические модели надежности. Так как любая механическая система состоит из комбинации собранных в единое целое объектов, то надежность этой совокупности оказывается отличной от надежности составляющих ее элементов. Если сложная механическая система моделируется цепочкой из n последовательно расположенных элементов (рис. 1.3.2), то вероятность безотказной работы $R_r(t)$ системы в целом равна, по теореме умножения вероятностей, произведению

$$R_r(t) = \prod_{i=1}^{n} R_i(t), \qquad (1.3.14)$$

где $R_i(t)$ — вероятность безотказной работы текущего i-го элемента из цепочки. Это означает, что при низкой надежности составляющих надежность сложной системы крайне низка.

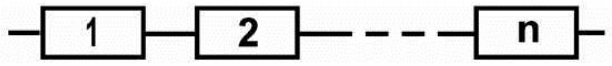


Рис. 1.3.2

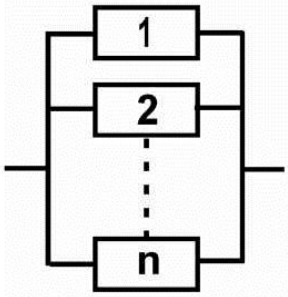


Рис. 1.3.3

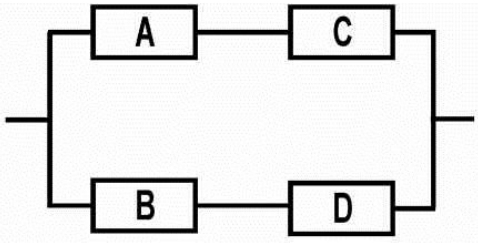


Рис. 1.3.4

Для системы из параллельно установленных элементов (рис. 1.3.3) характерно то, что выход ее из строя возможен только при условии выхода из строя всех составляющих ее элементов. Вероятность отказа такой системы равна произведению вероятностей отказа составляющих ее элементов:

$$P_r = \prod_{i=1}^{n} P_i \,, \tag{1.3.15}$$

а вероятность безотказной работы вычисляется по формуле

$$R_r = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - R_i) \,. \tag{1.3.16}$$

Если система состоит из совокупности последовательно и параллельно соединенных элементов (рис. 1.3.4), вероятность безотказной работы также определяется по сформулированным выше правилам. При этом участки только последовательно и только параллельно соединенных элементов объединяются в более крупные структуры, для каждой из которых рассчитывают вероятность безотказной работы по формулам (1.3.15) и (1.3.16) соответственно. Поэтапное укрупнение структур позволяет, в конечном итоге, получить значение вероятности безотказной работы системы в целом.

Расчет запаса прочности с учетом параметров надежности. Определение величин допустимых напряжений при расчетах на статическую прочность и особенно выносливость всегда сопряжено с необходимостью статистической обработки в связи с рассеянием. Это объясняется тем, что структура испытуемого материала неоднородна и имеет многочисленные дефекты кристаллической решетки, механообработки и т. д. Расчет прочности при этом ведется по предельному напряжению $\overline{\sigma}_{\lim}$, которое представляет собой среднее значение напряжения $\sigma_{\lim}$, полученное в результате лабораторных испытаний. Величину рассеяния будем характеризовать средним квадратичным отклонением $\hat{\sigma}_{\lim}$. Предположим, что наибольшее из действующих напряжение σ имеет рассеяние, подчиненное закону нормального распределения (1.3.13), с величиной среднего квадратичного отклонения $\hat{\sigma}$. Рассеяние напряжений для различных однотипных деталей может быть вызвано по-

грешностями формы, чистоты обработки поверхности, неоднородностью механических свойств материала и т. д. Тогда выражение для функции плотности вероятности предельных напряжений согласно (1.1.19) имеет вид

$$f(\sigma_{\lim}) = \frac{1}{\hat{\sigma}_{\lim}\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\sigma_{\lim} - \overline{\sigma}_{\lim}}{\hat{\sigma}_{\lim}} \right)^2 \right], \tag{1.3.17}$$

а для фактических напряжений —

$$f(\sigma) = \frac{1}{\hat{\sigma}\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\sigma - \sigma_m}{\hat{\sigma}} \right)^2 \right]. \tag{1.3.18}$$

Очевидно, что разрушение наступает в том случае, когда предельное напряжение окажется либо меньше фактического, либо равным ему, т. е. если разность σ_{dif} этих напряжений будет меньше нуля: $\sigma_{dif} = \sigma_{\lim} - \sigma \le 0$. Поскольку разность двух случайных величин, каждая из которых описывается законом нормального распределения, представляет собой новую случайную нормально распределенную случайную величину с математическим ожиданием $\overline{\sigma}_{dif}$ и средним квадратичным отклонением $\hat{\sigma}_{dif}$, то согласно (1.1.14) и (1.1.15) получаем

$$\overline{\sigma}_{dif} = \overline{\sigma}_{\lim} - \overline{\sigma} \; ; \; \hat{\sigma}_{dif} = \sqrt{\left(\hat{\sigma}_{\lim}^2 + \hat{\sigma}^2\right)}. \tag{1.3.19}$$

Плотность распределения величины σ_{dif}, аналогично (1.3.17) и (1.3.18), записывается как

$$f(\sigma_{dif}) = \frac{1}{\hat{\sigma}_{dif}\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\sigma_{dif} - \overline{\sigma}_{dif}}{\hat{\sigma}_{dif}} \right)^2 \right]. \tag{1.3.20}$$

Если в выражении (1.3.20) положить $\sigma_{dif} = 0$, то квантиль такого распределения будет иметь вид

$$u_P = -\frac{\overline{\sigma}_{\lim} - \sigma}{\sqrt{\hat{\sigma}_{\lim}^2 + \hat{\sigma}^2}}. \tag{1.3.21}$$

Если ввести следующие коэффициенты: запаса (безопасности) при заданной надежности $n = \frac{\sigma_{\lim}}{\sigma}$, вариации прочности $\gamma_{\sigma_{\lim}} = \hat{\sigma}_{\lim} / \sigma_{\lim}$ и вариации напряжения $\gamma_\sigma = \hat{\sigma} / \sigma$, то выражение (1.3.21) можно записать в форме

$$u_P = \frac{1 - s}{\sqrt{n^2 \gamma_{\sigma_{\lim}}^2 + \gamma_\sigma^2}}.$$

Раздел 2. МЕТОДЫ РАСЧЕТА НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ПРОСТЫХ МОДЕЛЕЙ

Глава 2.1. Основные понятия и определения

Внутренние силовые факторы и деформация. Метод сечений. Закрепленное и нагруженное внешней нагрузкой тело (например, деталь механической конструкции) деформируется. Под деформацией понимается изменение линейных размеров и формы тела в результате внешнего нагружения. Если после снятия внешней нагрузки тело принимает первоначальную форму и сохраняет прежние линейные размеры, то деформация считается *упругой*, если же после снятия внешней нагрузки формы и размеры тела восстанавливаются не полностью — *упруго-пластической*. Деформация тела происходит потому, что вследствие приложенных к нему внешних силовых факторов возникают внутренние силы, которые, в свою очередь, и вызывают увеличение (уменьшение) расстояний между атомами металла, из которого изготовлено это тело.

Для нахождения внутренних сил можно воспользоваться *методом сечений*. Рассмотрим тело произвольной формы, нагруженное системой внешних находящихся в равновесии сил: распределенных q и сосредоточенных $F_1, F_2, \ldots, F_k$. Мысленно рассечем это тело некоторой плоскостью на две части, I и II (рис. 2.1.1a), и рассмотрим равновесие одной из частей, например, I (рис. 2.1.1b). Силы воздействия отсеченной части тела II на часть I являются по отношению к последней внешними, по отношению же к телу в целом — внутренними. Эти силы на основании закона Ньютона равны по величине и противоположны по направлению внутренним силам, действующим на часть II со стороны части I. Следовательно, воздействие части I тела на часть II можно заменить системой внутренних силовых факторов в рассматриваемом сечении. В общем случае взаимодействие частей тела описывается действующими по сечению двумя компонентами: результирующей внутренней силой $\vec{R} = \vec{N} + \vec{Q}_x + \vec{Q}_y$, приложенной к центру тяжести сечения O и называемой главным вектором, и

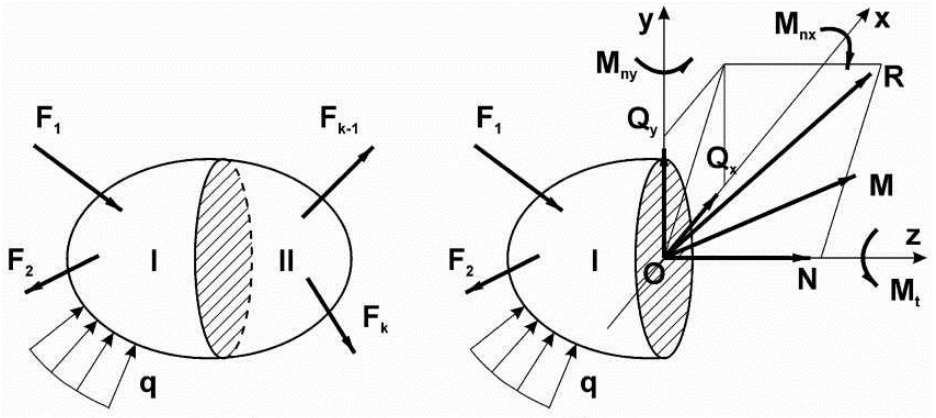


Рис. 2.1.1

главным моментом $\vec{M} = \vec{M}_t + \vec{M}_{nx} + \vec{M}_{ny}$ внутренних сил относительно некоторой оси, проходящей через точку O.

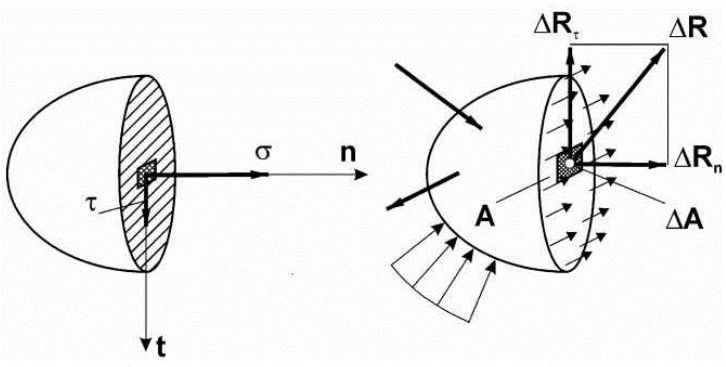
Каждая из составляющих внутренних силовых факторов в рассматриваемом сечении отвечает за определенный вид деформации: нормальная (или продольная) сила $\vec{N}$ вызывает *растяжение* или *сжатие*; поперечным (или перерезывающим) силам $\vec{Q}_x$ и $\vec{Q}_y$ соответствует *сдвиг*; результатом действия крутящего момента $\vec{M}_t$ является *кручение* тела, а изгибающих моментов $\vec{M}_{nx}$ и $\vec{M}_{ny}$ — его *изгиб.*

Поскольку как тело в целом, так и обе его части I и II по отдельности находятся в равновесии, то можно утверждать, что внешние силы, действующие на часть I, и внутренние силовые факторы, приложенные к отсеченной части II, *статически эквивалентны друг другу*, т. е. их проекции на любую ось равны по абсолютной величине и противоположны по знаку. Таким образом, если заданы приложенные к телу внешние силы, то внутренние силовые факторы в любом сечении определяются с помощью уравнений равновесия (двух векторных или шести скалярных) как суммы сил и моментов, действующих на мысленно отсеченную часть тела I:

$$\vec{R} = \sum_i \vec{F}_{iI} \; ; \qquad \vec{M} = \sum_i \vec{M}_{iI} \; . \tag{2.1.1}$$

Применение метода сечений дает возможность отождествлять абсолютные величины проекций внутренних силовых факторов, действующих в искомом сечении со стороны одной из частей тел, с абсолютными значениями приложенных к этой части тела проекциями внешних силовых факторов.

Напряжения. Интенсивность внутренних сил, действующих на элементарной площадке, будем характеризовать ***нормальным*** σ и ***касательным*** τ напряжениями (рис. 2.1.2a). Необходимость фактического разделения напряжений на нормальные и касательные вызвана тем обстоятельством, что они поразному влияют на прочность — способность тела, детали либо конструкции сопротивляться внешним нагрузкам без их разрушения.



a) b)

Рис. 2.1.2

Рассмотрим сечение некоторого тела плоскостью, проведенной в произвольной точке O (рис. 2.1.2b). Площадь полученного сечения обозначим через A. В окрестности этой точки выделим элементарную площадку ΔA. Отношение $\dfrac{\Delta\vec{R}}{\Delta A}$, где $\Delta\vec{R}$ — равнодействующая внутренних сил на рассматриваемой площадке, имеет смысл вектора среднего напряжения $\vec{p}_m$ на этой площадке. Переходя к преде-

лу при $\Delta A \to 0$, получаем вектор полного напряжения $\vec{p}$ в точке O, принадлежащей сечению A,

$$\vec{p} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta \vec{R}}{\Delta A}.$$

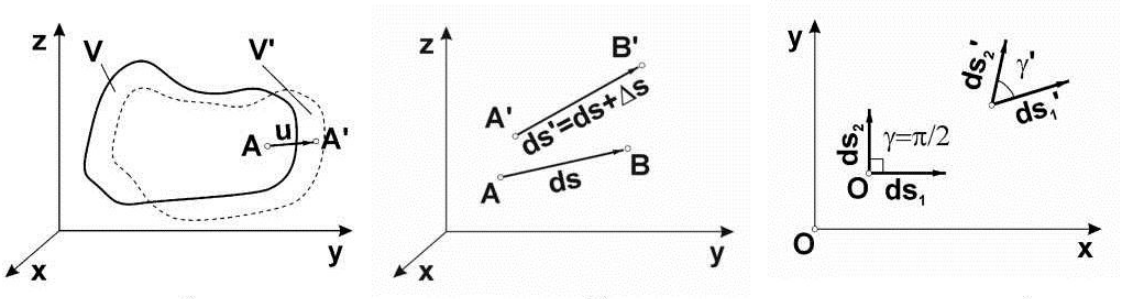
Разложим силу $\Delta \vec{R}$ на две составляющие — касательную $\Delta \vec{R}_\tau$, лежащую в плоскости сечения A, и нормальную $\Delta \vec{R}_n$, расположенную перпендикулярно этой плоскости. Вектор полного напряжения $\vec{p}$ также разлагается на две составляющие — в плоскости сечения и по нормали к сечению. Модули нормального σ и касательного τ напряжений равны

$$\sigma = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta R_n}{\Delta A}; \qquad \tau = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta R_\tau}{\Delta A}. \tag{2.1.2}$$

Величины напряжений в любой точке сечения зависят от положения секущей плоскости. Совокупность нормальных и касательных напряжений для всего множества элементарных площадок, проходящих через точку, полностью характеризует *напряженное состояние* в этой точке. Определение этих напряжений представляет собой суть *расчетов на прочность* при статическом приложении нагрузки.

Перемещения и деформации. Для количественной характеристики *деформированного состояния* системы используются величины *линейных* и *угловых* перемещений точек системы, совершаемых под действием внешнего нагружения.

Пусть тело в начальном состоянии (до приложения внешней нагрузки) занимает в пространстве некоторую область V, а в результате какого-либо внешнего воздействия точки тела смещаются так, что тело ограничивается областью V' (рис. 2.1.3a). При этом произвольная точка $A(x, y, z)$ переместится в положение $A'(x', y', z')$. Вектор $\vec{u} = A\vec{A}'$, соединяющий начальное и конечное положения точки, называется вектором линейного перемещения. Рассмотрим две бесконечно близкие точки A и B, расстояние между которыми в начальном состоянии равно ds (рис. 2.1.3.b). После деформации эти точки переместятся в положения A' и B'. В результате линейный элемент ds, ограниченный точками A и B, преобразуется в линейный элемент $ds' = ds + \Delta s$, ограниченный точками A' и B'. Кроме линейного изменения элемента ds имеет место его поворот в пространстве на некоторый угол, который определяет *угловое перемещение* этого элемента.



a) b) c)

Рис. 2.1.3

Отношение приращения Δs длины отрезка AB к его первоначальной длине ds при стремлении последней к нулю называется относительной линейной деформацией в точке A по направлению $\vec{AB}$:

$$\varepsilon_{AB} = \lim_{ds \to 0} \frac{\Delta s}{ds}. \qquad (2.1.3)$$

Деформации в направлении декартовых координатных осей обозначаются как $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ и ε_z.

Рассмотрим теперь прямой угол γ, образованный в недеформированном теле двумя бесконечно малыми отрезками ds_1 и ds_2, выходящими из точки O параллельно осям OX и OY соответственно (рис. 2.1.3с). После деформации тела этот угол изменяется и становится равным γ'. Предельная разность углов γ и γ', выраженная в радианах, называется угловой деформацией (или углом сдвига) в точке O в плоскости XOY:

$$\gamma_{xy} = \lim_{\substack{ds_1 \to 0 \\ ds_2 \to 0}} (\gamma - \gamma'). \qquad (2.1.4)$$

Совокупностью линейных $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ и угловых $\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}$ деформаций можно полностью характеризовать *деформированное состояние* текущей точки тела, возникшее в результате действия внешней нагрузки, по всем возможным направлениям и плоскостям.

Связь перемещений и деформаций. Связь между перемещениями и деформациями впервые была сформулирована Робертом Гуком в конце XVII-го века. В современной трактовке ***закон Гука*** устанавливает *линейную зависимость между деформацией тела в каждой его точке и напряжениями в этой же точке*. При этом коэффициенты пропорциональности представляют собой физические константы материала как такового и не связаны с геометрией тела.

Важно подчеркнуть, что в соответствии с законом Гука наличие прямой пропорциональной зависимости между перемещениями и напряжениями предполагается как при возрастании нагрузки, так и при ее убывании, что позволяет говорить об упругих свойствах тел, подчиняющихся этому закону.

Разумеется, закон Гука является приближенным. Для большинства конструкционных материалов (например, сталь) он выполняется с большой степенью точности в широком диапазоне изменения напряжений, в то время как, например, для чугуна и некоторых строительных материалов наблюдаются значительные отклонения от линейной зависимости напряжений и деформаций даже при небольшом уровне напряжений.

Принцип суперпозиции. Из закона Гука вытекает *принцип суперпозиции*, или *независимости действия сил*. В соответствии с этим принципом для механических систем, поведение которых описывается законом Гука, *результат суммарного воздействия всех силовых факторов равен сумме результатов действия каждого из силовых факторов в отдельности, причем вне зависимости от порядка их приложения*. Под результатом силового воздействия понимаются внутренние силы и перемещения, возникающие в системе под действием внешнего нагружения.

Глава 2.2. **Растяжение (сжатие) стержневых моделей**

Простейшим случаем силового воздействия является *центральное нагружение* стержня внешней нагрузкой, вызывающей его *растяжение* или *сжатие.* Под *центральным* понимается такое нагружение, при котором точка приложения силы совпадает с центром тяжести поперечного сечения. Такое нагружение приводит либо к удлинению стержня (в случае растяжения), либо к его укорочению (в случае сжатия). В дальнейшем растяжению предписываем знак плюс (+), а сжатию — минус (–). Растяжение (сжатие) прямых стержней — довольно простой вид напряженного состояния, который легко реализовать при лабораторных испытаниях. Поэтому этот тип силового воздействия является базовым, к которому можно привести и другие варианты напряженных состояний. В этой связи на нем следует остановиться более подробно.

Деформации. Рассмотрим однородный стержень прямоугольного поперечного сечения площадью $A = bh$ и длиной l, к торцам которого приложены внешние растягивающие силы F (рис. 2.2.1). Воспользовавшись методом сечений, легко установить, что во всех поперечных сечениях стержня возникнут одинаковые нормальные

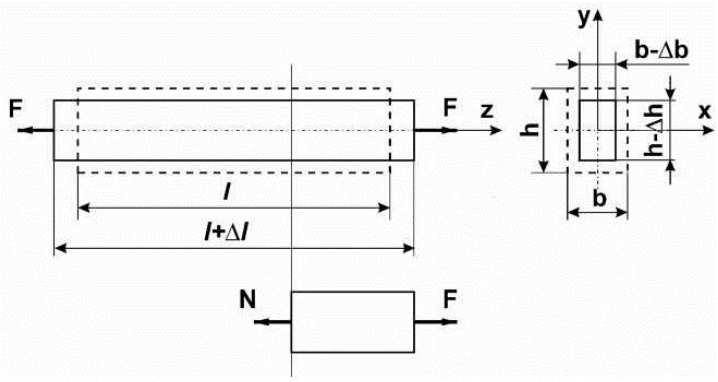


Рис. 2.2.1

внутренние силы N, равные по абсолютной величине силе F, $N = F$. Сила N является равнодействующей элементарных внутренних нормальных сил σdA, распределенных по площади поперечного сечения A. Закон распределения нормальных напряжений σ по сечению устанавливается с помощью ***гипотезы плоских сечений***: плоские поперечные сечения стержня при упругом растяжении (сжатии) смещаются параллельно исходным положениям, оставаясь при этом плоскими. Поскольку согласно этой гипотезе внутренние силы в однородном стержне распределены по любому сечению равномерно, то нормальные напряжения растяжения σ во всех точках текущего сечения должны быть одинаковыми и равными $\sigma = N / A$.

Нормальное нагружение приводит к осевому удлинению стержня на величину Δl. Отношение абсолютного продольного удлинения Δl стержня к его первоначальной длине l называется относительной продольной деформацией, или относительным продольным удлинением ε_z:

$$\varepsilon_z = \frac{\Delta l}{l}. \qquad (2.2.1)$$

Удлинение стержня приводит также к уменьшению его поперечных размеров, что, в свою очередь, характеризуется относительными поперечными деформациями ε_x и ε_y:

$$\varepsilon_x = -\frac{\Delta b}{b}; \qquad \varepsilon_y = -\frac{\Delta h}{h}. \tag{2.2.2}$$

Отметим, что для изотропных материалов справедливо равенство $\varepsilon_x = \varepsilon_y$.

Закон Гука. Один из фундаментальных законов механики — закон Гука, устанавливающий линейную зависимость между нормальным напряжением σ и относительным удлинением ε (гл. 2.1) — для центрального растяжения (сжатия) формулируется в виде

$$\sigma = E\varepsilon, \tag{2.2.3}$$

где E — коэффициент пропорциональности, который называется модулем упругости или модулем Юнга, фактическая величина которого зависит от механических свойств материала.

Важной характеристикой прочности материала является также коэффициент Пуассона μ. Величина этого коэффициента определяется абсолютным значением отношения поперечной деформации к продольной,

$$\mu = abs\left(\frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_z}\right) = abs\left(\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_z}\right), \tag{2.2.4}$$

где $abs(x)$ — абсолютное значение числа x. Числовое значение μ для большинства металлов лежит в пределах $0{,}25 \le \mu \le 0{,}3$.

Закон Гука можно записать в другой форме. Из (2.2.3) и (2.2.4) следует, что

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E}; \qquad \varepsilon_x = \varepsilon_y = -\mu\frac{\sigma_z}{E}. \tag{2.2.5}$$

Очевидно, что растяжение в направлении приложения нормальной силы вызывает удлинение в этом направлении и сжатие в перпендикулярном. Поэтому для случая нормального нагружения в трех взаимно перпендикулярных плоскостях соотношения для расчета относительных удлинений с учетом (2.2.3) принимают вид

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E} - \mu\left(\frac{\sigma_y}{E} + \frac{\sigma_z}{E}\right)\\
\varepsilon_y &= \frac{\sigma_y}{E} - \mu\left(\frac{\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_z}{E}\right)\\
\varepsilon_z &= \frac{\sigma_z}{E} - \mu\left(\frac{\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E}\right)
\end{aligned}\right\}. \tag{2.2.6}$$

Выражение (2.2.6) получило название ***обобщенного закона Гука.***

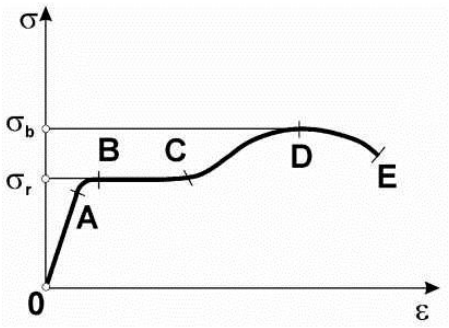


Рис. 2.2.2

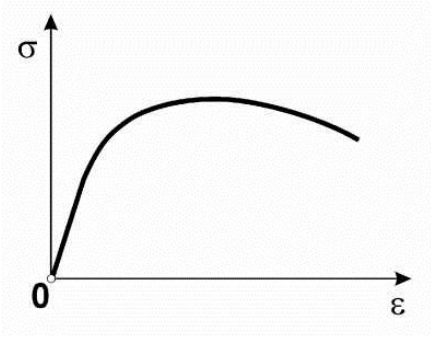


Рис. 2.2.3

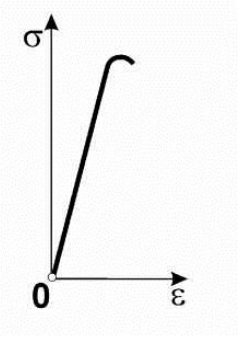


Рис. 2.2.4

Линейная зависимость, определенная законом Гука, справедлива только для области упругих деформаций и нарушается при появлении признаков пластического деформирования (напомним, что под пластическим деформированием понимается такой случай нагружения, при котором тело не возвращается в исходное после снятия внешней нагрузки). Для того чтобы разобраться в характере разрушения и найти количественные характеристики прочности материала, его испытывают на растяжение (сжатие). На рис. 2.2.2 изображена типичная кривая, полученная при испытании на растяжение образцов из низколегированных сталей. Здесь на участке OA сохраняется прямая пропорциональная зависимость, а координаты точки A определяют предел пропорциональности. Участок BC характеризуется появлением пластических деформаций, которые растут даже без приложения нагрузки. Это явление называют *текучестью* материала, а напряжение, соответствующее точке C — пределом текучести σ_r. На участке CD напряжение возрастает и в точке D достигает максимального значения. Дальнейшее удлинение приводит к разрушению материала. Напряжение, соответствующее точке D, носит название предела прочности σ_b. У материалов из высоколегированной стали нет явно выраженной площадки текучести, а потому для них используется понятие *условного предела текучести* (рис. 2.2.3), за который принимают напряжения, при которых остаточная деформация равна $\varepsilon = 0{,}002$. Для хрупких материалов явление текучести вообще не наблюдается, а кривая растяжения имеет вид, показанный на рис. 2.2.4.

Допускаемые напряжения и условие прочности. Очевидно, что, имея результаты испытаний материала на растяжение (сжатие), можно определить границы возможного нагружения, или, как их называют на практике, допускаемые напряжения по текучести σ_{ar} и прочности σ_{ab}, величины которых рассчитываются по формулам

$$\sigma_{ar} = \frac{\sigma_r}{n_r}; \qquad \sigma_{ab} = \frac{\sigma_b}{n_b}, \tag{2.2.7}$$

где n_r, n_b — коэффициенты запаса статической прочности (подробнее о коэффициентах запаса см. в главе 2.7).

Одним из важнейшим критерием расчета любой механической конструкции является ***условие прочности***. Оно считается выполненным, если фактически дейст-

вующее напряжение не превышает допускаемое. Поэтому условие прочности имеет вид:

по пределу текучести $\sigma \le \sigma_{ar}$;

по пределу прочности $\sigma \le \sigma_{ab}$. (2.2.8)

Распределение нормальных напряжений и осевых сил. Растяжение (сжатие) характеризуется величинами нормальных напряжений, возникающих от действия внешних нагрузок. Поскольку напряжения меняются по длине стержня, то для того чтобы иметь полную информацию о его напряженном состоянии, необходимо построить график распределения нормальных напряжений по длине. Такой график называется эпюрой. Для построения эпюр напряжений растяжения и растягивающих сил можно воспользоваться методом сечений (глава 2.1). На рис. 2.2.5a изображен жестко закрепленный одним концом стержень, состоящий из двух участков с различными поперечными сечениями, который нагружен парой центральных сил F_1 и F_2. Площади поперечных сечений обозначим через A_1 и A_2. Как уже упоминалось выше, для нахождения внутренних усилий в некотором текущем сечении необходимо мысленно разрезать брус в этом сечении и рассмотреть равновесие отсеченной части. Проделав эту процедуру дважды — для сечений I и II (рис. 2.2.5b,c) — легко построить эпюры усилия растяжения (рис. 2.2.5d) и нормального напряжения (рис. 2.2.5e).

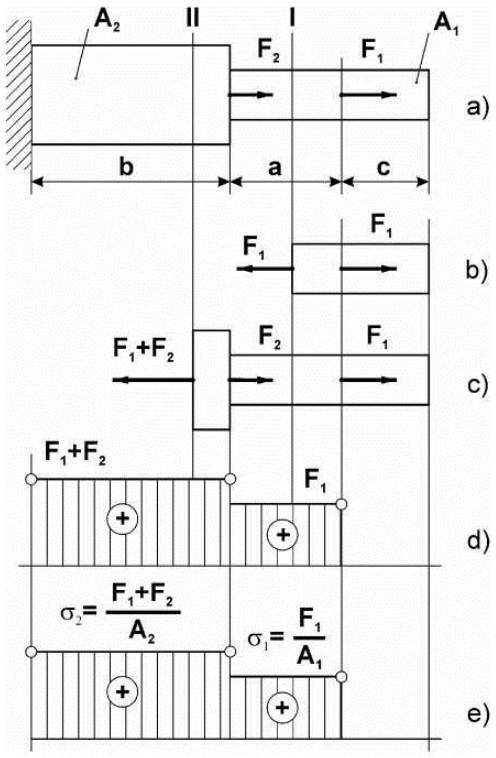


Рис. 2.2.5

Напряжения в наклонных сечениях. Испытания на растяжение (сжатие) помогают также сделать вывод относительно характера процесса разрушения. Для этого рассмотрим напряжения, возникающие на наклоненной под углом α к оси площадке бруса, растянутого продольной силой F (рис. 2.2.6). Равнодействующая внутренних сил в этом наклонном сечении направлена вдоль оси стержня и равна внешней растягивающей силе F. Представим эту равнодействующую в виде суммы проекций N_α и Q_α на два взаимно-перпендикулярных направления (в плоскости сечения и перпендикулярно к нему),

$$N_\alpha = F\cos\alpha; \quad Q_\alpha = F\sin\alpha.$$

Если площадь поперечного сечения бруса обозначить через A, то площадь наклонной площадки равна $A_\alpha = A/\cos\alpha$, а напряжения на этой площадке —

$$\sigma_\alpha = \frac{N_\alpha}{A_\alpha} = \frac{F}{A}\cos^2\alpha = \sigma\ \cos^2\alpha; \qquad \tau_\alpha = \frac{Q_\alpha}{A_\alpha} = \frac{1}{2}\sigma\ \sin 2\alpha, \tag{2.2.9}$$

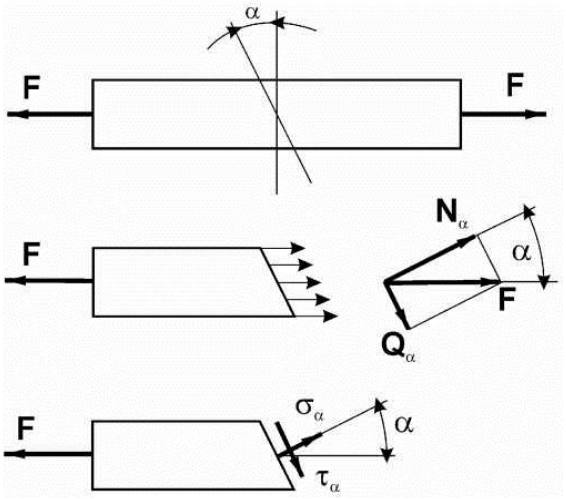


Рис. 2.2.6

где $\sigma = F/A$. Напряжения σ_α и τ_α являются соответственно нормальным и касательным напряжениями в наклонном сечении.

Из (2.2.9) следует, что действующее на наклонной площадке нормальное напряжение σ_α достигает максимальной величины при $\alpha = 0$, причем $\sigma_{\alpha\max} = \sigma$. Заметим, что при таком значении угла касательное напряжение отсутствуют. Площадки, на которых действуют только нормальные напряжения, называются ***главными площадками***, а сами эти напряжения — ***главными напряжениями***. Таким образом, расчет прочности стержней в условиях упругого растяжения следует проводить по нормальным напряжениям в поперечных сечениях.

Согласно (2.2.9), касательные напряжения τ_α, вызывающие относительный сдвиг слоев материала, максимальны при $\alpha = \pi/4$ и $\alpha = 3\pi/4$, так что $\tau_{\max} = \sigma/2$. При этом нормальные напряжения в этих сечениях по величине равны касательным.

Эксперименты показали, что поверхности разрушенных при растяжении (сжатии) стержней, как правило, наклонены под углом $\alpha = \pi/4$, поэтому именно возникновение наибольших касательных напряжений можно с уверенностью назвать главной причиной разрушения материалов.

При $\alpha = \pi/2$ (т. е. на продольных площадках) отсутствуют как нормальные, так и касательные напряжения. Это означает, что продольные слои стержня не взаимодействуют между собой.

Решение статически неопределимых задач при растяжении (сжатии). Рассмотренные выше методы определения внутренних силовых факторов далеко не всегда оказываются достаточными для решения всего многообразия задач растяжения (сжатия) механических стержневых конструкций. В инженерной практике часто встречаются так называемые *статически неопределимые системы*, характеризующиеся тем, что число наложенных на них связей превышает количество независимых уравнений статики. В этом случае для определения внутренних силовых факторов (реакций) одних уравнений статического равновесия оказывается недостаточно. Разность между числом реакций и числом возможных независимых уравнений равновесия называется степенью статической неопределимости. Найти все неизвестные силы (или, как говорят, раскрыть статическую неопределимость) можно, дополнив систему уравнений статики — например, условиями совместности деформаций (подробнее о методах решения статически неопределимых задач будет рассказано в главе 2.6).

Рассмотрим принцип составления уравнений совместности деформаций на простом примере нагружения стержня, аналогичного изображенному на рис. 2.2.5а, только жестко заделанного с обеих сторон (рис. 2.2.7а). Для решения задачи устра-

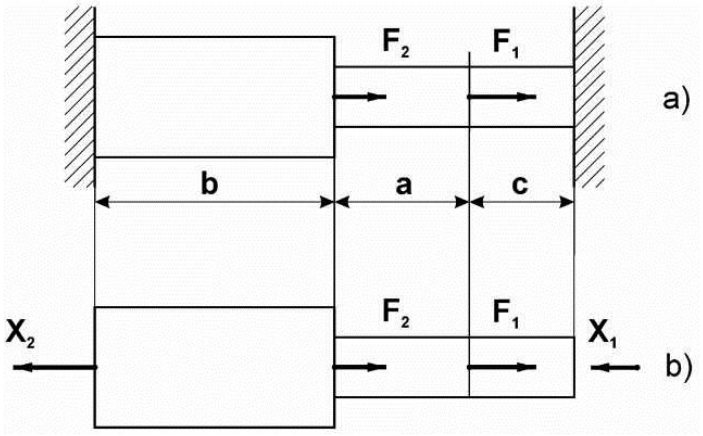


Рис. 2.2.7

ним внешние опоры, заменив их действие силами реакции X_1 и X_2, и рассмотрим равновесие стержня (рис. 2.2.7b). Ясно, что данная система однократно статически неопределима, поскольку две реакции опор не могут быть найдены из одного уравнения статического равновесия:

$$F_1 + F_2 - X_1 - X_2 = 0\,.$$

Уравнение совместности деформаций должно выражать тот очевидный факт, что в условиях жесткого закрепления общее удлинение стержня, т. е. смещение одного из торцов относительно другого, равно нулю. Тогда согласно закону Гука (2.2.3) имеем

$$\frac{F_2 b}{EA_2} + \frac{F_1 a}{EA_1} + \frac{F_1 b}{EA_2} - \frac{X_1(a+c)}{EA_1} - \frac{X_1 b}{EA_2} = 0\,.$$

Решая систему полученных уравнений, получаем

$$X_1 = \frac{(F_1 + F_2)A_1 b + F_1 A_2 a}{A_1 b + A_2(a+c)}; \qquad X_2 = F_1 + F_2 - X_1\,.$$

Другой пример статически неопределимой стержневой системы, состоящей из трех нагруженных вертикальной силой F стержней с одинаковыми сечениями площади A, приведен на рис. 2.2.8. Уравнения равновесия в этом случае имеют вид

$$X_2 = X_3; \qquad F - X_1 - 2X_2\cos\beta = 0\,.$$

Для того чтобы записать условие совместности перемещений, нужно рассмотреть деформированное состояние данной стержневой системы, которое характеризуется смещением узловой точки на некоторую величину $\delta_1 = |OO'|$. Будем считать, что деформации малы, т. е. угол $\angle OO'B_2 = \angle OO'B_3 = \beta$. Очевидно, что при этом перемещения боковых стержней связаны с перемещением центрального стержня выражением $\delta_2 = \delta_3 = |B_2O'| = |B_3O'| = \delta_1\cos\beta$,

или

$$\frac{X_2 l}{EA\cos\beta} = \frac{X_1 l}{EA}\cos\beta .$$

Решение этих уравнений дает

$$X_2 = \frac{F\cos^2\beta}{1+2\cos^3\beta}; \qquad X_1 = \frac{F}{1+2\cos^3\beta}.$$

Потенциальная энергия деформации. Рассмотрим стержень длиной l с постоянным поперечным сечением A, испытывающий чисто осевое нагружение силой F (рис. 2.2.9a). Внешняя сила совершает работу W_F, величина которой численно равна накопленной стержнем потенциальной энергии U. Работа внешней силы, в свою очередь, равняется площади под кривой, описывающей зависимость деформации от нагрузки. Поскольку в соответствии с законом Гука такая зависимость при отсутствии пластических деформаций линейна (рис. 2.2.9b), то для работы текущей силы F_m на элементарном перемещении стержня $d(\Delta l)$ имеем

$$dW_F = F_m d(\Delta l). \qquad (2.2.10)$$

Суммарная работа внешней силы F на упругом перемещении Δl (Δl — абсолютное удлинение стержня), вообще говоря, определяется интегрированием (2.2.10) по всем элементарным участкам, но в данном случае вследствие прямой

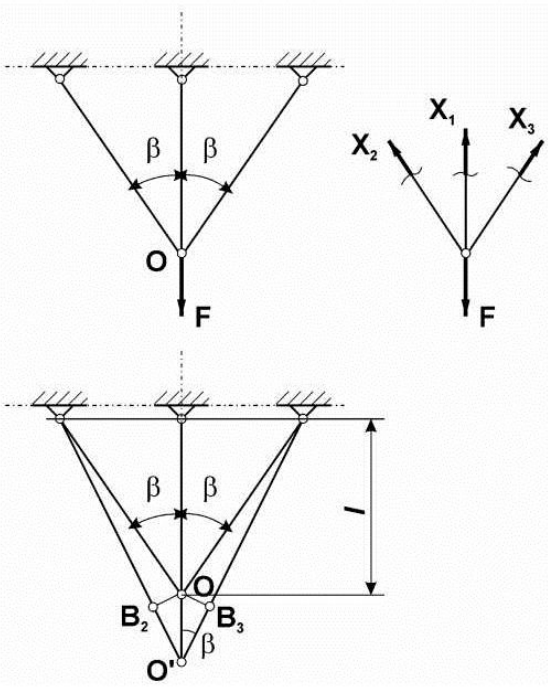
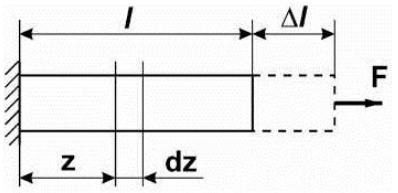
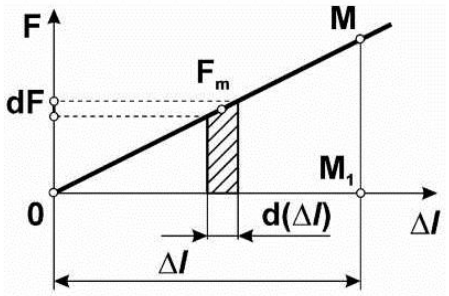


Рис. 2.2.8



a)



b)

Рис. 2.2.9

пропорциональности между силой и перемещением численно равна площади треугольника OM_1M :

$$W_F = U = \frac{1}{2} F\Delta l \,. \tag{2.2.11}$$

Отметим, что в дальнейшем при вычислении работы внешней силы в условиях упругого нагружения коэффициент $1/2$ будем ставить без подробных объяснений. Подставляя в (2.2.11) выражение для Δl из закона Гука (2.2.3), с учетом (2.2.1) получаем

$$U = \frac{F^2 l}{2EA}. \tag{2.2.12}$$

Если внутренняя сила N меняется вдоль стержня, то потенциальная энергия деформации равна

$$U = \int_0^l dU \,; \qquad dU = \frac{N^2 dz}{2EA}.$$

Конечный результат интегрирования зависит от конкретного вида зависимости $N = N(z)$.

Вариант нагружения, при котором нормальные силы F_x, F_y и F_z действуют в трех взаимно-перпендикулярных направлениях, называется *трехосным растяжением* (*сжатием*). Рассмотрим элемент объема в виде параллелепипеда $dV = dxdydz$, по граням которого действуют нормальные напряжения σ_x, σ_y и σ_z (рис. 2.2.10). Для того чтобы определить накопленную параллелепипедом энергию деформации, воспользуемся выражением (2.2.10). Если перемещения граней обозначить как $\Delta dx, \Delta dy$ и Δdz, то энергия dU элементарного объема может быть рассчитана по формуле

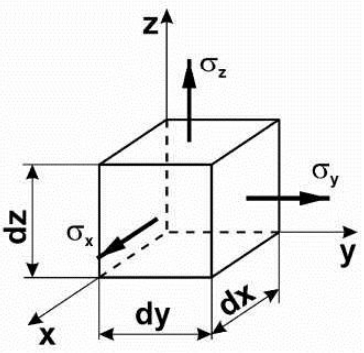


Рис. 2.2.10

$$dU = \frac{1}{2}(F_x \Delta dx + F_y \Delta dy + F_z \Delta dz),$$

или

$$dU = \frac{1}{2}(\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z) dxdydz \,. \tag{2.2.13}$$

Подстановка в (2.2.13) выражений для $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ и ε_z из (2.2.6) окончательно дает

$$dU = \frac{1}{2E}\left[\sigma_x^{\,2} + \sigma_y^{\,2} + \sigma_z^{\,2} - 2\mu(\sigma_x\sigma_y + \sigma_x\sigma_z + \sigma_y\sigma_z)\right] dxdydz \,. \tag{2.2.14}$$

Глава 2.3. Геометрические характеристики поперечных сечений

Для дальнейшего рассмотрения необходимо ввести некоторые геометрические характеристики плоских фигур, которые играют важную роль при выполнении расчетов на прочность при изгибе и кручении, а также при вычислении деформаций и т. д.

Статические моменты и моменты инерции плоских фигур. Если на поверхности плоской геометрической фигуры площади A выделить элементарную площадку dA (рис. 2.3.1), то можно определить *статические моменты* и *моменты инерции* этой фигуры относительно осей x и y.

1. Статический момент площади

Под статическим моментом площади относительно некоторой оси понимается сумма произведений площадей элементарных площадок на расстояния от центров их тяжести до соответствующей оси:

- статический момент площади относительно оси x

$$S_x = \int_A y dA;$$

- статический момент площади относительно оси y

$$S_y = \int_A x dA. \qquad (2.3.1)$$

Если известны статические моменты S_x и S_y относительно осей x и y, то можно рассчитать значения статических моментов S_{x0} и S_{y0} относительно осей x_0 и y_0, смещенных на расстояния b и a соответственно (рис. 2.3.2).

Координаты текущей точки в смещенной системе координат имеют вид

$$x_0 = x - a; \qquad y_0 = y - b.$$

По определению (2.3.1) статические моменты S_{x0} и S_{y0} равны

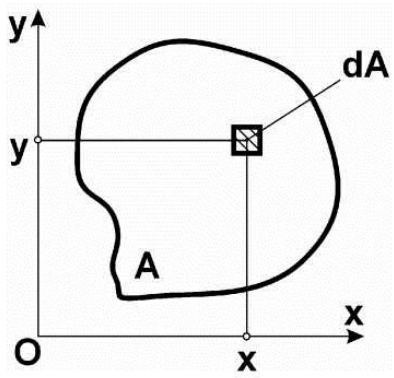


Рис. 2.3.1

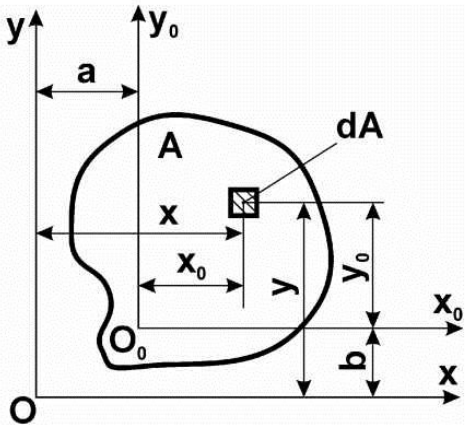


Рис. 2.3.2

$$\left.\begin{aligned} S_{x0} &= \int_A (y-b)\,dA = \int_A y\,dA - b\int_A dA = S_x - bA \\ S_{y0} &= \int_A (x-a)\,dA = \int_A x\,dA - a\int_A dA = S_y - a \end{aligned}\right\} \qquad (2.3.2)$$

Полученный результат (2.3.2) позволяет сформулировать следующее определение: статический момент площади фигуры относительно оси, смещенной параллельно исходной, равен разности статического момента относительно исходной оси и произведения площади этой фигуры на расстояние переноса.

Оси, проходящие через центр тяжести, называются *центральными*. Очевидно, что статические моменты площади фигуры относительно центральных осей равны нулю. Если координаты центра тяжести относительно некоторой произвольной системы координат обозначить через (x_c, y_c), то из равенства нулю статического момента имеем $y_c A = S_x$, $x_c A = S_y$, так что

$$y_c = \frac{S_x}{A}; \qquad x_c = \frac{S_y}{A}. \qquad (2.3.3)$$

2. Момент инерции площади

Моментом инерции площади относительно оси называется сумма произведений площадей элементарных площадок на квадрат расстояний от их центров тяжести до соответствующей оси. Тогда выражения для момента инерции относительно оси можно записать в виде:

- момент инерции площади относительно оси x

$$I_x = \int_A y^2 dA;$$

- момент инерции площади относительно оси y

$$I_y = \int_A x^2 dA. \qquad (2.3.4)$$

Под центробежным моментом площади сечения I_{xy} относительно осей x и y понимают момент инерции, равный

$$I_{xy} = \int_A xy dA. \qquad (2.3.5)$$

Момент инерции относительно начала координат называется *полярным моментом* и определяется по формуле

$$I_p = \int_A \rho^2 dA, \qquad (2.3.6)$$

где ρ — расстояние от начала координат до текущей точки. Так как $\rho^2 = x^2 + y^2$, то выражение (2.3.6) принимает вид

$$\int_A \rho^2 dA = \int_A y^2 dA + \int_A x^2 dA,$$

или, с учетом (2.3.4),

$$I_p = I_x + I_y. \qquad (2.3.7)$$

Таким образом, согласно (2.3.7) полярный момент инерции равен сумме осевых моментов инерции относительно взаимно перпендикулярных осей. При повороте осей полярный момент не меняется, следовательно, остается постоянной и сумма осевых моментов, т. е.

$$I_x + I_y = I_{x_1} + I_{y_1} = const.$$

Геометрические характеристики практически важных сечений. Рассчитаем моменты инерции некоторых наиболее часто встречающихся на практике сечений.

1. Моменты инерции относительно осей симметрии для *прямоугольника* со сторонами b и h находим, выделяя на расстоянии y элементарную прямоугольную площадку толщиной dy (рис. 2.3.3). Тогда

$$I_x = \int_A y^2 dA = 2\int_0^{h/2} y^2 b dy = \frac{bh^3}{12}; \qquad I_y = \frac{hb^3}{12}. \qquad (2.3.8)$$

2. Осевой момент для *круглого сечения* радиуса R (рис. 2.3.4) легко рассчитать через полярный, который, в свою очередь, находится аналогично рассмотренному выше случаю: выделяем на расстоянии ρ элементарное кольцо толщиной $d\rho$ с площадью $dA = 2\pi\rho d\rho$ и суммируем в соответствии с (2.3.6), что дает

$$I_p = \int_A \rho^2 dA = \int_0^R 2\pi\rho^3 d\rho = \frac{\pi R^4}{2} = \frac{\pi D^4}{32}.$$

Тогда, обозначив $R = D/2$, имеем

$$I_x = I_y = I_p/2 = \frac{\pi D^4}{64}. \qquad (2.3.9)$$

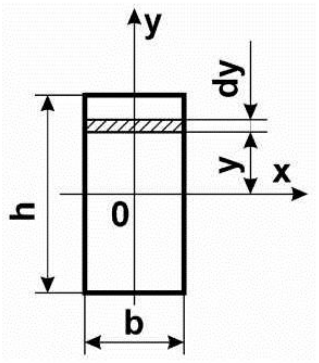


Рис. 2.3.3

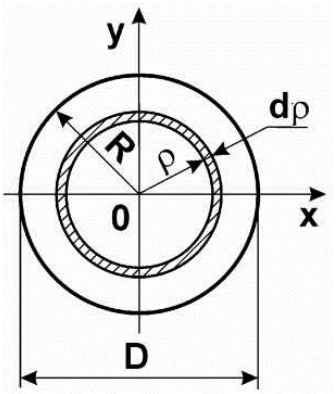


Рис. 2.3.4

Моменты инерции при преобразовании системы координат. Рассмотрим изменения моментов инерции при параллельном переносе осей и их повороте на угол α.

1. Если оси координат, проходящие через центр тяжести сечения (x_c, y_c), перемещаются параллельно, то координаты текущей точки в новой системе координат равны $x + x_c$ и $y + y_c$ (рис. 2.3.5). Тогда осевой момент I_x принимает вид

$$I_x = \int_A (y + y_c)^2 dA = \int_A y^2 dA + 2y_c \int_A y dA + y_c^2 \int_A dA. \qquad (2.3.10)$$

Так как в соответствии с определениями (2.3.1) и (2.3.4)

$$I_{x_c} = \int_A y^2 dA; \qquad S_{x_c} = \int_A y dA = 0; \qquad A = \int_A dA, \qquad (2.3.11)$$

то в результате из (2.3.10) с учетом (2.3.11) получаем

$$I_x = I_{x_c} + y_c^2 A. \qquad (2.3.12)$$

Аналогично для центробежного момента I_{xy} имеем

$$I_{xy} = \int_A (y + y_c)(x + x_c) dA = \int_A xy dA + x_c \int_A y dA + y_c \int_A x dA + x_c y_c \int_A dA. \qquad (2.3.13)$$

Поскольку

$$I_{x_c y_c} = \int_A xy dA; \qquad S_{y_c} = \int_A x dA = 0; \qquad S_{x_c} = \int_A y dA = 0,$$

то выражение (2.3.13) переписывается как

$$I_{xy} = I_{x_c y_c} + x_c y_c A. \qquad (2.3.14)$$

2. При повороте осей на угол α координаты произвольной точки в повернутой системе координат $X'Y'$ равны (рис. 2.3.6)

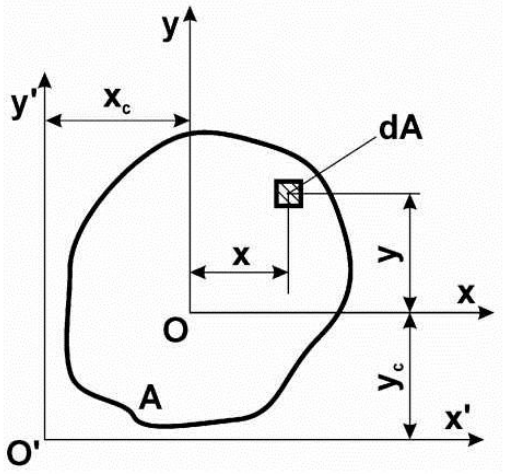


Рис. 2.3.5

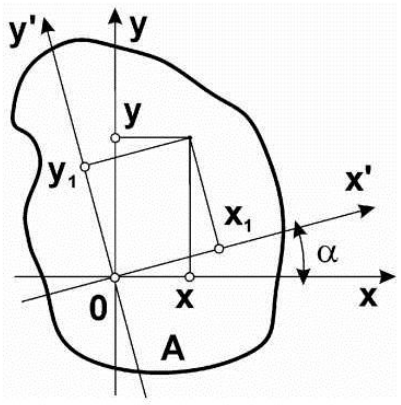


Рис. 2.3.6

$$x_1 = x\cos\alpha + y\sin\alpha\,; \qquad y_1 = y\cos\alpha - x\sin\alpha\,. \tag{2.3.15}$$

Угол α считается положительным, если поворот осей выполняется против часовой стрелки. Используя формулы преобразования координат (2.3.15), для осевого момента I_{x_1} запишем

$$I_{x_1} = \int_A (y\cos\alpha - x\sin\alpha)^2 dA = \cos^2\alpha \int_A y^2 dA + \sin^2\alpha \int_A x^2 dA - 2\sin\alpha\cos\alpha \int_A xy dA\,,$$

или

$$I_{x_1} = I_x \cos^2\alpha + I_y \sin^2\alpha - I_{xy}\sin 2\alpha\,. \tag{2.3.16}$$

По аналогии с (2.3.16) имеем

$$I_{y_1} = I_x \sin^2\alpha + I_y \cos^2\alpha + I_{xy}\sin 2\alpha\,. \tag{2.3.17}$$

Для практических расчетов вместо (2.3.16) — (2.3.17) удобнее использовать иную форму записи, которая получается при проведении тождественных тригонометрических преобразований с помощью формул $\cos^2\alpha = (1+\cos 2\alpha)/2$, $\sin^2\alpha = (1-\cos 2\alpha)/2$:

$$\left.\begin{aligned} I_{x_1} &= \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2}\cos 2\alpha - I_{xy}\sin 2\alpha \\ I_{y_1} &= \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{I_x - I_y}{2}\cos 2\alpha + I_{xy}\sin 2\alpha \end{aligned}\right\}. \tag{2.3.18}$$

Аналогично для центробежного момента $I_{x_1 y_1}$ можно написать

$$\left.\begin{aligned} I_{x_1 y_1} &= \int_A (x\cos\alpha + y\sin\alpha)(y\cos\alpha - x\sin\alpha)dA \\ I_{x_1 y_1} &= \frac{I_x - I_y}{2}\sin 2\alpha + I_{xy}\cos 2\alpha \end{aligned}\right\}. \tag{2.3.19}$$

Главными назовем оси, в направлении которых центробежный момент равен нулю. Приравнивая нулю правую часть выражения (2.3.19), можно определить угол наклона главных осей α_0:

$$tg2\alpha_0 = \frac{2I_{xy}}{I_y - I_x}\,. \tag{2.3.20}$$

В результате решения трансцендентного уравнения (2.3.20) получаем два значения угла с разницей в $\pi/2$, следовательно, главных осей две, и они взаимно перпендикулярны.

Можно найти угол поворота осей, при котором осевой момент инерции I_{x_1} максимален, для чего необходимо приравнять нулю производную от этого момента:

$$\frac{dI_{x_1}}{d\alpha} = (I_y - I_x)\sin 2\alpha - 2I_{xy}\cos 2\alpha = 0. \qquad (2.3.21)$$

Оказывается, что результаты решения уравнений (2.3.20) и (2.3.21) совпадают. Таким образом, главными можно считать такие оси, относительно которых осевые моменты инерции достигают экстремальных (максимального и минимального) значений.

Моменты инерции относительно главных осей называются *главными моментами инерции*. Определим значения этих моментов. Обозначим через I_0 экстремальное значение осевого момента инерции I_{x_1} и запишем (2.3.18) в виде

$$I_0 = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2}\cos 2\alpha_0 - I_{xy}\sin 2\alpha_0. \qquad (2.3.22)$$

Подставляя в (2.3.22) значение центробежного момента I_{xy} из (2.3.20), получаем

$$I_0 = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2}\frac{1}{\cos 2\alpha_0}. \qquad (2.3.23)$$

Далее воспользуемся известной из тригонометрии формулой $\frac{1}{\cos 2\alpha_0} = \pm\sqrt{1 + tg^2 2\alpha_0}$, которая с учетом (2.3.20) записывается как

$$\frac{1}{\cos 2\alpha_0} = \pm\frac{1}{I_x - I_y}\sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2}.$$

Тогда согласно (2.3.23) окончательное выражение для определения экстремальных значений $I_{\max}$ и момента инерции I_{x_1} приобретает вид:

$$\left.\begin{aligned} I_{\max} &= \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2} \\ I_{\min} &= \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2} \end{aligned}\right\}. \qquad (2.3.24)$$

Глава 2.4. **Сдвиг и кручение**

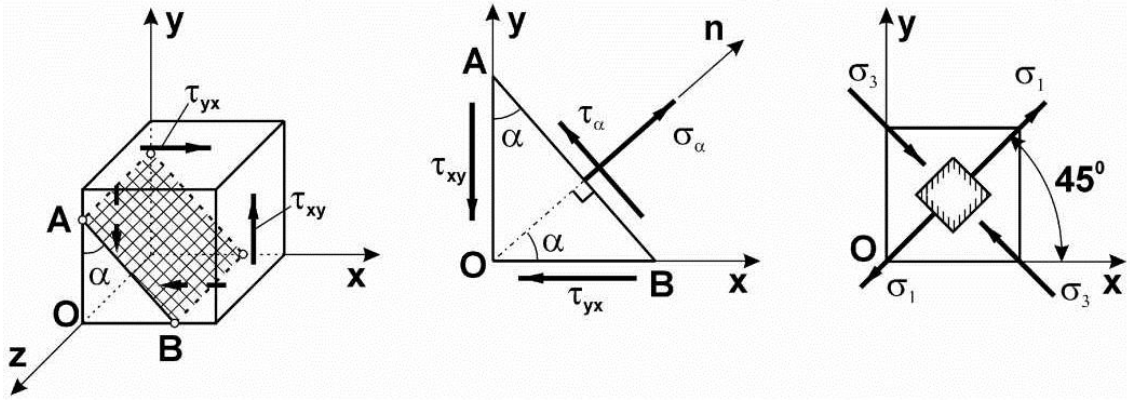
Сдвиг. Сдвигом называется вид нагружения, при котором в поперечных сечениях действует только поперечная сила, приводящая к сдвигу частей тела друг относительно друга вдоль линии действия этой силы. Такая перерезывающая сила может быть, например, результирующей двух одинаковых по величине и противоположных по направлению бесконечно близко расположенных сил, которые вызывают срез тела по сечению, находящемуся между ними. Если при этом на гранях выделенного элементарного объема (параллелепипеда) возникают только касательные напряжения τ, то такое напряженное состояние называется *чистым сдвигом*. В этом состоянии длины ребер элементарного параллелепипеда остаются неизменными, а углы между первоначально прямыми боковыми гранями меняются на угол γ, называемый *относительным сдвигом*.

Эксперименты, проведенные на брусьях с различными поперечными сечениями, показали наличие линейной зависимости касательных напряжений сдвига τ от угла поворота γ. Такая зависимость справедлива при отсутствии пластических деформаций и может быть интерпретирована как закон Гука, записанный для случая сдвига:

$$\tau = G\gamma . \qquad (2.4.1)$$

Здесь G — модуль сдвига, или модуль упругости кручения, который, как будет показано ниже, связан с модулями упругости E и μ.

Рассмотрим испытывающий чистый сдвиг элемент в виде вырезанной из пластины трехгранной призмы (рис. 2.4.1a). На гранях призмы действуют напряжения, которые можно разложить на две составляющие: нормальную к грани — *нормальное* напряжение и касательную — *касательное*. В свою очередь, касательное напряжение тоже можно разложить на две составляющие, параллельные координат-



a) b) c)

Рис. 2.4.1

ным осям. В результате на каждой грани действуют по три напряжения, для обозначения которых используется два индекса. Первый индекс указывает ось, вдоль которой направлена внешняя нормаль к площадке, а второй — ось, параллельно которой направлен вектор напряжения. Так как в обозначениях нормальных напряжений присутствуют два одинаковых индекса, обычно оставляют один из них.

Определим нормальное σ_α и касательное τ_α напряжения, действующие на площадке, нормаль к которой составляет угол α с осью OX (рис. 2.4.1b). Если площадь этой площадки обозначить через A_α, то площадь ее проекции на направление оси x равна $A_\alpha \sin\alpha$, а на перпендикулярное направление — $A_\alpha \cos\alpha$. Спроецировав все силы на направление нормали к наклонной площадке (рис. 2.4.1b), из условия равновесия получаем

$$\sigma_\alpha A - \tau_{xy} A\cos\alpha \sin\alpha - \tau_{xy} A \sin\alpha \cos\alpha = 0,$$

или

$$\sigma_\alpha = \tau_{xy} \sin 2\alpha . \qquad (2.4.2)$$

При проецировании на ось, перпендикулярную к направлению нормали, имеем

$$\tau_\alpha A - \tau_{xy} A\cos^2\alpha + \tau_{xy} A \sin^2\alpha = 0,$$

откуда

$$\tau_\alpha = \tau_{xy} \cos 2\alpha . \qquad (2.4.3)$$

Из (2.4.3) видно, что касательные напряжения на площадках, наклоненных под углом $\pi/4$, равны нулю. Таким образом, этот угол определяет положение главных площадок. Как отмечено в главе 2.2, напряжения главных площадок называются главными. Обозначим их по мере убывания как σ_1, σ_2 и σ_3 (рис. 2.4.1c). Эти напряжения взаимно перпендикулярны и для нашего случая равны

$$\sigma_1 = \tau_{xy};\ \ \sigma_2 = 0;\ \ \sigma_3 = -\tau_{xy}. \qquad (2.4.4)$$

Из (2.4.4) следует, что чистый сдвиг представляет собой такое напряженное состояние, при котором первое и третье главные напряжения равны по величине, но противоположны по знаку, а второе главное напряжение равняется нулю.

Записывая закон Гука (2.4.1) применительно к условиям чистого сдвига, можно вычислить модуль сдвига G. Для этого рассмотрим деформацию квадратного элемента со стороной a при чистом сдвиге (рис. 2.4.2). Очевидно, что касательные напряжения вызовут перемещение его верхней грани на величину ΔS. Если угловое смещение обозначить через γ_{yz}, то для малых угловых деформаций имеем

$$\Delta S = a\gamma_{yz} . \qquad (2.4.5)$$

Из геометрических соображений ясно, что $\Delta S = \dfrac{A''A'}{\cos\dfrac{\pi}{4}} = \sqrt{2}\Delta l_{OA}$, или, с учетом (2.4.5),

$$a\gamma_{yz} = \sqrt{2}\Delta l_{OA} . \qquad (2.4.6)$$

Относительное удлинение ε_{OA} отрезка OA согласно (2.2.1) и рис. 2.4.2 связано с абсолютным удлинением Δl_{OA} соотношением

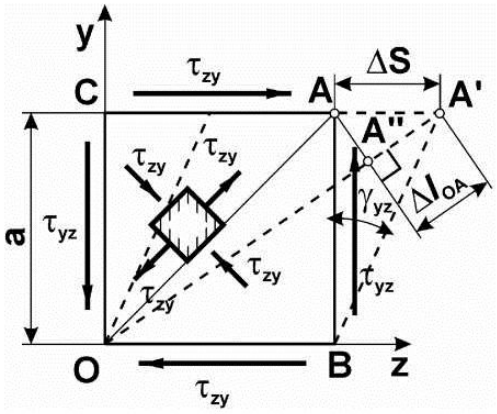


Рис. 2.4.2

$\varepsilon_{OA} = \dfrac{\Delta l_{OA}}{l_{OA}} = \dfrac{\Delta l_{OA}}{\sqrt{2}a}$, так что $\Delta l_{OA} = \sqrt{2}\varepsilon_{OA} a$. Тогда угловое смещение γ_{yz} с помощью (2.4.6) вычисляется как

$$\gamma_{yz} = 2\varepsilon_{OA}. \tag{2.4.7}$$

Для того чтобы определить относительное удлинение ε_{OA}, необходимо рассмотреть элементарную площадку, две грани которой параллельны OA, т. е. главную площадку, на гранях которой будут действовать только нормальные напряжения. Относительное удлинение в случае нормального нагружения в соответствии с обобщенным законом Гука (2.2.6) имеет вид

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \mu\left(\frac{\sigma_y}{E} + \frac{\sigma_x}{E}\right),$$

а применительно к нашему случаю можно записать

$$\varepsilon_z = \varepsilon_{OA};\ \ \sigma_z = \sigma_1 = \tau_{yz};\ \ \sigma_y = \sigma_3 = -\tau_{yz};\ \ \sigma_x = \sigma_2 = 0. \tag{2.4.8}$$

С учетом (2.4.8) выражение (2.2.6) для относительной деформации переписывается как

$$\varepsilon_{OA} = \frac{1+\mu}{E}\tau_{yz}. \tag{2.4.9}$$

Подставляя (2.4.9) в (2.4.7), после несложных преобразований получаем формулу для расчета касательных напряжений

$$\tau_{yz} = \frac{E}{2(1+\mu)}\gamma_{yz}. \tag{2.4.10}$$

Сравнивая (2.4.10) с законом Гука для случая сдвига (2.4.1), находим

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}, \tag{2.4.11}$$

а (2.4.10) преобразуется к виду

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy};\quad \tau_{yz} = G\gamma_{yz};\quad \tau_{zx} = G\gamma_{zx}. \tag{2.4.12}$$

Таким образом, на основании проведенного расчета можно сделать вывод о том, что с целью получения общих зависимостей закон Гука (2.2.6), сформулированный для чистого растяжения (сжатия), следует дополнить описывающими чистый сдвиг зависимостями (2.4.12), в которых модуль упругости G связан с модулем упругости E и коэффициентом Пуассона μ соотношением (2.4.11).

Кручение. Кручением называется такой вид деформации, при котором в поперечных сечениях бруса возникает только крутящий момент M_t, а остальные силовые факторы (нормальная и поперечная силы и изгибающий момент) равны

нулю. Кручение элемента конструкции происходит при нагружении его внешними моментами вращения (парами сил) T, плоскости действия которых нормальны по отношению к продольной оси этого элемента.

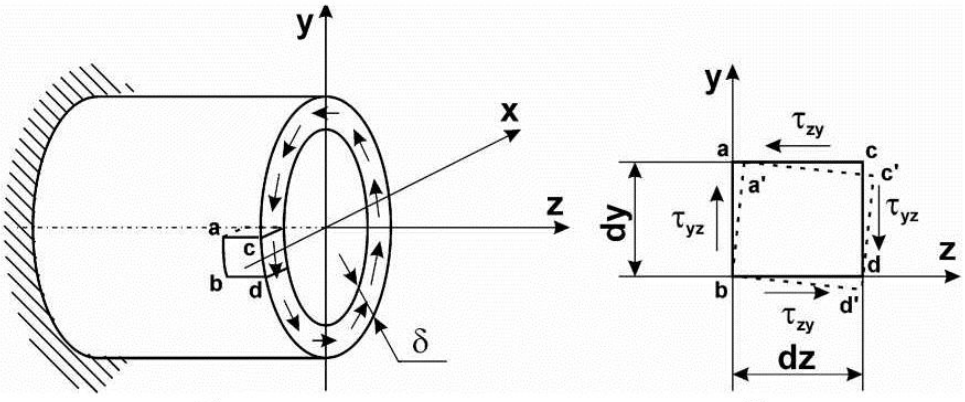
Для определения крутящего момента в заданном сечении применяется метод сечений (глава 2.1), с помощью которого легко установить общее правило: величина внутреннего крутящего момента в любом сечении бруса произвольной поперечной конфигурации равна алгебраической сумме внешних моментов вращения T, лежащих по одну сторону от рассматриваемого сечения. В связи с этим возникает необходимость определиться со знаками моментов. Принято считать, что если крутящий момент направлен против часовой стрелки относительно конца внешней к сечению нормали, то он положителен.

Расчет бруса на кручение заключается в нахождении возникающих в нем напряжений и угловых перемещений в зависимости от приложенных силовых факторов. При этом решение задачи кручения в значительной степени зависит от формы поперечного сечения бруса. Строго говоря, аналитический расчет бруса на кручение может быть проведен только для небольшого класса относительно простых поперечных сечений, в общем же случае требуется привлечение численных методов.

Кручение брусьев круглого поперечного сечения. Под *круглым* будем понимать сечение, внешняя и внутренняя границы которого являются концентрическими окружностями.

Теория кручения брусьев круглого поперечного сечения основывается на следующих предположениях: поперечные сечения бруса, которые были плоскими до закручивания, остаются таковыми и после (гипотеза плоских сечений); каждое из сечений лишь поворачивается в своей плоскости на некоторый угол как единое целое, причем углы поворота для различных сечений будут различными; а радиусы поперечных сечений при деформации не искривляются и не изменяют длину.

Рассмотрим брус в виде трубы круглого поперечного сечения толщиной δ (рис. 2.4.3a), жестко заделанный одним концом и нагруженный моментом вращения T на другом. Действие момента вращения приводит к закручиванию бруса по длине на угол γ. Вырежем мысленно элемент бруса abdc. Возникающие при этом в сечении касательные напряжения τ можно считать равномерно распределенными по его поверхности. На рис. 2.4.3b приведена картина касательных напряжений, действующих на гранях выделенного элемента abdc (первый индекс в обозначении



a) b)

Рис. 2.4.3

напряжений указывает на направление оси действия вектора напряжения). Так как выделенный элемент находится в равновесии, то сумма моментов сил относительно начала координат должна равняться нулю, а именно

$$\tau_{zy}\delta\, dzdy - \tau_{yz}\delta\, dzdy = 0. \qquad (2.4.13)$$

Из (2.4.13) следует, что

$$\tau_{zy} = \tau_{yz} = \tau. \qquad (2.4.14)$$

Полученное выражение (2.4.14) говорит о том, что возникающие на взаимно перпендикулярных площадках касательные напряжения равны между собой по величине и направлены таким образом, что вызывают появление моментов противоположных знаков. Это простое правило получило название *закона парности касательных напряжений.*

Проведя два поперечных сечения, выделим из трубы с внешним радиусом r участок длиной dz. Угол закручивания поперечного сечения обозначим через $d\varphi$ (рис. 2.4.4). При приложении момента вращения точка b переместится в положение b'. Тогда из геометрических соображений получаем

$$\gamma dz = rd\varphi. \qquad (2.4.15)$$

Вводя в рассмотрение относительный угол закручивания единицы длины θ, равный $\theta = \dfrac{d\varphi}{dz}$, из (2.4.15) имеем

$$\theta = \gamma / r. \qquad (2.4.16)$$

На рис. 2.4.5 изображена кривая зависимости напряжения сдвига от угла относительного сдвига γ, построенная для случая испытания упруго-пластичных материалов. Здесь на начальном участке нагружения, также как и при растяжении, сохраняется линейная зависимость. Точка A называется пределом пропорциональности. Координата точки B по вертикали соответствует *пределу текучести*; затем следует участок резкого возрастания пластических деформаций, приводящих к разрушению, характер которого аналогичен *срезу*. Величину предела текучести при кручении обозначим (по аналогии с растяжением) как τ_r, а величину предела прочности — как τ_b.

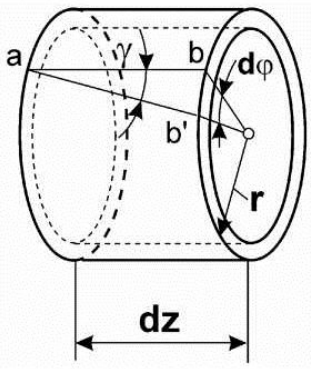


Рис. 2.4.4

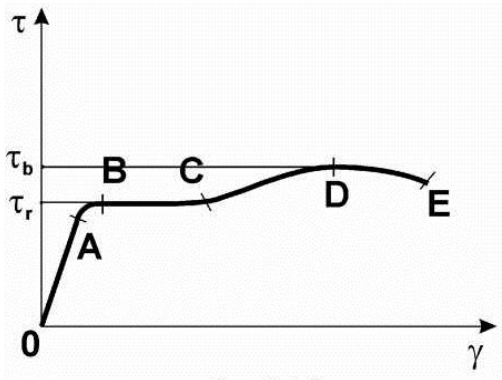


Рис. 2.4.5

Расчет прочности круглого сплошного бруса. Рассмотрим брус круглого поперечного сечения радиуса r (рис. 2.4.6), который закручивается внешним моментом T. Двумя концентрическими поверхностями с радиусами ρ и $\rho + d\rho$ выделим из бруса элементарное кольцо. Касательные напряжения, действующие на этой площадке, обозначим через τ_ρ. Тогда элементарный крутящий момент dM_t равен

$$dM_t = \tau_\rho 2\pi\rho^2 d\rho . \qquad (2.4.17)$$

Интегрируя (2.4.17) по радиусу в пределах от 0 до r, получаем значение крутящего момента внутренних сил, уравновешенного внешним моментом вращения:

$$M_t = \int_0^r \tau_\rho 2\pi\rho^2 d\rho . \qquad (2.4.18)$$

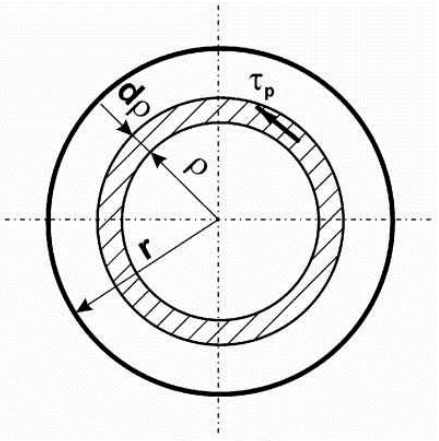


Рис. 2.4.6

Для дальнейших вычислений необходимо заметить, что из закона Гука (2.4.1) и определения относительного угла закручивания (2.4.16) следует линейная зависимость касательных напряжений τ_ρ от расстояния до центра круга, а именно

$$\frac{\tau_\rho}{\rho} = \frac{\tau_{\max}}{r} = \frac{\tau_{\max}}{\rho_{\max}} , \qquad (2.4.19)$$

где $\rho_{\max} = r$ — расстояние от центра до наиболее удаленной точки поперечного сечения, а $\tau_{\max}$ — наибольшее значение касательных напряжений. Тогда при подстановке (2.4.19) в (2.4.18) получаем

$$M_t = \frac{\tau_{\max}}{r} \int_0^r 2\pi\rho^3 d\rho . \qquad (2.4.20)$$

Подынтегральное выражение в правой части (2.4.20) может быть записано в виде суммы произведений площади каждой из элементарных площадок на квадрат расстояния от ее центра тяжести до оси:

$$\int_0^r 2\pi\rho^3 d\rho = \int_A \rho^2 dA , \qquad (2.4.21)$$

где A — площадь поперечного сечения рассматриваемого бруса.

Согласно (2.3.6) правая часть соотношения (2.4.21) представляет собой полярный момент инерции I_p, который играет важную роль в расчетах на прочность. С учетом этого обстоятельства формула (2.4.20) принимает вид

$$M_t = \frac{\tau_{\max}}{r} I_p . \qquad (2.4.22)$$

Если ввести в рассмотрение понятие полярного момента сопротивления W_p, равного

$$W_p = \frac{I_p}{r} = \frac{I_p}{\rho_{\max}}, \tag{2.4.23}$$

то наибольшее значение касательного напряжения $\tau_{\max}$ согласно (2.4.22) и (2.4.23) можно определить как

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{W_p} = \frac{M_t \rho_{\max}}{I_p} = \frac{M_t\, r}{I_p}. \tag{2.4.24}$$

Попутно с помощью (2.4.5) и (2.4.24) можно записать выражение для относительного угла закручивания θ:

$$\theta = \frac{\gamma}{\rho_{\max}} = \frac{\tau_{\max}}{G\rho_{\max}} = \frac{M_t}{GI_p}. \tag{2.4.25}$$

Зная величину наибольшего касательного напряжения $\tau_{\max}$, легко записать ***условие прочности*** для случая чистого сдвига:

$$\tau_{\max} \le \tau_a, \tag{2.4.26}$$

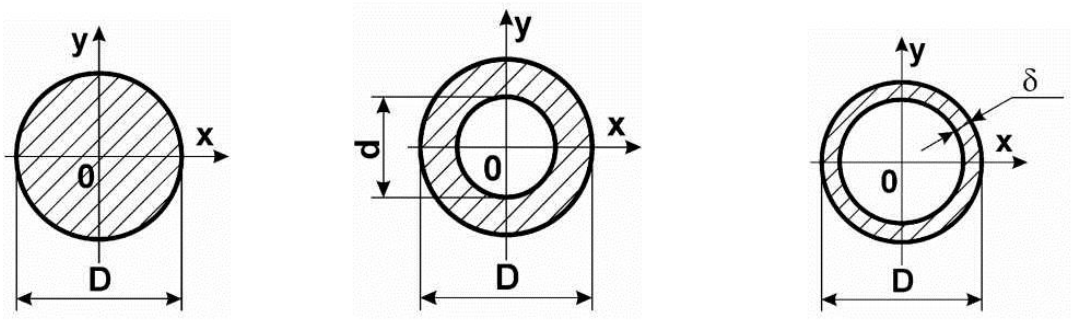
где τ_a — допускаемое касательное напряжение. Значение этого напряжения может быть выражено через нормальное главное напряжение, подсчитанное в соответствии с одной из гипотез прочности (см. главу 2.7).

В заключение приведем выражения для полярных моментов сопротивления и инерции практически важных сечений (рис. 2.4.7a—c).

1. Круг сплошного поперечного сечения диаметром D (рис. 2.4.7a):

$$W_p = \frac{\pi D^3}{16}; \qquad I_p = \frac{\pi D^4}{32}. \tag{2.4.27}$$

2. Круглое поперечное сечение диаметра D с отверстием диаметром d (рис. 2.4.7b):



a) b) c)

Рис. 2.4.7

$$W_p = \frac{\pi D^3}{16}\left[1-\left(\frac{d}{D}\right)^4\right]; \qquad I_p = \frac{\pi\left(D^4 - d^4\right)}{32}. \tag{2.4.28}$$

3. Тонкостенный цилиндр толщиной δ и диаметром D (рис. 2.4.7с):

$$W_p = \frac{\pi D^2 \delta}{2}; \quad I_p = \frac{\pi D^3 \delta}{4}. \tag{2.4.29}$$

Напомним, что согласно (2.3.9) для произвольных круглых сечений имеет место равенство

$$I_x = I_p / 2; \quad W_x = W_p / 2.$$

Кручение круглых брусьев переменного поперечного сечения при произвольном нагружении и закреплении. Для расчета напряженно — деформированного состояния бруса переменного круглого сечения необходимо знать величины крутящих моментов в каждом его сечении, т. е. построить эпюры этих моментов аналогично тому, как это было сделано в случае центрального растяжения (сжатия).

В качестве примера рассмотрим нагружение ступенчатого вала переменного круглого поперечного сечения группой моментов вращения. На рис. 2.4.8 изображены эпюры крутящих моментов и наибольших касательных напряжений, построенные методом сечений (отметим, что поддерживающие вал опоры не оказывают влияния на характер и величины моментов кручения). По известному закону распределения моментов и геометрическим размерам вала легко рассчитать углы закручивания и их изменение по длине вала.

Задача построения эпюр крутящих моментов несколько усложняется, когда нагруженная конструкция является статически неопределимой. Примером такого случая нагружения является жестко закрепленный на обоих концах брус круглого поперечного сечения (рис. 2.4.9). Для того чтобы рассчитать напряженное состоя-

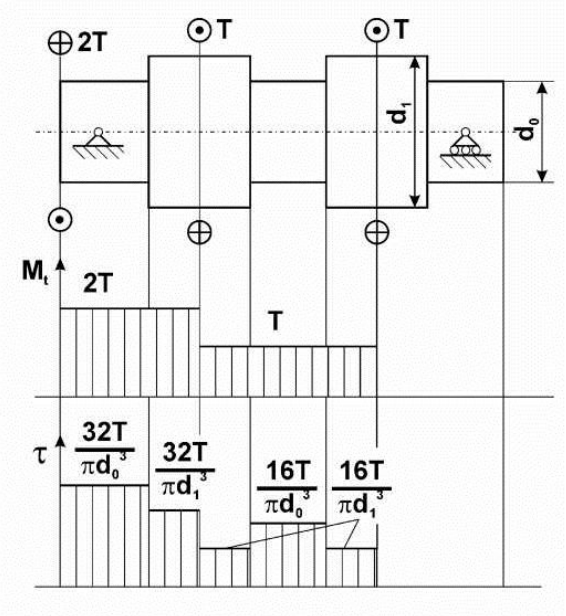


Рис. 2.4.8

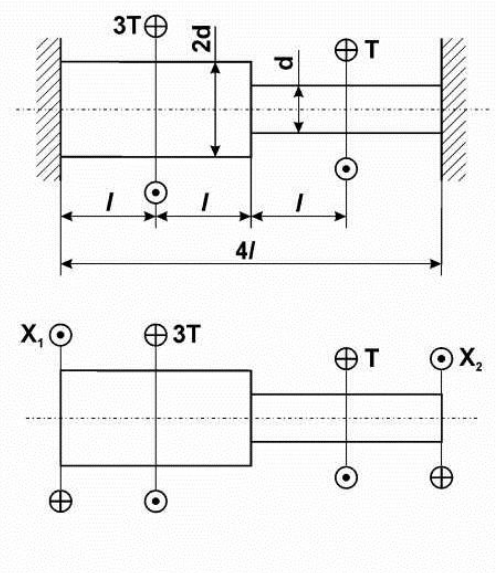


Рис. 2.4.9

ние бруса, необходимо определить реактивные моменты X_1 и X_2, возникающие в жестких заделках. В качестве первого уравнения, как обычно, выступает уравнение равновесия, а именно

$$3T + T - X_1 - X_2 = 0.$$

Второе уравнение представляет собой условие совместности деформаций, которое отражает тот факт, что поворот сечения в заделке отсутствует:

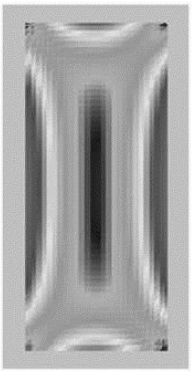
$$\frac{X_1 l}{GI_{p1}} + \frac{(X_1 - 3T)l}{GI_{p1}} + \frac{(X_1 - 3T)l}{GI_{p2}} + \frac{(X_1 - 4T)l}{GI_{p2}} = 0.$$

Учитывая, что полярные моменты инерции сечений рассматриваемого бруса связаны, согласно (2.4.27), соотношением $I_{p1} = 16I_{p2}$, окончательно из уравнений равновесия и совместности деформаций получаем

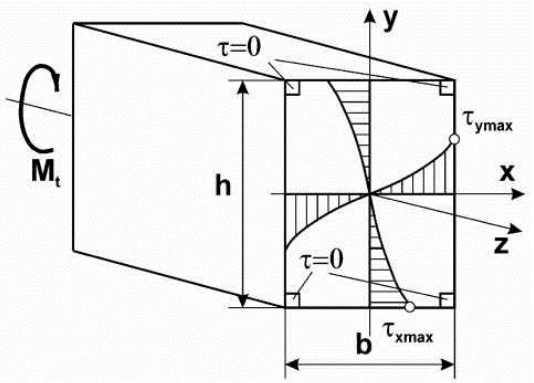
$$X_1 = \frac{115}{34}T; \qquad X_2 = \frac{21}{34}T.$$

Кручение брусьев произвольной геометрической формы. Механизм кручения сильно усложняется, если поперечное сечение не является круглым. Описанные выше методы расчета не могут быть применены к решению задач кручения брусьев произвольной формы. Так, гипотеза плоских сечений, согласно которой сечения после деформации остаются плоскими, в случае кручения брусьев некруглого поперечного сечения оказывается неприменимой, поскольку на самом деле эти сечения искривляются — возникает так называемое явление *депланации*. Для депланации характерно то, что одни волокна бруса удлиняются, в то время как другие — укорачиваются.

Возникающие трудности при корректном описании кручения брусьев произвольной геометрической формы приводит к тому, что аналитические решения получены применительно к ограниченному классу задач и носят частный характер. Только численные методы, такие как метод конечных разностей, метод конечных элементов (МКЭ) и другие, могут быть эффективно использованы для расчета кручения любых по сложности поперечных сечений. Наиболее распространенным из них является МКЭ. С его помощью, например, выполнен расчет касательных напряжений для прямоугольного поперечного сечения (рис. 2.4.10a).



a)



b)

Рис. 2.4.10

Задача расчета напряжений при кручении прямоугольного сечения является крайне важной, поэтому приведем здесь некоторые результаты ее решения, полученные методами теории упругости.

Рассмотрим сечение в форме прямоугольника со сторонами b и h, $b < h$ (рис. 2.4.10а). Можно показать, что наибольшие касательные напряжения возникают в серединах длинных сторон прямоугольника. По абсолютной величине эти напряжения равны

$$\tau_{y\max} = \frac{M_t}{W_t}, \tag{2.4.30}$$

где $W_t = \alpha h b^2$ — момент сопротивления прямоугольника кручению, α — некоторая константа, зависящая от геометрии задачи (см. далее).

Напряжения в серединах коротких сторон находятся по формуле

$$\tau_{x\max} = \chi \tau_{y\max}. \tag{2.4.31}$$

Подчеркнем, что здесь изменение касательных напряжений по сечению имеет нелинейный характер.

Относительный угол закручивания согласно (2.4.25) может быть записан как

$$\theta = \frac{M_t}{GI_t}, \tag{2.4.32}$$

где I_t — момент инерции прямоугольника при кручении, $I_t = \beta h b^3$.

Числовые коэффициенты α, β и χ зависят только от отношения сторон прямоугольника h/b (таблица 2.4.1).

Таблица 2.4.1. **Коэффициенты α, β и χ**

h/b	1	2	3	4	6	8	10	∞
α	0,208	0,246	0,267	0,282	0,299	0,307	0,313	1/3
β	0,140	0,229	0,263	0,281	0,299	0,307	0,313	1/3
η	1,000	0,795	0,753	0,745	0,743	0,742	0,742	0,742

Полученные численные и аналитические результаты позволили установить аналогию между характерами распределения касательных напряжений и скоростей потока жидкости, циркулирующего внутри контура, ограничивающего сечение. Такая аналогия получила название *гидродинамической*. Согласно этой аналогии линии равных касательных напряжений *(изолинии)* при кручении бруса некруглого поперечного сечения совпадают с изолиниями скоростей циркулирующего потока жидкости. Особенно удобно использовать гидродинамическую аналогию для расчета контуров малой толщины (рис. 2.4.11). Как следует из полученных результатов, касательные напряжения параллельны контуру поперечного сечения. Это можно доказать строго, не прибегая к методам конечно-элементного анализа.

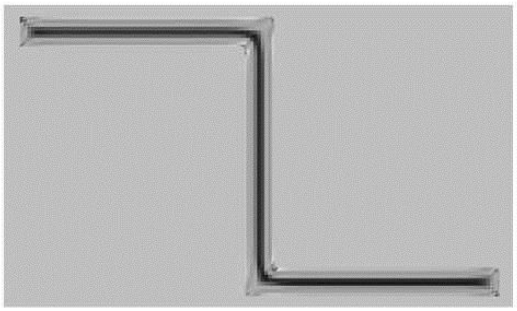


Рис. 2.4.11

Наибольший практический интерес представляет случай бесконечно узкого прямоугольника, $b << h$. При этом, как следует из таблицы 2.4.1,

$$\tau_{y\max} = \frac{3M_t}{hb^2}; \quad \theta = \frac{3M_t}{Ghb^3}. \quad (2.4.33)$$

В качестве примера приведем результаты выполненного с помощью МКЭ расчета касательных напряжений в сечении, состоящем из одного контура толщиной δ, нагруженного внешним моментом вращения T (рис. 2.4.11). Этот контур можно рассматривать как совокупность тонких прямоугольников толщины δ, каждый из которых, как показывает анализ, действует независимо друг от друга. Поэтому формула для расчета касательных напряжений (2.4.33) остается справедливой, если сделать замену $b = \delta$, $h = l$, где $l = h_1 + h_2 + h_3$ — сумма длин прямоугольников:

$$\tau_{y\max} = \frac{3M_t}{l\delta^2}; \quad \theta = \frac{3M_t}{Gl\delta^3}. \quad (2.4.34)$$

Схематически расчетная модель представлена на рис. 2.4.12.

Если сечение состоит из двух и более контуров (например, на рис. 2.4.13 изображено сечение, состоящее из трех контуров), то задача становится статически неопределимой. Для нахождения моментов каждого из контуров следует записать уравнение совместности деформаций. Пусть M_{ti} — крутящий момент, воспринимаемый i-м контуром. Тогда уравнение равновесия для поперечного сечения, состоящего из n контуров, записывается как

$$M_t = \sum_{i=1}^{n} M_{ti}. \quad (2.4.35)$$

Уравнение совместности деформаций представляет собой равенство углов закручивания каждого из контуров, составляющих поперечное сечение. При этом

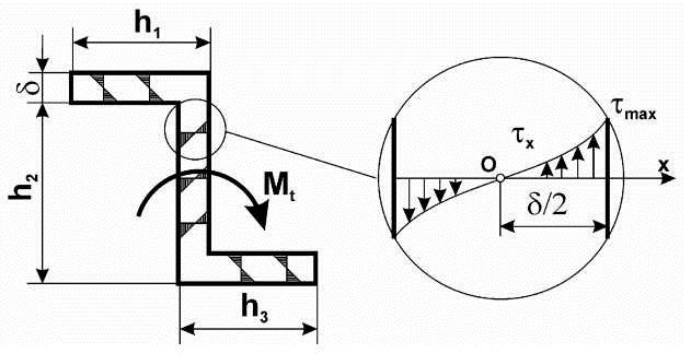


Рис. 2.4.12

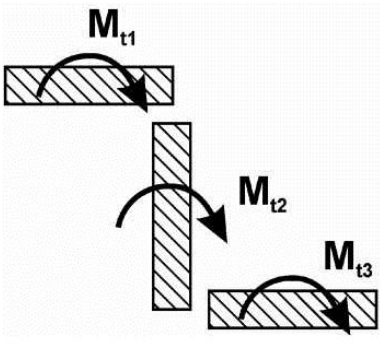


Рис. 2.4.13

можно утверждать, что относительный угол закручивания θ_i для каждого из контуров есть величина постоянная. Тогда

$$\theta = \theta_1 = \theta_2 = ... = \theta_i = \frac{M_{t1}}{GI_{t1}} = \frac{M_{t2}}{GI_{t2}} = ... = \frac{M_{ti}}{GI_{ti}}. \qquad (2.4.36)$$

С учетом уравнения совместности деформаций (2.4.36) и уравнения равновесия (2.4.35) имеем

$$M_t = \theta G \sum_{i=1}^{n} I_{ti}. \qquad (2.4.37)$$

Выражая из (2.4.37) значение θ и сравнивая его с (2.4.36), находим

$$M_{ti} = \frac{M_t I_{ti}}{\sum_{i=1}^{n} I_{ti}}. \qquad (2.4.38)$$

Наибольшие касательные напряжения внутри контура, как следует из (2.4.30), (2.4.34) и (2.4.38) с учетом того, что в принятой модели $I_{ti} / W_{ti} = \delta_i$, равны

$$\tau_{i\max} = \frac{M_t I_{ti}}{W_{ti} \sum_{i=1}^{n} I_{ti}} = \frac{M_t \delta_i}{\frac{1}{3} \sum_{i=1}^{n} l_i \delta_i^3}. \qquad (2.4.39)$$

Практический интерес представляет случай, при котором толщина каждого из контуров одинакова и равна δ, тогда из (2.4.39) получаем

$$\tau_{i\max} = \frac{3M_t}{\delta^2 \sum_{i=1}^{n} l_i}. \qquad (2.4.40)$$

Необходимо отметить, что рассмотренный выше метод решения задачи кручения тонкостенного незамкнутого профиля в чистом виде использовать для замкнутого контура нельзя, поскольку характер распределения касательных напряжений в этом случае принципиально другой. В замкнутом контуре касательные напряжения можно считать постоянными по толщине и направленными по касательной к средней линии контура сечения.

Вырежем из замкнутого контура элемент размером dz и рассмотрим его равновесие (рис. 2.4.14). Поскольку сумма проекций сил в направлении оси z должна быть равна нулю, то

$$\tau_2 \delta_2 dz - \tau_1 \delta_1 dz = 0,$$

откуда

$$\tau_2 \delta_2 = \tau_1 \delta_1 = \tau\delta = const.$$

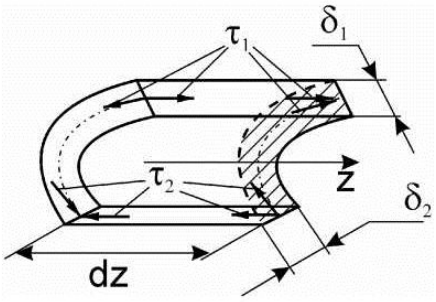


Рис. 2.4.14

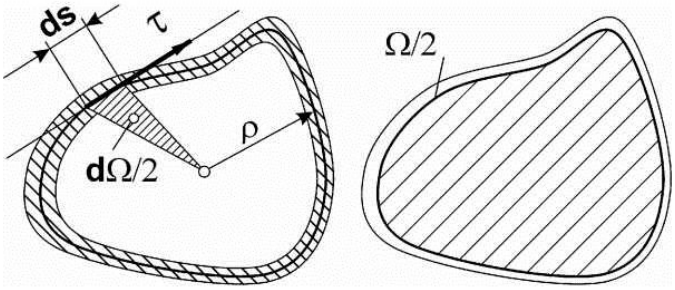


Рис. 2.4.15

Так как внешний момент вращения должен быть уравновешен суммой моментов от распределенных по контуру касательных напряжений, то можно написать

$$T \equiv M_t = \oint \tau \delta \rho ds \,, \tag{2.4.41}$$

где ρ — расстояние от центра тяжести фигуры до текущего участка профиля. Произведение $\rho\, ds$ в подинтегральном выражении представляет собой удвоенную площадь треугольника (рис. 2.4.15), так что $\Omega = \oint \rho ds$ — удвоенная площадь фигуры, ограниченной контуром сечения. Окончательное выражение для расчета касательных напряжений, как следует из (2.4.41), имеет следующий вид:

$$\tau = \frac{T}{\delta\, \Omega} \,. \tag{2.4.42}$$

Потенциальная энергия деформации при кручении. Так как элементарная потенциальная энергия деформации dU равна работе внешних сил, то ее числовое значение равно площади под линейным участком кривой (рис. 2.4.16):

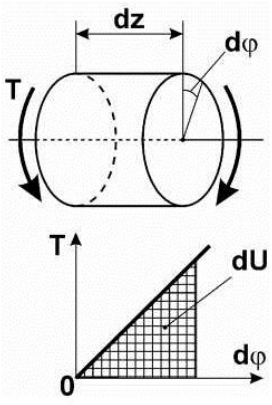


Рис. 2.4.16

$$dU = \frac{1}{2} T d\varphi = \frac{M_t^2 dz}{2GI_p} \,. \tag{2.4.43}$$

Для определения полной потенциальной энергии тела необходимо просуммировать энергии элементарных объемов (2.4.43):

$$U = \iiint\limits_V dU \,. \tag{2.4.44}$$

Кручение цилиндрической пружины растяжения (сжатия). Примером детали, напряженное состояние которой определяется кручением, является цилиндрическая пружина растяжения (сжатия). На рис. 2.4.17 изображена пружина круглого поперечного сечения диаметром d с числом витков z. Рассмотрим состояние равновесия этой пружины. Можно утверждать, что в соответствии с

методом сечений момент, вызванный приложением внешней осевой нагрузки, должен быть уравновешен крутящим моментом выделенного сечения. Очевидно, что величина крутящего момента сечения M_t не зависит от координаты этого сечения и равна

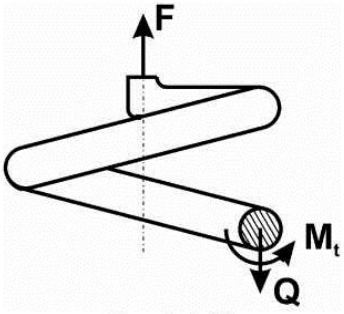


Рис. 2.4.17

$$M_t \equiv T = FD/2, \qquad (2.4.45)$$

где D — диаметр пружины.

Если пренебречь наличием усилий поперечного сдвига и учесть, что полярный момент для круглого поперечного сечения определяется по формуле (2.4.27), то, согласно (2.4.43), потенциальная энергия деформации имеет вид

$$U = \frac{1}{2}Td\varphi = \int_0^{\pi Dz} \frac{F^2D^2dz}{8GI_p} = \int_0^{\pi Dz} \frac{4F^2D^2dz}{G\pi d^4} = \frac{4F^2D^3z}{Gd^4}. \qquad (2.4.46)$$

С другой стороны, энергия деформации пружины равна работе внешних сил, $U = W_F$. Обозначив через δ осадку пружины, для работы внешних сил запишем

$$W_F = \frac{1}{2}F\delta. \qquad (2.4.47)$$

Приравнивая правые части (2.4.46) и (2.4.47), получим

$$\frac{1}{2}F\delta = \frac{4F^2D^3z}{Gd^4},$$

откуда

$$\delta = \frac{8FD^3z}{Gd^4}. \qquad (2.4.48)$$

Выражение (2.4.48) для расчета осадки пружины представляет большой практический интерес, так как пружины такого вида широко применяются в практике проектирования механических систем.

Очевидно, что касательные напряжения в поперечном сечении пружины в основном определяются крутящим моментом (2.4.45). Наибольшие касательные напряжения $\tau_{\max}$ можно определить с помощью (2.4.24) и (2.4.27), а именно

$$\tau_{\max} = \frac{T}{W_p} = \frac{8FD}{\pi d^3}. \qquad (2.4.49)$$

Глава 2.5. **Изгиб**

И з г и б о м называется вид деформации, при котором под действием силовых факторов, вызывающих поперечное смещение оси бруса, наблюдается изменение кривизны его продольной оси. В результате продольные слои бруса нагружаются неравномерно: одни из них увеличивают первоначальную длину (удлиняются), в то время как другие — уменьшают (укорачиваются). На рис. 2.5.1 приведен пример одного из бесчисленного множества таких нагружений. Здесь брус нагружается действующими в разных плоскостях распределенными силами q_1 и q_2, поперечной сосредоточенной силой F и внешним моментом изгиба M.

Внутренние силовые факторы. Вследствие изгиба в любом поперечном сечении бруса возникают напряжения, которые в общем случае представляют собой результат совместного действия поперечных (касательных) сил Q_x и Q_y, нормальной силы N, а также моментов изгиба M_{nx} и M_{ny} (рис. 2.5.2). Как обычно, внутренние силовые факторы находятся методом сечений (см. главы 2.1—2.4), в соответствии с которым абсолютные значения соответствующих проекций внутренних и внешних силовых факторов считаются равными между собой.

Силы будем считать положительными, если они направлены вдоль координатных осей. Положительные направления моментов изгиба соответствуют правосторонней системе координат. Согласно этому, за положительное направление момента относительно оси принимаем такое его направление, при котором поворот системы координат выполняется против часовой стрелки относительно конца орта рассматриваемой оси.

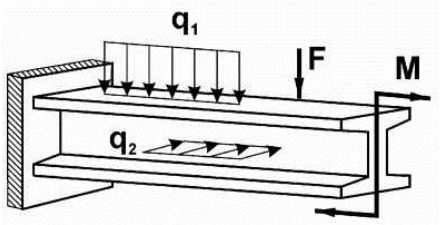


Рис. 2.5.1

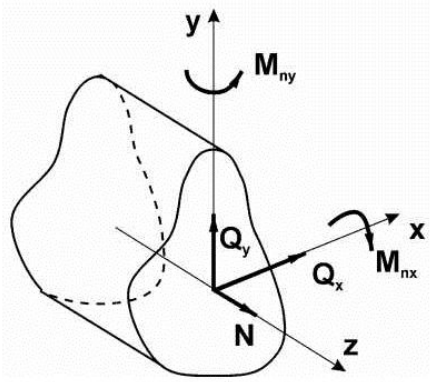
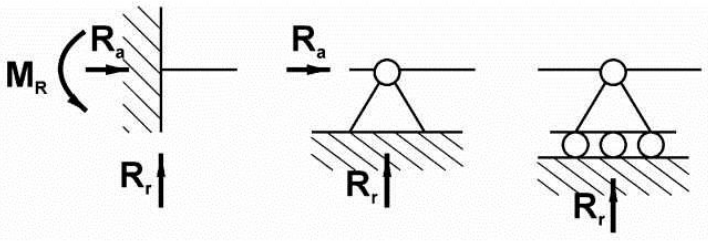


Рис. 2.5.2

Сдвигающие нагрузки Q_x и Q_y вызывают напряжения, величинами которых на практике можно пренебречь по сравнению с напряжениями от других силовых факторов. Основными при таком нагружении, как правило, являются напряжения, появляющиеся из-за действия моментов изгиба. Брус, у которого вследствие действия внешних нагрузок возникают в основном напряжения изгиба, как уже упоминалось во введении, называется *балкой*. Балками можно моделировать отдельные детали и элементы металлоконструкций. Плоскость, в которой лежит изогнутая ось балки, называется *плоскостью изгиба*, а плоскость действия силовых факторов — *плоскостью нагружения*. Если плоскости нагружения и изгиба совпадают, то имеет место *плоский прямой изгиб* (в противном случае изгиб считается *неплоским*).

Следует отметить, что механическая конструкция способна воспринимать внешнюю нагрузку, только если на нее наложены связи, выполненные в форме опор.



a) b) c)

Рис. 2.5.3

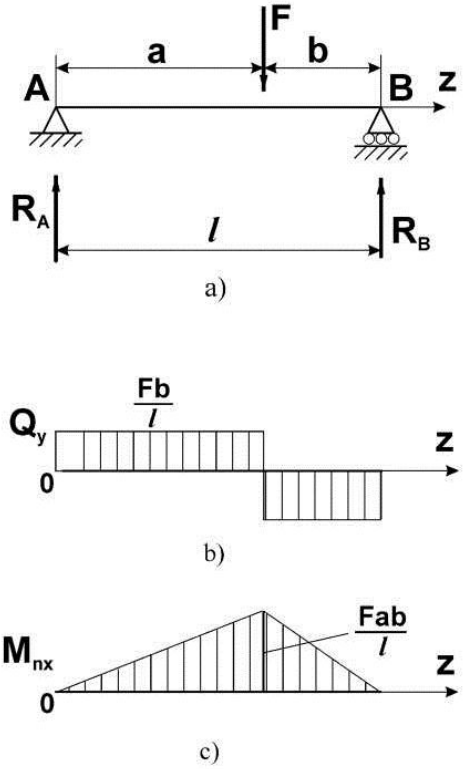
Наличие опор при расчетах заменяется реакциями, которые зависят от вида этих опор. Как правило, встречаются следующие варианты закрепления балок: жесткая заделка (рис. 2.5.3a), неподвижная опора (рис. 2.5.3b), подвижная в осевом направлении опора (рис. 2.5.3c) и т. д.

Жесткая заделка исключает любую подвижность, а число степеней свободы при этом становится равным нулю. Неподвижная опора ограничивает линейные перемещения, допуская угловые. Шарнирно-подвижная опора, кроме угловых, допускает также перемещения в направлении оси балки. Любое ограничение перемещения в плоском случае нагружения вызывает появлений либо реактивных силы R_a и R_r, либо реактивного момента M_R, величины которых можно определить из уравнений статики. Если число неизвестных реакций превышает число статических уравнений равновесия, т. е. балка статически неопределима, то следует добавить еще условие совместности деформаций.

Внешние силовые факторы, приложенные к балке, могут быть представлены в виде: сосредоточенных сил; сил, распределенных по длине или по площади; сосредоточенных либо распределенных моментов изгиба, а иногда и вращения.

В качестве примера рассмотрим один из простейших случаев нагружения: двухопорная балка длиной l, один конец которой неподвижен, а другой закреплен шарнирно, нагружается сосредоточенной силой F (рис. 2.5.4a). Неизвестные внутренние силовые факторы, действующие в текущем сечении, определим методом сечений. Для этого мысленно разрежем балку в месте расположения рассматриваемого сечения нормальной к оси плоскостью и рассмотрим равновесие одной из образовавшихся частей, заменяя действие другой внутренними силовыми факторами.

Построим графики зависимости внутренних силовых факторов от координаты расположения поперечного сечения (эпю-



a)

b)

c)

Рис. 2.5.4

ры). Отметим, что эпюра моментов традиционно изображается со стороны сжатых слоев балки.

Очевидно (рис. 2.5.4a), что нагружение балки представляет собой систему параллельных сил, для которой справедливы статические уравнения равновесия. Первое уравнение получается как результат суммирования активных и реактивных сил (в общем случае их количество равно k), а второе представляет собой уравнение моментов этих сил относительно одной из опор, например, опоры B:

$$\sum_{i=1}^{k} F_i = 0; \qquad \sum_{i=1}^{k} M_i = 0,$$

или, в нашем случае,

$$R_A + R_B = F; \qquad R_A l - Fb = 0. \tag{2.5.1}$$

Решив систему (2.5.1), найдем реакции в опорах:

$$R_A = \frac{Fb}{l}; \qquad R_B = \frac{Fa}{l}. \tag{.5.2)}$$

Если за начало координат принять точку A, то момент изгиба в сечении балки, расположенном на расстоянии z, с учетом (2.5.2) имеет вид

$$Q_y = R_A = \frac{Fb}{l}, \qquad M_{nx} = R_A z = \frac{Fbz}{a+b}, \quad 0 \le z < a;$$

$$Q_y = R_A - F = -\frac{Fa}{l},$$

$$M_{nx} = R_A z - F(z-a) = \frac{F(a^2 + ab - az)}{a+b}, \quad a \le z < a+b. \tag{2.5.3}$$

Полученные результаты (2.5.3) позволяют построить эпюры поперечных сил $Q_y(z)$ и моментов изгиба $M_{nx}(z)$ (рис. 2.5.4b—c).

Используем метод сечений для расчета внутренних силовых факторов в случае действия распределенной нагрузки q (рис. 2.5.5). Уравнения статики для выделен-

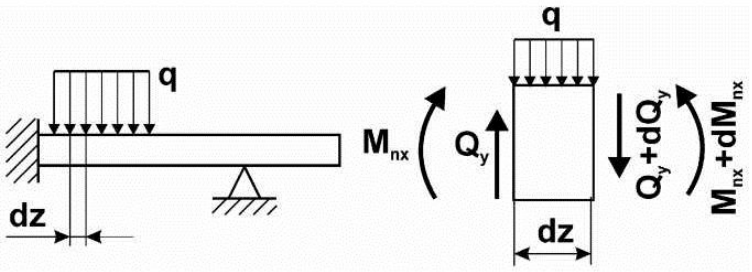


Рис. 2.5.5

ного элемента можно представить в виде

$$Q_y - (Q_y + dQ_y) - qdz = 0;$$

$$M_{nx} - (M_{nx} + dM_{nx}) + qdz\frac{dz}{2} + (Q_y + dQ_y)dz = 0. \qquad (2.5.4)$$

Если пренебречь в (2.5.4) величинами второго порядка малости, получим

$$\frac{dQ_y}{dz} = -q; \qquad \frac{dM_{nx}}{dz} = Q_y. \qquad (2.5.5)$$

С помощью дифференциальных уравнений (2.5.5) можно провести полный анализ изгиба балки (бруса).

Напряжения, вызванные изгибом. Задача расчета бруса, нагруженного моментами изгиба, в общем случае достаточно сложна, но решение сильно упрощается, если использовать применительно к изгибу *гипотезу плоских сечений*. Предположим, что взаимное влияние слоев в поперечном направлении отсутствует, оси координат совпадают с направлением главных осей, а начало системы координат — с положением центра тяжести сечения. Согласно гипотезе плоских сечений поперечные сечения после деформации (параллельного смещения сечения на расстояние δ_z и дальнейшего поворота в двух плоскостях на углы φ_x и φ_y относительно осей X и Y соответственно) остаются плоскими, а перемещение δ_{xy} произвольной точки сечения с координатами (x, y) равно

$$\delta_{xy} = \delta_z + \varphi_x y + \varphi_y x. \qquad (2.5.6)$$

Если в поперечном сечении присутствует только изгибающий момент, то нагружение называется ***чистым изгибом*** (рис. 2.5.6). В частном случае плоского чистого изгиба из (2.5.6) имеем

$$\delta_{xy} = \varphi_x y. \qquad (2.5.7)$$

Рассмотрим этот случай более подробно. Выделим участок бруса площадью

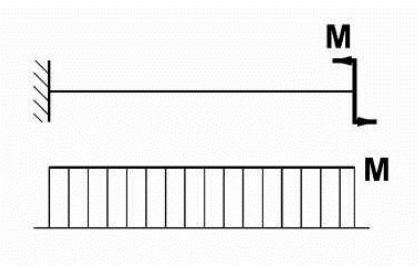


Рис. 2.5.6

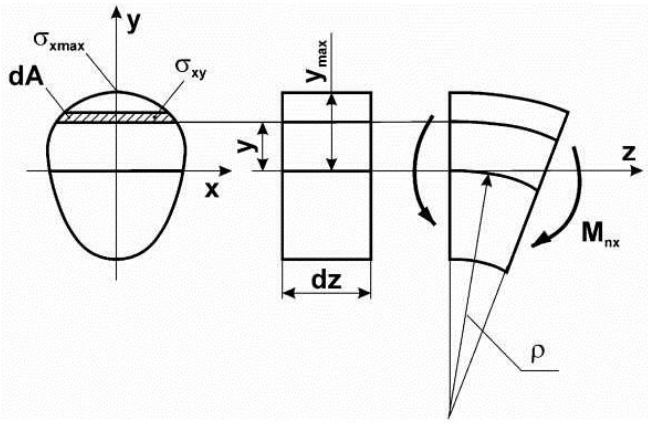


Рис. 2.5.7

A, на котором действует только изгибающий момент M_{ix}. Выделенный элемент после приложения внешнего момента деформируется (рис. 2.5.7). При этом внешние волокна бруса растягиваются, а нижние сжимаются, т. е. мы имеем дело с плоским нагружением.

Ось бруса, вдоль которой волокна не меняют длины после нагружения, называется *нейтральной осью*. Остается предположить, что положение нейтральных осей совпадает с направлением главных. Определить значение наибольших нормальных напряжений можно из уравнения равновесия отсеченной части. Для этого на расстоянии y выделяем элемент площадью dA, расположенный перпендикулярно оси бруса, на который будут действовать только нормальные напряжения σ_{xy}. Расстояние y представляет собой длину перпендикуляра, опущенного из текущей точки до рассматриваемой оси. Элементарный момент площадки относительно оси записывается в виде

$$dM_{ix} = \sigma_{xy} y dA . \qquad (2.5.8)$$

Для того чтобы получить полный момент внутренних сил, необходимо просуммировать элементарные моменты (2.5.8):

$$M_{ix} = \int_A dM_{ix} . \qquad (2.5.9)$$

Если наибольшее нормальное напряжение $\sigma_{x\max}$ возникает на расстоянии $y_{\max}$, то согласно гипотезе плоских сечений имеем

$$\frac{\sigma_{xy}}{y} = \frac{\sigma_{x\max}}{y_{\max}} . \qquad (2.5.10)$$

Уравнение равновесия (2.5.9) с учетом (2.5.10) принимает вид

$$M_{ix} = \frac{\sigma_{x\max}}{y_{\max}} I_x , \qquad (2.5.11)$$

где $I_x = \int_A y^2 dA$ — осевой момент инерции (2.3.4) выделенного сечения.

Если ввести в рассмотрение осевой момент сопротивления, равный

$$W_x = \frac{1}{y_{\max}} \int_A y^2 dA , \qquad (2.5.12)$$

то из (2.5.11) получаем окончательное выражение для максимальных напряжений, возникающих под действием момента M_{ix}:

$$\sigma_{x\max} = \frac{M_{ix}}{W_x} . \qquad (2.5.13)$$

По аналогии с (2.5.12) — (2.5.13) можно записать выражение для наибольших напряжений при приложении момента M_{ny}, а именно

$$\sigma_{y\max} = \frac{M_{ny}}{W_y}; \qquad W_y = \frac{1}{x_{\max}} \int_A x^2 dA . \tag{2.5.14}$$

В общем случае нагружения нормальное напряжение в текущей точке поперечного сечения определяется по формуле

$$\sigma_z = \frac{F_z}{A} + \frac{M_{nx} y}{I_x} + \frac{M_{ny} x}{I_y} . \tag{2.5.15}$$

В заключение заметим, что методы решения, основанные на гипотезе плоских сечений, дают удовлетворительные результаты для широкого круга инженерных приложений. Если же требуется проводить более точные расчеты, включая и расчеты местных напряжений, то следует использовать методы теории упругости (см. далее главу 3.1).

Дифференциальное уравнение изогнутой оси бруса. В качестве примера рассмотрим брус, один конец которого жестко закреплен, а к другому приложен момент изгиба M (рис. 2.5.6), что соответствует случаю чистого изгиба. Деформированное состояние бруса изображено на рис. 2.5.8. Если первоначальная длина выделенного элемента dz, то растянутые слои, находящиеся на расстоянии y от нейтральной оси, получат удлинение Δdz. Величину напряжения, возникающего при этом удлинении, можно определить с помощью закона Гука (2.1.2):

$$\sigma_x = E \frac{\Delta dz}{dz}, \tag{2.5.16}$$

причем из рисунка видно, что

$$dz = \rho_x d\varphi_x ; \; \Delta dz = y d\varphi_x , \tag{2.5.17}$$

где ρ_x — радиус кривизны оси. Подставляя (2.5.17) в (2.5.16) и учитывая (2.5.13), запишем выражение для определения кривизны K_x:

$$K_x = \frac{1}{\rho_x} = \frac{M_{nx}}{EI_x} . \tag{2.5.18}$$

Аналогично для K_y имеем

$$K_y = \frac{1}{\rho_y} = \frac{M_{ny}}{EI_y} . \tag{2.5.19}$$

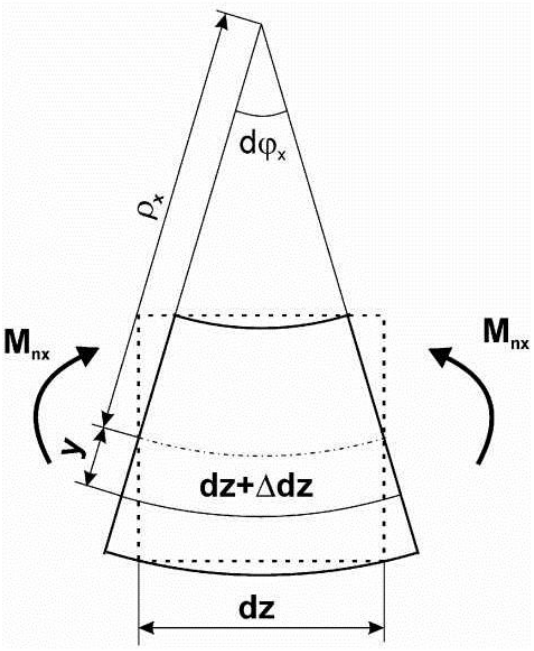


Рис. 2.5.8

С другой стороны, из дифференциальной геометрии известно, что кривизна линии K связана с поперечным перемещением u (прогибом) формулой

$$K = \frac{1}{\rho} = \frac{u''}{(1+u'^2)^{3/2}}. \qquad (2.5.20)$$

Для малых деформаций (а все полученные выше решения справедливы для случая упругого деформирования, когда при малых перемещениях пластические деформации отсутствуют) величиной u'^2 по сравнению с единицей можно пренебречь, тогда

$$K = \frac{1}{\rho} = u''. \qquad (2.5.21)$$

Подставляя (2.5.21) в (2.5.18) — (2.5.19), получим уравнение изогнутой оси бруса:

$$\frac{d^2u_x}{dz^2} = \frac{M_{nx}}{EI_x}; \qquad \frac{d^2u_y}{dz^2} = \frac{M_{ny}}{EI_y}. \qquad (2.5.22)$$

Радиус кривизны линейно связан с величиной угла поворота сечения φ. В общем случае углы поворота сечений равны

$$\Delta\varphi_x = \frac{M_{nx}\Delta z}{EI_x}; \qquad \Delta\varphi_y = \frac{M_{ny}\Delta z}{EI_y}. \qquad (2.5.23)$$

Косой изгиб. Рассмотренные до сих пор варианты изгиба относились к случаю так называемого *прямого изгиба*, при котором внешний момент совпадал по направлению с одной из главных осей поперечного сечения. В случае, если это условие не выполняется, изгиб называется *косым*. При косом изгибе внешний момент необходимо представить в виде проекций на направление главных осей, а расчеты прочности следует выполнять так же, как и для случая прямого изгиба.

Внецентренное нагружение. К задаче прямого изгиба можно свести и задачу расчета бруса, нагруженного внецентренной нагрузкой растяжения — сжатия. *Внецентренным* называется такой случай осевого нагружения, когда точка приложения осевой силы не совпадает с центром тяжести стыка. При этом осевую нагрузку можно перенести в центр тяжести сечения и добавить к ней, по правилам механики, изгибающий момент. Далее следует разложить момент на составляющие относительно главных осей, что и сводит задачу внецентренного нагружения к расчету прямого изгиба.

Касательные напряжения от поперечных сил. Проведенное выше рассмотрение основывалось на предположении, что в поперечных сечениях бруса возникают только нормальные напряжения. Это предположение совершенно справедливо при чистом изгибе, однако в отдельных случаях, в частности, при поперечном изгибе, пренебрежение поперечной нагрузкой может привести к существенным погрешностям, что вынуждает учитывать и касательные напряжения.

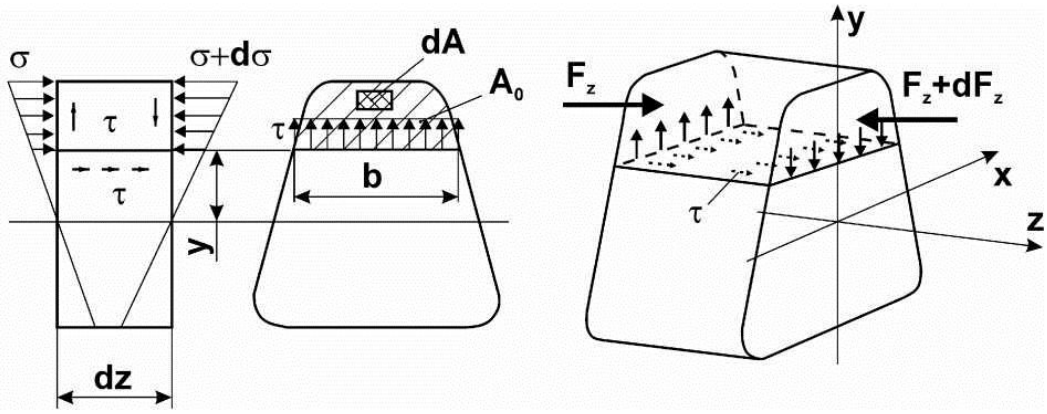


Рис. 2.5.9

Рассмотрим брус при поперечном изгибе. Выделим элемент объема толщиной dz и текущей шириной b и приложим к нему сдвигающую силу Q_y (рис. 2.5.9).

Очевидно, что по закону парности касательных напряжений величины напряжений сдвига в поперечном и продольных сечениях равны. Для расчета нормальных σ и касательных τ напряжений мысленно разделим этот элемент на две части продольным сечением, расположенным на расстоянии y от нейтрального слоя, и рассмотрим равновесие одной из отсеченных частей, площадь которой равна A_0. Равнодействующая нормальных сил F_z в левом сечении выделенной части элемента равна

$$F_z = \iint_{A_0} \sigma \, dA \,. \tag{2.5.24}$$

Учитывая, что согласно (2.5.15) можно записать

$$\sigma = \frac{y M_{nx}}{I_x},$$

из (2.5.24) получаем

$$F_z = \frac{M_{nx}}{I_x} \iint_{A_0} y dA = \frac{M_{nx} S_{z0}}{I_x}, \tag{2.5.25}$$

где y — текущая ордината площадки dA, а выражение $S_{z0} = \iint_{Ao} y dA$ представляет собой статический момент площади поперечного сечения отсеченной части фигуры относительно нейтральной оси.

Аналогично для равнодействующей нормальных сил в левом сечении имеем

$$F_z + dF_z = \iint_{Ao} (\sigma + d\sigma) dA = \frac{(M_{nx} + dM_{nx}) S_{z0}}{I_x} \,. \tag{2.5.26}$$

Разность этих сил уравновешивается касательными силами, возникающими в продольном сечении выделенного элемента. Если предположить, что касательные напряжения распределены по ширине сечения b равномерно, то

$$\frac{dM_{nx}S_{z0}}{I_x} = \tau b dz\,, \tag{2.5.27}$$

откуда с учетом (2.5.5) окончательно получаем так называемую *формулу Журавского:*

$$\tau = \frac{Q_y S_{z0}}{I_x b}\,. \tag{2.5.28}$$

Используем соотношение (2.5.28) для расчета распределения касательных напряжений по высоте бруса прямоугольного поперечного сечения площадью $A = bh$, нагруженного действующей вдоль оси y поперечной силой Q_y (рис. 2.5.10). Для точек, имеющих текущие ординаты y, имеем

$$S_{z0} = \frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right); \qquad I_x = \frac{bh^3}{12}\,. \tag{2.5.29}$$

После подстановки (2.5.29) в (2.5.28) находим

$$\tau = \frac{6Q_y}{bh^3}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right). \tag{2.5.30}$$

Из (2.5.30) видно, что наибольшие касательные напряжения имеют место на нейтральной линии (при $y = 0$),

$$\tau_{\max} = \frac{3Q_y}{2A} = \frac{3}{2}\tau_m\,, \tag{2.5.31}$$

где $\tau_m = \dfrac{Q_y}{A}$ — среднее значение касательного напряжения.

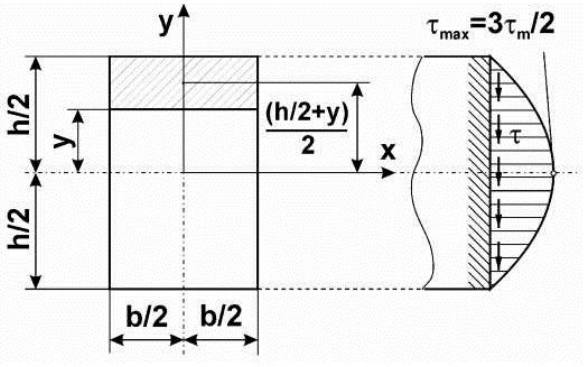


Рис. 2.5.10

Формула Журавского (2.5.28) применима также для определения касательных напряжений в тонкостенных брусьях незамкнутого профиля (тонкостенным будем считать сечение, для которого отношение периметра l к толщине δ удовлетворяет неравенству $l/\delta \geq 10$). В этом случае касательные напряжения направлены по касательной к средней линии контура. Можно считать, что по толщине контура они не меняются. В остальном методы расчета каса-

тельных напряжений не отличаются от методов, описанных выше.

В качестве примера рассмотрим тонкостенный незамкнутый профиль, который изгибается относительно оси x под действием вертикальной поперечной силы Q_y, параллельной оси y. Картина распределения касательных напряжений по длине тонкостенного незамкнутого сечения, рассчитанная с помощью (2.5.28), показана на рис. 2.5.11. Видно, что наибольшие напряжения, равные

$$\tau_{\max} = \frac{(4b+h)hQ_y}{8I_x},$$

возникают в местах, расположенных на нейтральной оси в непосредственной близости к центру тяжести.

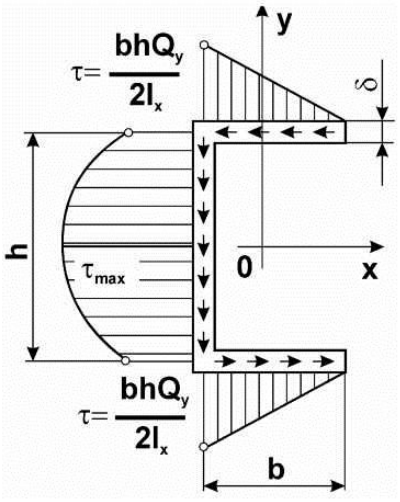


Рис. 2.5.11

Энергия деформации при чистом изгибе. Так как внешний момент вызывает поворот сечения элемента бруса, то он совершает некоторую работу, величина которой, по закону сохранения энергии, равна накопленной внутренними силами энергии деформации:

$$\Delta U_x = \frac{1}{2} M_{nx} \Delta\varphi_x; \qquad \Delta U_y = \frac{1}{2} M_{ny} \Delta\varphi_y. \tag{2.5.32}$$

Энергия деформации изгиба получается суммированием энергий участков длины бруса с учетом (2.5.23):

$$U = \int_l \frac{M_{nx}^2 dz}{2EI_x} + \int_l \frac{M_{ny}^2 dz}{2EI_y}. \tag{2.5.33}$$

Здесь l — длина рассматриваемого участка.

В общем случае к элементу бруса кроме моментов изгиба могут быть приложены поперечные силы, вызывающие касательные напряжения сдвига. Значения этих напряжений обычно много меньше по сравнению с нормальными, и потому в инженерной практике их наличием пренебрегают.

Глава 2.6. Методы расчета деформированного состояния упругих систем

Действующая на тело внешняя нагрузка, как известно, приводит к его *деформированию* и последующему появлению внутренних напряжений (глава 2.1). Величины перемещений точек тела, вызванных действием внешних сил, определяют ***деформированное состояние*** механической системы, которое в свою очередь может существенно влиять на ее работоспособность.

Кроме перемещений, в практике проектирования используют понятие жесткости. Жесткость как физическое понятие представляет собой способность тела сопротивляться внешнему деформированию и численно равна нагрузке, которая вызывает единичное перемещение. Величина, обратная жесткости, называется податливостью. Податливость характеризует способность тела перемещаться (деформироваться) под действием внешнего силового воздействия. Единицей измерения податливости служит перемещение точки тела под действием единичной силы.

Очевидно, что расчет жесткости напрямую связан с определением перемещений рассматриваемых точек детали. При этом следует различать природу возникновения деформаций. Если при нагружении детали деформация распределена по всему объему, то ее можно считать *объемной*. Встречаются также *контактные* деформации, которые в отличие от объемных локализованы внутри малых по сравнению с размерами тела объемах и быстро затухают. Необходимо, однако, отметить, что деление деформаций на объемные и контактные является условным.

В немногочисленных частных случаях объемные и контактные деформации можно рассчитать аналитическими методами. Но для решения задачи расчета полей перемещений в деталях произвольной геометрической формы используются исключительно численные методы. Для реализации численных методов разработаны компьютерные программы, которые позволяют получить полную картину деформированного состояния детали.

В этой главе рассмотрены некоторые из аналитических приемов расчета перемещений, каждый из которых можно эффективно применять при решении ряда конкретных задач. Численные методы будут изложены в главе 3.3.

Определение перемещений методом интегрирования уравнения изогнутой оси балки. После приложения к телу внешней нагрузки его точки перемещаются. Обычно величины упругих перемещений считаются малыми по сравнению с геометрическими размерами деформируемых тел. Это условие положено в основу дальнейших расчетов.

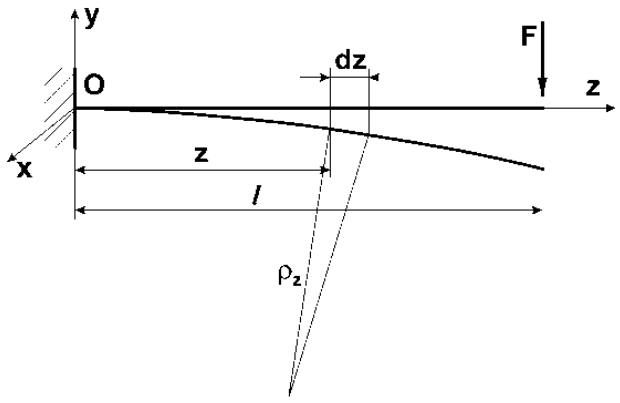


Рис. 2.6.1

Рассмотрим эти перемещения на примере консольной балки длиной l с односторонней внешней заделкой (рис. 2.6.1). К свободному концу балки приложена сосредоточенная сила F, которая и вызывает деформацию. Прогиб

балки в текущем сечении обозначим как δ. Выделим элемент объема балки длиной dz, находящийся на расстоянии z от закрепленного конца. Деформированное состояние в текущем сечении балки описывается радиусом кривизны ρ_z (или кривизной $K_z = 1/\rho_z$) ее изогнутой оси. Согласно (2.5.18) искомую кривизну можно определить как

$$K_z = \frac{1}{\rho_z} = \frac{M_{nx}}{EI_x}, \tag{2.6.1}$$

где

$$M_{nx} = F(l - z). \tag{2.6.2}$$

Подставляя (2.6.1) и (2.6.2) в уравнение изогнутой оси балки (2.5.22), получаем

$$\frac{d^2\delta}{dz^2} = \frac{F(l-z)}{EI_x}. \tag{2.6.3}$$

Решение дифференциального уравнения (2.6.3) можно получить последовательным интегрированием. Однократное интегрирование (2.6.3) дает

$$\frac{d\delta}{dz} = \int \frac{Fl}{EI_x} dz - \int \frac{Fzdz}{EI_x} = \frac{F}{EI_x}\left(lz - \frac{z^2}{2}\right) + C_1. \tag{2.6.4}$$

Величина $\frac{d\delta}{dz}$, как видно из рис. 2.6.1, равна углу поворота сечения.

После повторного интегрирования уравнения (2.6.4) получаем выражение для нахождения перемещений точек в зависимости от их текущих координат:

$$\delta = \int \frac{F}{EI_x}\left(lz - \frac{z^2}{2}\right)dz + \int C_1 dz = \frac{F}{EI_x}\left(\frac{lz^2}{2} - \frac{z^3}{6}\right) + C_1 z + C_2. \tag{2.6.5}$$

Постоянные интегрирования C_1 и C_2 можно определить, используя условия на границе: $\delta = 0$; $\frac{d\delta}{dz} = 0$ при $z = 0$. Из первого граничного условия получаем $C_2 = 0$, а из второго — $C_1 = 0$. После подстановки найденных констант в (2.6.5) окончательно запишем

$$\delta = \frac{F}{EI_x}\left(\frac{lz^2}{2} - \frac{z^3}{6}\right). \tag{2.6.6}$$

Перемещение закрепленного конца балки соответствует $z = l$, следовательно, для этого конца из (2.6.6) имеем

$$\delta = \frac{Fl^3}{3EI_x}. \tag{2.6.7}$$

В качестве второго примера рассмотрим задачу расчета балки, установленной на двух опорах и нагруженной так, как это показано на рис. 2.5.4а и 2.6.2.

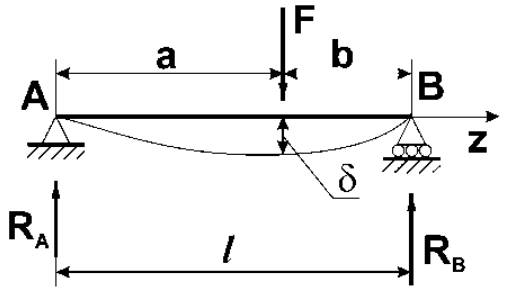


Рис. 2.6.2

Изгибающие моменты, действующие на участках a и b, определяются формулой (2.5.3). Тогда, интегрируя уравнение изогнутой оси балки (2.6.3), получаем на участке длиной a

$$\frac{d\delta_1}{dz} = \int \frac{Fb}{lEI_x} z dz = \frac{Fb}{lEI_x}\frac{z^2}{2} + C_1; \qquad (2.6.8)$$

$$\delta_1 = \int \frac{Fb}{lEI_x}\frac{z^2}{2} dz + \int C_1 dz = \frac{Fb}{lEI_x}\frac{z^3}{6} + C_1 z + C_2, \qquad (2.6.9)$$

а на участке длиной b —

$$\frac{d\delta_2}{dz} = \int \frac{Fb}{lEI_x} z dz - \int \frac{F(z-a)}{EI_x} dz = \frac{Fb}{lEI_x}\frac{z^2}{2} - \frac{F(z-a)^2}{2EI_x} + C_3; \qquad (2.6.10)$$

$$\delta_2 = \int \frac{Fb}{lEI_x}\frac{z^2}{2} dz - \int \frac{F(z-a)^2}{2EI_x} dz + \int C_3 dz = \frac{Fb}{lEI_x}\frac{z^3}{6} - \frac{F}{EI_x}\frac{(z-a)^3}{6} + C_3 z + C_4. \qquad (2.6.11)$$

Для нахождения конечных зависимостей по расчету перемещений и углов поворота следует определить значения произвольных постоянных, используя очевидные условия на границах.

- *Условие 1*: $\delta_1 = 0$ при $z = 0$, тогда из (2.6.9) следует $C_2 = 0$;
- *Условие 2*: $\frac{d\delta_1}{dz} = \frac{d\delta_2}{dz}$ при $z = a$, откуда с учетом (2.6.8) и (2.6.10) получаем $C_3 = C_1$;
- *Условие 3*: $\delta_1 = \delta_2$ при $z = a$, тогда с помощью (2.6.9), (2.6.11) и равенства $C_3 = C_1$ имеем $C_4 = 0$;
- *Условие 4*: $\delta_2 = 0$ при $z = l$, следовательно, используя (2.6.11), получаем

$$\frac{Fb}{lEI_x}\frac{l^3}{6} - \frac{F}{EI_x}\frac{(l-a)^3}{6} + C_3 l = 0; \qquad C_3 = -\frac{Fb}{6lEI_x}(l^2 - b^2).$$

С учетом вычисленных констант формулы (2.6.9) и (2.6.11) для расчета перемещений приобретают вид

$$\delta_1 = \frac{Fbz}{6lEI_x}(z^2 - l^2 + b^2); \tag{2.6.12}$$

$$\delta_2 = \frac{Fbz}{6lEI_x}(z^2 - l^2 + b^2) - \frac{F}{EI_x}\frac{(z-a)^3}{6}. \tag{2.6.13}$$

Углы поворота текущего сечения на соответствующих участках согласно (2.6.8) и (2.6.10) равны

$$\frac{d\delta_1}{dz} = \frac{Fb}{lEI_x}\frac{z^2}{2} - \frac{Fb}{6lEI_x}(l^2 - b^2) = \frac{Fb}{2lEI_x}\left(z^2 - \frac{l^2}{3} + \frac{b^2}{3}\right); \tag{2.6.14}$$

$$\frac{d\delta_2}{dz} = \frac{Fb}{2lEI_x}\left(z^2 - \frac{l^2}{3} + \frac{b^2}{3}\right) - \frac{F(z-a)^2}{2EI_x}. \tag{2.6.15}$$

Практический интерес представляет случай, когда внешняя нагрузка приложена симметрично относительно опор. Тогда справедливо равенство $z = a = b = l/2$. При этом, например, средняя точка между опорами перемещается на расстояние

$$\delta_1 = \frac{Fl^3}{48EI_x}, \tag{2.6.16}$$

а угол поворота сечения, как и следовало ожидать, в рассматриваемой точке равен нулю:

$$\frac{d\delta_1}{dz} = 0. \tag{2.6.17}$$

Описанный выше метод расчета перемещений можно применять только для ограниченного круга достаточно простых задач, тогда как подобный подход для более сложных случаев приводит к большим техническим трудностям. Более универсальными являются энергетические методы.

Расчет перемещений энергетическими методами. Рассмотрим равновесие тела, нагруженного системой внешних силовых факторов F_i (рис. 2.1.1). При приложении внешней нагрузки каждая точка тела перемещается в новое положение (рис. 2.1.3). Обозначим перемещения в точках приложения сил через δ_i. Если принадлежащая телу точка приложения силы F_i перемещается на расстояние $d\delta_i$ в направлении действия этой силы (такое перемещение называется *возможным*), следовательно, эта сила совершает работу dW_i, равную

$$dW_i = F_i d\delta_i. \tag{2.6.18}$$

В результате совершенной работы в объеме тела возникают внутренние на-

пряжения, приводящие к увеличению потенциальной энергии деформации U на величину dU_i:

$$dU_i = \frac{\partial U}{\partial \delta_i} d\delta_i . \qquad (2.6.19)$$

Поскольку приращение энергии деформаций dU_i обеспечивается только работой dW_i, т. е. левые части (2.6.19) и (2.6.18) равны, то, приравнивая между собой их правые части, запишем

$$F_i = \frac{\partial U}{\partial \delta_i} . \qquad (2.6.20)$$

Если рассматривать возможные приращения на других направлениях, то после аналогичных вычислений получаем

$$F_1 = \frac{\partial U}{\partial \delta_1}, \quad F_2 = \frac{\partial U}{\partial \delta_2}, \ \ldots \ , F_i = \frac{\partial U}{\partial \delta_i} . \qquad (2.6.21)$$

Из (2.6.21) следует, что величина внешней нагрузки, вызвавшей перемещение i-ой точки тела, равна частной производной потенциальной энергии по данному перемещению. Это утверждение (т. н. *первая теорема Кастилиано*) может быть положено в основу расчета перемещений твердых деформируемых тел.

Решение (2.6.21), полученное на основе анализа внутренней энергии деформированного тела, представимо и в иной форме: если на тело действует система внешних сил $F_1, F_2, \ldots, F_i$, то, вычисляя частные производные от потенциальной энергии по силам, имеем

$$\delta_1 = \frac{\partial U}{\partial F_1}, \quad \delta_2 = \frac{\partial U}{\partial F_2}, \ \ldots \ , \delta_i = \frac{\partial U}{\partial F_i} . \qquad (2.6.22)$$

Выражение (2.6.22) представляет собой аналитическую запись *второй теоремы Кастилиано*.

Применим описанный выше метод к расчету перемещений свободного конца консольной балки, жестко закрепленной другим концом (рис. 2.6.1). Перемещение свободного конца (без учета поперечных сил), как следует из (2.6.22) и (2.5.33), равно

$$\delta = \frac{\partial U}{\partial F} = \frac{\partial}{\partial F} \int_0^l \frac{M_x^2 dz}{2EI_x} = \frac{\partial}{\partial F} \int_0^l \frac{F^2 (l - z)^2 dz}{2EI_x} = \frac{Fl^3}{3EI_x}, \qquad (2.6.23)$$

что совпадает с (2.6.7).

Необходимо отметить, что в произвольном случае процедура вычисления перемещений, основанная на непосредственном применении второй теоремы Кастилиано, может быть достаточно сложной технически. Более часто используется другой энергетический подход, являющийся модификацией вышеописанного — *метод единичной нагрузки*, или *метод Мора*. Рассмотрим его применительно к плоскому случаю чистого изгиба.

Дифференцирование выражения (2.5.33) в общем виде даст

$$\delta_i = \frac{\partial U}{\partial F_i} = \frac{\partial}{\partial F_i}\int \frac{M_{nx}^2 dz}{2EI_x} = \int \frac{M_{nx}}{EI_x}\cdot\frac{\partial M_{nx}}{\partial F_i}dz\,. \qquad (2.6.24)$$

Введем следующие обозначения: $M_{1x} = \dfrac{\partial M_{nx}}{\partial F_i}$ и M_{nx} — изгибающие моменты, обусловленные единичной силой и полной внешней нагрузкой соответственно. Отметим, что единичную нагрузку нужно приложить так, чтобы ее направление совпадало с направлением искомого перемещения. Тогда (2.6.24) переписывается в виде

$$\delta_i = \int \frac{M_{nx}M_{1x}dz}{EI_x}\,. \qquad (2.6.25)$$

Из (2.6.25) видно, что расчет перемещений сводится в конечном итоге к вычислению интегралов. А поскольку вычисление интегралов представляет собой простейшую численную процедуру, которая может быть легко реализована на компьютере, то этот метод и получил широкое распространение. Проиллюстрируем применение метода Мора на нескольких примерах.

1. Определим перемещение конца консольно закрепленной балки (рис. 2.6.1), пользуясь формулой (2.6.25). Для этого запишем выражения для двух изгибающих моментов: от рабочей нагрузки, который равен $M_{nx} = F(l-z)$, и от единичной нагрузки, $M_{1x} = (l-z)$. Отсюда, как и следовало ожидать, получаем

$$\delta = \int_0^l \frac{F(l-z)^2 dz}{EI_x} = \frac{Fl^3}{3EI_x}\,. \qquad (2.6.26)$$

2. При произвольном нагружении, понимая под δ_i как линейное, так и угловое возможные перемещения, по аналогии с (2.6.25) имеем

$$\delta_i = \int_0^l \frac{N_1 N dz}{EA} + \int_0^l \frac{M_{x1}M_{nxF}\,dz}{EI_x} + \int_0^l \frac{M_{y1}M_{nyF}dz}{EI_y} + \int_0^l \frac{M_{t1}M_t dz}{EI_p}\,, \qquad (2.6.27)$$

где N_1, N — единичная и результирующая осевые нагрузки в текущем сечении; M_{x1}, M_{y1} и M_{nxF}, M_{nyF} — единичные и результирующие изгибающие моменты относительно одноименной оси в текущем сечении; M_{t1}, M_t — единичный и результирующий крутящие моменты текущего сечения; A — площадь поперечного сечения балки.

3. Рассмотрим цилиндрическую пружину кручения диаметром D с числом витков i, имеющую круглое поперечное сечение диаметром d (рис. 2.6.3). Приложим к такой пружине некоторый внешний момент вращения T. Тогда в ее поперечном сечении возникнет реактивный момент $M = M_{nx} \equiv T$, вызывающий

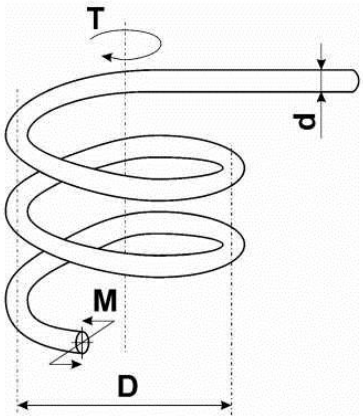


Рис. 2.6.3

появление напряжений изгиба, наибольшее нормальное значение которых, согласно (2.5.13), равно

$$\sigma_{x\max} = \frac{M_{nx}}{W_x} = \frac{32T}{\pi d^3}. \qquad (2.6.28)$$

Деформированное состояние пружины характеризуется углом закручивания φ, т. е. относительным углом поворота сечения. Для определения угла φ можно использовать формулу (2.6.25), полагая в ней $M_{1x} = 1$. Если пренебречь наличием всех иных напряжений, кроме напряжений изгиба, то при приложении внешнего момента для угла закручивания с учетом (2.3.9) получаем

$$\varphi = \int_0^{\pi Di} \frac{M_{nx}dz}{EI_x} = \int_0^{\pi Di} \frac{Tdz}{EI_x} = \frac{\pi TDi}{EI_x} = \frac{64TDi}{d^4E}. \qquad (2.6.29)$$

Полная потенциальная энергия. Полная потенциальная энергия $П$ любой механической системы, как известно, численно равна работе, совершенной всеми действующими на систему силами при возвращении системы из деформированного состояния в исходное недеформированное. При этом действующими на систему силами являются как внешние нагрузки, совершающие отрицательную работу W, так и внутренние реактивные силы, потенциальной энергией которых является положительная энергия деформации U.

Рассматривая переход системы от деформированного состояния к исходному недеформированному, будем считать, что точка приложения нагрузки F_i перемещается на величину δ_i, причем сама внешняя сила F_i остается в процессе перехода постоянной. Работа всех k внешних сил в этом случае равна

$$W = -\sum_{i=1}^{k} F_i\delta_i. \qquad (2.6.30)$$

Тогда

$$\Pi = U + W = U - \sum_{i=1}^{k} F_i\delta_i. \qquad (2.6.31)$$

Если продифференцировать (2.6.31) по одному из возможных перемещений δ_i, получим

$$\frac{\partial\Pi}{\partial\delta_i} = \frac{\partial U}{\partial\delta_i} - F_i. \qquad (2.6.32)$$

Подставляя в (2.6.32) выражение (2.6.20), имеем

$$\frac{\partial\Pi}{\partial\delta_i} = 0. \qquad (2.6.33)$$

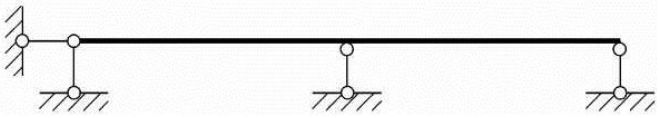
Полная потенциальная энергия механической системы является ее важной характеристикой. Если механическая система находится в равновесии, то, как следует из (2.6.33), первые производные от полной энергии системы по каждому из всех возможных перемещений оказываются равными нулю,

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \delta_1} = 0, \ \frac{\partial \Pi}{\partial \delta_2} = 0, \ \ldots, \ \frac{\partial \Pi}{\partial \delta_i} = 0. \qquad (2.6.34)$$

Это означает, что в положении равновесия энергия системы достигает экстремального значения (в данном случае — минимума). Вывод, который следует из выражения (2.6.34), обосновывает одно из фундаментальных положений механики, и в частности, механики деформированного тела — так называемый *принцип наименьшего действия*. Согласно этому принципу можно утверждать, что в условиях равновесия деформированное тело принимает такое положение, при котором его полная потенциальная энергия имеет минимальное значение. Это утверждение можно отнести также и к геометрии деформированного состояния. В процессе деформации каждая точка тела занимает такое положение, при котором его полная потенциальная энергия минимальна, причем это положение является единственно возможным.

Определение перемещений статически неопределимых стержневых систем. Механическая стержневая конструкция считается статически неопределимой, если число внутренних силовых факторов (реакций) превышает число возможных независимых уравнений статического равновесия (см. главу 2.2). Исходя из этого определения балка, изображенная на рис. 2.6.4a, однократно статически неопределима. Если в рассматриваемой статически неопределимой системе удалить одну из опор, например, среднюю (рис. 2.6.4b), то она становится статически определимой.

Стержневые системы следует разделять на геометрически замкнутые и геометрически разомкнутые. Такое деление связано с особенностями статической неопре-



a)



b)

Рис. 2.6.4

делимости. Например, стержневая система, образованная замкнутой цепью жестко связанных элементов, представляет собой статически неопределимую *рамную конструкцию* (рис. 2.6.7).

В общем случае раскрыть статическую неопределимость помогают приемы, в основу которых положены методы расчета деформаций. Для того чтобы систему из статически неопределимой преобразовать в статически определимую, необходимо отбросить лишние связи, заменив их неизвестными реакциями

$X_1, X_2, \ldots, X_k$. Величины этих реакций подбираются исходя из граничных условий. Для абсолютно жестких опор в качестве граничного можно использовать, к примеру, условие равенства нулю перемещений точек расположения опор в направлениях соответствующих реакций. Кроме этого, допустимо утверждать, что при использовании метода сечений для замкнутого контура относительное перемещение точек приложения внутренних силовых факторов также равно нулю. Если использовать принцип суперпозиции (независимого действия сил), то аналитически условие равенства относительных перемещений запишется в виде системы линейных уравнений

$$\left.\begin{array}{ccccccccccccc} \delta_{1X1} & + & \delta_{1X2} & + & \delta_{1X3} & + & . & . & + & \delta_{1F} & = & 0 \\ \delta_{2X1} & + & \delta_{2X2} & + & \delta_{2X3} & + & . & . & + & \delta_{2F} & = & 0 \\ . & & . & & . & & . & . & & . & & . \\ \delta_{kX1} & + & \delta_{kX2} & + & \delta_{kX3} & + & . & . & + & \delta_{kF} & = & 0 \end{array}\right\}. \qquad (2.6.35)$$

Здесь δ_{iXj} и δ_{iF}, $i, j = 1, \ldots, k$ — перемещения в направлении реакции X_i, обусловленные силой X_j и внешними силами F соответственно. Представим перемещение δ_{iXj} как произведение

$$\delta_{iXj} = \delta_{ij} X_j, \qquad (2.6.36)$$

где δ_{ij} — перемещение в направлении силового фактора X_i, вызванное действием единичной j-ой силы. В этих обозначениях систему уравнений (2.6.35) можно переписать в виде

$$\left.\begin{array}{ccccccccccccc} \delta_{11} X_1 & + & \delta_{12} X_2 & + & \delta_{13} X_3 & + & . & . & + & \delta_{1F} & = & 0 \\ \delta_{21} X_1 & + & \delta_{22} X_2 & + & \delta_{23} X_3 & + & . & . & + & \delta_{2F} & = & 0 \\ . & & . & & . & & . & . & & . & & . \\ \delta_{k1} X_1 & + & \delta_{k2} X_2 & + & \delta_{k3} X_3 & + & . & . & + & \delta_{kF} & = & 0 \end{array}\right\}. \qquad (2.6.37)$$

Решение системы уравнений (2.6.37) относительно реакций опор $X_1, X_2, \ldots, X_k$ позволяет определить величины неизвестных реакций. Таким образом, раскрытие статической неопределимости свелось к расчету нагрузок в опорах. Такой метод получил название *метода сил*. Этот метод не единственный, но он является наиболее распространенным. В частности, метод сил широко используется при расчете металлоконструкций произвольной геометрической формы.

Практическое применение метода расчета статически неопределимых систем рассмотрим на примере рамы, состоящей из двух независимых участков CB и BA одинаковой длины a с постоянным поперечным сечением (2.6.5а). Участок CB нагружен распределенной нагрузкой q. Эта рамная конструкция оказывается дважды статически неопределимой, так для определения неизвестных реакций опор не хватает двух уравнений. Отбросим одну из опор, как показано

на рисунке. Для того чтобы получить статически определимую конструкцию, вместо отброшенной опоры следует приложить неизвестные реакции X_1 и X_2 (рис. 2.6.5b), которые согласно (2.6.37) определяются из системы уравнений

$$\left.\begin{aligned} \delta_{11}X_1 + \quad \delta_{12}X_2 + \quad \delta_{1F} = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \quad \delta_{22}X_2 + \quad \delta_{2F} = 0 \end{aligned}\right\}. \tag{2.6.38}$$

Коэффициенты δ_{ij}, $i, j = 1,2$, уравнения (2.6.38), которые представляют собой перемещения, вызванные единичными силами, можно определить методом Мора, записав выражения для изгибающих моментов от этих силовых факторов. При этом для упрощения записи индекс «n» в обозначении внутреннего изгибающего момента будем опускать. Так, M_{1X1} и M_{1X2} — изгибающие моменты от единичной нагрузки, приложенные в направлениях силовых факторов X_1 и X_2 соответственно. Графическое представление зависимости этих изгибающих моментов от координаты z текущего сечения приведено на рис. 2.6.5 c,d.

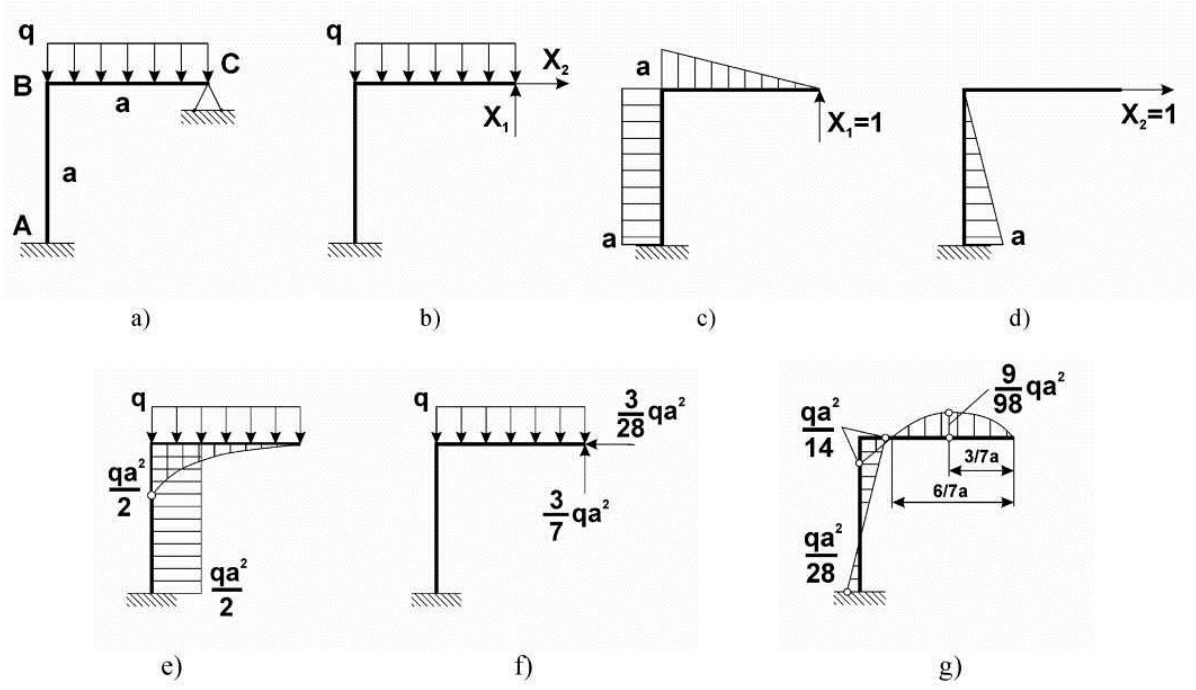


Рис. 2.6.5

Свяжем с началом каждого участка локальную систему координат, в которой и выполняются все дальнейшие вычисления:

$$\delta_{11} = \int\limits_{CB+BA} \frac{M_{1X1}M_{1X1}dz}{EI_x} = \int\limits_0^a \frac{z^2dz}{EI_x} + \int\limits_0^a \frac{a^2dz}{EI_x} = \frac{4a^3}{3EI_x};$$

$$\delta_{22} = \int\limits_{CB-BA} \frac{M_{1X2} M_{1X2} dz}{EI_x} = \int\limits_0^a \frac{z^2 dz}{EI_x} = \frac{a^3}{3EI_x};$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \int\limits_{CB-BA} \frac{M_{1X1} M_{1X2} dz}{EI_x} = -\int\limits_0^a \frac{azdz}{EI_x} = -\frac{a^3}{2EI_x}. \qquad (2.6.39)$$

Рассмотрим зависимость изгибающего момента, вызванного действием распределенной нагрузки q, от текущей координаты z. На интересующем нас участке CB уравнение момента имеет вид $M_q \equiv M_F = qz\frac{z}{2}$ (рис. 2.6.5). Следовательно, перемещение в направлении реакции опоры X_1, обусловленное внешними силами (в данном случае распределенной внешней силой q), согласно (2.6.25) равно

$$\delta_{1F} = \int\limits_{CB+BA} \frac{M_F M_{1X1} dz}{EI_x} = -\frac{1}{EI_x}\int\limits_0^a \frac{qz^2 zdz}{2} - \frac{1}{EI_x}\int\limits_0^a \frac{qa^2 adz}{2} = -\frac{5qa^4}{8EI_x}. \qquad (2.6.40)$$

Аналогично для перемещения в направлении силового фактора X_2 запишем

$$\delta_{2F} = \int\limits_{CB-BA} \frac{M_F M_{1X2} dz}{EI_x} = \frac{1}{EI_x}\int\limits_0^a \frac{qa^2 zdz}{2} = \frac{qa^4}{4EI_x}. \qquad (2.6.41)$$

Подстановка (2.6.39) — (2.6.41) в систему уравнений (2.6.38) преобразует ее к виду

$$\left.\begin{aligned} \frac{4}{3}X_1 - \frac{1}{2}X_2 - \frac{5qa}{8} = 0 \\ -\frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{3}X_2 + \frac{qa}{4} = 0 \end{aligned}\right\}, \qquad (2.6.42)$$

откуда получаем выражения для реакций в опоре:

$$X_1 = \frac{3}{7}qa; \qquad X_2 = -\frac{3}{28}qa. \qquad (2.6.43)$$

Знак " – " у реакции X_2 в (2.6.43) говорит о том, что она имеет противоположное по отношению к первоначально выбранному направление.

Зная реакции (2.6.43), легко построить эпюры изгибающих моментов, необходимые для определения напряжений в текущем сечении. Для построения эпюр следует просуммировать моменты от каждого из силовых факторов (рис. 2.6.5f). Из (2.6.43) следует, что на участке CB изгибающий момент описывается функцией

$$M_{ux}(z) = \frac{3}{7}qaz - \frac{qz^2}{2}, \qquad (2.6.44)$$

так что $M_{nx}=0$ при $z=0$ и $M_{nx}=-\dfrac{qa^2}{14}$ при $z=a$. Точка экстремума $z_{\max}$ функции $M_{nx}(z)$ находится из условия

$$\frac{dM_{nx}}{dz}\left(z=z_{\max}\right)=\frac{3}{7}qa-qz_{\max}=0,$$

откуда $z_{\max}=\dfrac{3}{7}a$, причем, с учетом (2.6.44), $M_{nx\max}=\dfrac{9}{98}qa^2$. Далее, при переходе через нулевую линию из (2.6.44) имеем $M_{nx}\left(z=z_0\right)=\dfrac{3}{7}qaz_0-\dfrac{qz_0^2}{2}=0$, т. е. $z_0=\dfrac{6}{7}a$.

Изгибающий момент на участке BA описывается линейной функцией

$$M_{nx}(z)=-\frac{qa^2}{14}+\frac{3qa}{28}z, \qquad (2.6.45)$$

причем в конечной точке участка (точка A с координатой $z=a$) имеем

$$M_{nx}=\frac{qa^2}{28}.$$

Результаты расчета изгибающих моментов представлены на рис. 2.6.5g.

Для того чтобы сократить общий объем вычислений при выполнении аналитического расчета, очень важно уменьшить количество неизвестных параметров. В отдель-

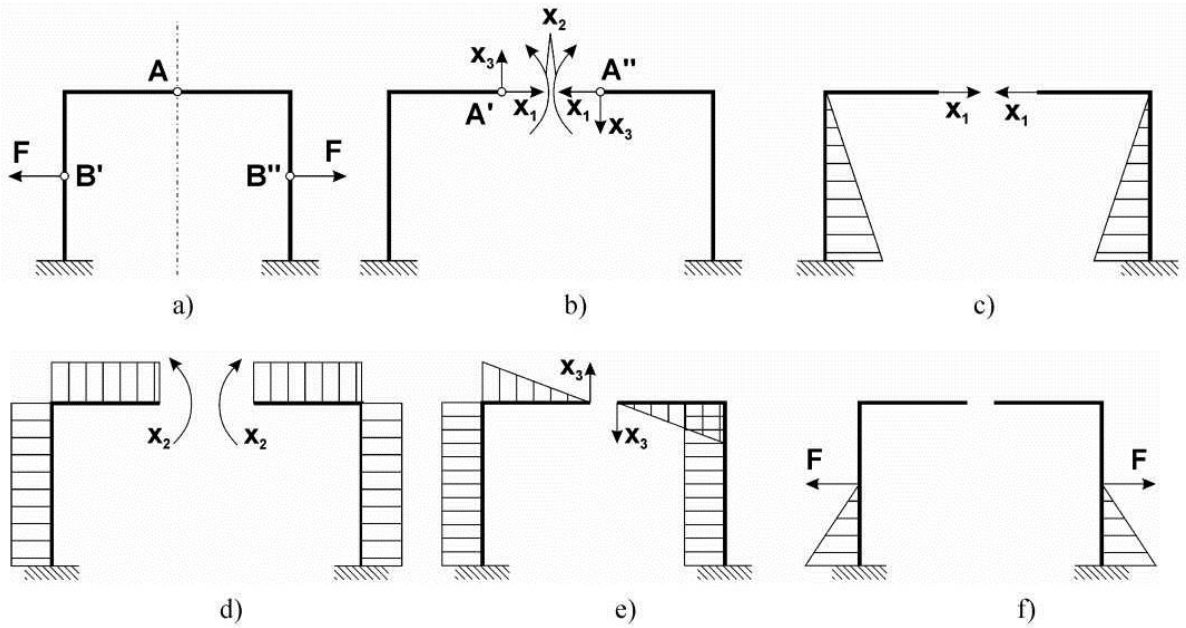


Рис. 2.6.6

ных случаях это оказывается возможным. В качестве примера рассмотрим симметричную рамную конструкцию при симметричном нагружении (рис. 2.6.6a). Если рассечь эту раму в точке A, то внутренние силовые факторы в этом сечении можно заменить неизвестными внешними параметрами X_1, X_2 и X_3 (рис. 2.6.6b). Действуя аналогично рассмотренному выше случаю, легко построить эпюры изгибающих моментов (рис. 2.6.6c,d,e). Из анализа представленных графиков видно, что эпюры моментов неизвестных продольных сил X_1 и X_2 симметричны (рис. 2.6.6c,d), в то время как поперечные силы X_3 обуславливают возникновение изгибающего момента, эпюра которого имеет так называемую кососимметричную форму (рис. 2.6.6e). Эпюра момента изгиба внешних сил, как видно из рис. 2.6.6f, также оказывается симметричной.

Такой вид эпюр моментов позволяет сделать вывод о том, что перемещения, которые в соответствии с формулой Мора (2.6.25) представляют собой произведения соответствующих моментов, оказываются равными нулю, $\delta_{13} = \delta_{31} = \delta_{32} = \delta_{23} = 0$. Это очевидно, так как равна нулю сумма произведений моментов от симметричных и несимметричных силовых факторов (рис. 2.6.6).

Очевидно также, что если эпюра внешнего момента изгиба симметрична, то $\delta_{3F} = 0$. Тогда из (2.6.37) следует $X_3 = 0$. Это означает, что те силовые факторы, которые при симметричном нагружении симметричных конструкций имеют кососимметричную эпюру изгибающих моментов, равны нулю, и ими можно пренебречь. Количество неизвестных сил при этом уменьшается. Отметим, что подобное уменьшение количества неизвестных параметров возможно только для задач, имеющих симметрию.

Аналогично можно показать, что при кососимметричном внешнем нагружении внутренние симметричные факторы также равны нулю, т. е. $X_1 = 0$, $X_2 = 0$.

Используя последнее утверждение, можно облегчить решение многих практически важных задач. Покажем это на примере расчета геометрически замкнутого кольца при его симметричном нагружении (рис. 2.6.7a).

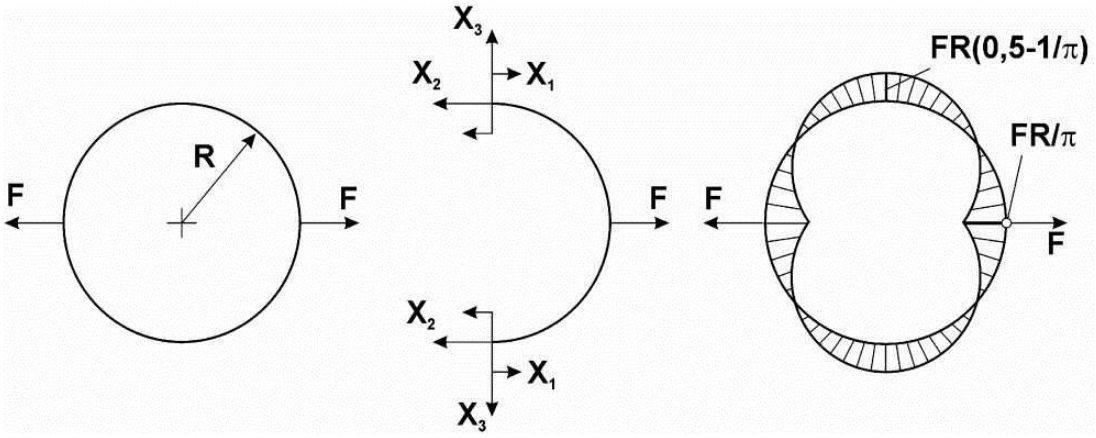
Изображенная на рис. 2.6.7a кольцевая рама, находящаяся под действием симметричной нагрузки, является статически неопределимой вследствие своей конструктивной замкнутости. Для нахождения неизвестных силовых факторов X_1, X_2 и X_3 воспользуемся методом сечений (рис. 2.6.7b).

Силовой фактор X_3, как было показано выше, приводит к кососимметричной эпюре момента, следовательно, $X_3 = 0$. В силу геометрической симметрии и симметричности нагружения из уравнения равновесия следует $X_2 = F/2$. Неизвестный силовой фактор X_1 найдем с помощью системы (2.6.35), которая в этом случае трансформируется в уравнение

$$\delta_{11} X_1 + \delta_{1F} = 0. \qquad (2.6.46)$$

Коэффициенты уравнения (2.6.46) определяются методом Мора. Так, моменты от внешних и единичных силовых факторов в текущем сечении, расположенном под углом φ, равны

$$M_F = \frac{FR}{2}(1-\cos\varphi); \quad M_{1X1} = -1, \qquad (2.6.47)$$



a) b) c)

Рис. 2.6.7

а компоненты перемещений:

$$\delta_{11} = \int_l \frac{M_{1X1} M_{1X1} dz}{EI_x} = \int_0^{\pi/2} \frac{Rd\varphi}{EI_x} = \frac{\pi R}{2EI_x};$$

$$\delta_{1F} = \int_l \frac{M_F M_{1X1} dz}{EI_x} = -\frac{FR^2}{2EI_x} \int_0^{\pi/2} (1-\cos\varphi) d\varphi = \frac{FR^2}{2EI_x}\left(1-\frac{\pi}{2}\right). \qquad (2.6.48)$$

В результате подстановки (2.6.47) и (2.6.48) в (2.6.46) получаем

$$X_1 = FR\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}\right); \qquad M_\varphi = M_F - X_1 = FR\left(\frac{1}{\pi}-\frac{1}{2}\cos\varphi\right). \qquad (2.6.49)$$

Выражение (2.6.49) дает возможность построить эпюру изгибающего момента (рис. 2.6.7c) и определить величины напряжений и деформаций любого участка бруса.

Глава 2.7. Напряженное состояние в точке. Теория предельных напряженных состояний

Напряженное состояние в точке. Внешние силы F_1, $F_2,\ldots,F_k$, приложенные к телу, вызывают появление в нем напряжений и деформаций. Для того чтобы можно было судить о статической прочности тела, нагруженного произвольной системой силовых факторов, необходимо описать напряженное состояние в каждой его точке, т. е. определить совокупность напряжений, возникающих во множестве площадок, проходящих через исследуемые точки.

Как уже неоднократно говорилось выше, в общем случае напряженное состояние каждой точки деформированного тела можно описать, используя метод сечений (см. главу 2.2).

Для анализа напряженного состояния тела в произвольной точке A выделим шестью сечениями в ее окрестности элементарный параллелепипед с гранями dx, dy и dz (рис. 2.7.1). Вектор полного напряжения, возникающего в каждой секущей площадке, произвольно ориентирован в пространстве, но в любом случае его можно представить в виде проекций на три взаимно перпендикулярные оси, одна из которых совпадает с направлением нормали к поверхности грани, а две другие лежат в ее плоскости. Напряжение, нормальное к поверхности, называется *нормальным*, в то время как два других — *касательными.* Вращением элемента объема его грани можно разместить так, что к ним будут приложены только нормальные на-

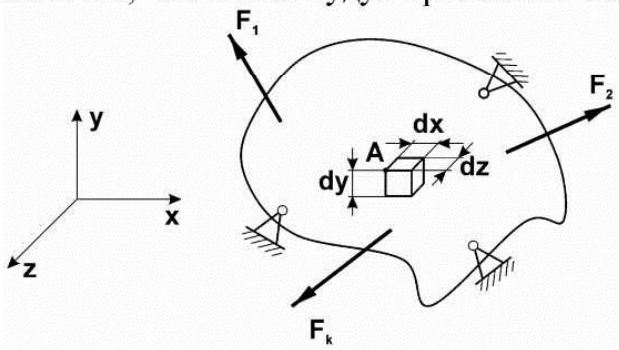
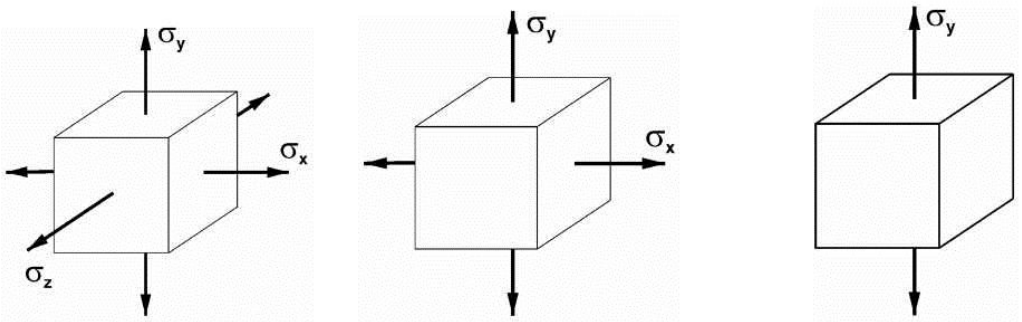


Рис. 2.7.1

пряжения, а касательные составляющие станут равными нулю. Таким образом, грани элемента будут совпадать с главными площадками, а действующие на них напряжения — с главными напряжениями. Эти три главных напряжения полностью характеризуют напряженное состояние точки, а его расчет в общем виде сводится к определению тройки этих напряжений.

Определение местоположения главных площадок при произвольном характере нагружения — процесс непростой, требующий дополнительных вычислений. Однако на практике положение одной из главных площадок в заданной точке почти всегда можно указать заранее. Тогда две другие главные площадки, разумеется, выбираются из множества перпендикулярных к первой. Этот прием существенно облегчает решение задачи определения главных напряжений.

Если в окрестности какой-либо точки тела действуют все три главных напряжения, то имеет место трехосное нагружение, а соответствующее напряженное состояние в этой точке называется *объемным* (рис. 2.7.2 а). Когда же напряжения на



a) b) c)

Рис. 2.7.2

одной из граней равны нулю, то напряженное состояние становится плоским (рис. 2.7.2b). Наконец, в случае простейшего вида деформации (например, растяжения или сжатия), при котором только одно из главных напряжений отлично от нуля, наблюдается линейное напряженное состояние (рис. 2.7.2 c).

Рассмотрим наклонную секущую площадку, расположенную под углом α (рис. 2.7.3). Вне зависимости от угла наклона эта площадка будет параллельна одной из главных осей (в данном случае оси z). На рассматриваемой площадке кроме нормальных напряжений σ_α действуют также и касательные напряжения τ_α. Выделенный элемент будет находиться в равновесии, если суммы сил в проекциях на направления нормали и касательной к площадке будут равны нулю, а именно

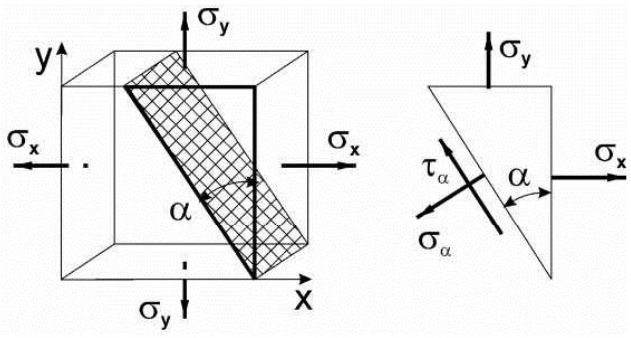


Рис. 2.7.3

$$\sigma_\alpha A_\alpha = \sigma_x A_x \cos\alpha + \sigma_y A_y \sin\alpha;$$

$$\tau_\alpha A_\alpha = \sigma_x A_x \sin\alpha - \sigma_y A_y \cos\alpha, \qquad (2.7.1)$$

где A_x, A_y, A_α — площади соответствующих граней, причем

$$A_y = A_x tg\alpha; \quad A_\alpha = A_x / \cos\alpha. \qquad (2.7.2)$$

С учетом (2.7.2) из (2.7.1) получаем

$$\sigma_\alpha = \sigma_x \cos^2\alpha + \sigma_y \sin^2\alpha;$$

$$\tau_\alpha = (\sigma_x - \sigma_y)\sin\alpha\cos\alpha. \qquad (2.7.3)$$

Пользуясь известными тригонометрическими соотношениями $\cos^2\alpha = (1+\cos 2\alpha)/2$, $\sin^2\alpha = (1-\cos 2\alpha)/2$ и $2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha$, преобра-

зуем далее (2.7.3) к виду

$$\sigma_\alpha = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\cos 2\alpha;$$

$$\tau_\alpha = \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\sin 2\alpha. \qquad (2.7.4)$$

Из (2.7.4) ясно, что наибольшие касательные напряжения $\tau_{\alpha\ \max}$ достигаются при значении $\alpha = \frac{\pi}{2}$ и равны

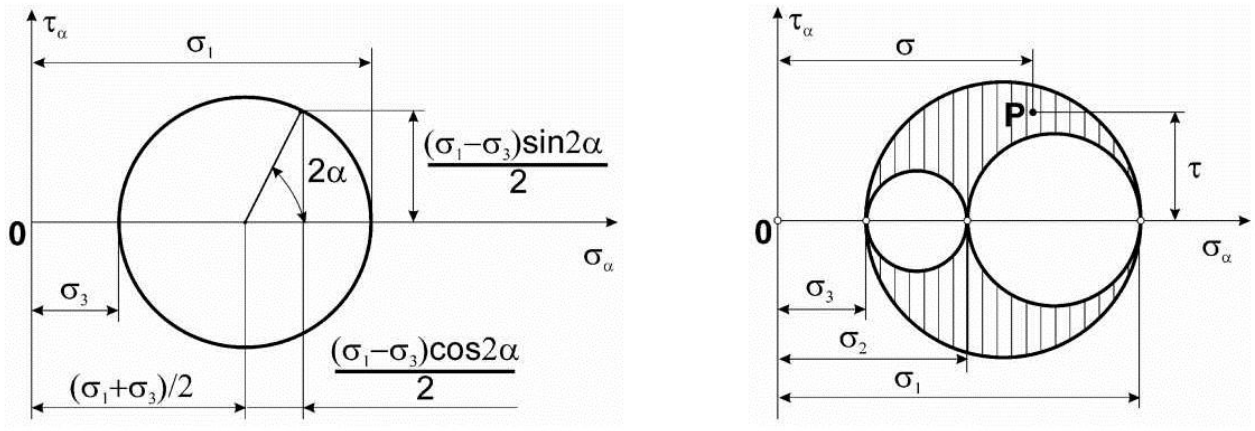
$$\tau_{\alpha\max} = \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y). \qquad (2.7.5)$$

Переобозначим главные напряжения σ_x и σ_y в порядке возрастания как σ_1 и σ_3. Исключив из (2.7.4) угол α, получим выражение

$$\left(\sigma_\alpha - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}\right)^2 + \tau_\alpha^2 = \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\right)^2, \qquad (2.7.6)$$

которое в координатах $\sigma_\alpha, \tau_\alpha$ представляет собой уравнение окружности радиуса $\tau_{\alpha\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$ с центром в точке $\left(\sigma_\alpha = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2};\ \tau_\alpha = 0\right)$. Полученный круг называется *кругом Мора.* Пример такого круга для семейства площадок, параллельных вектору напряжения σ_2, которое при этом принимается равным нулю, приведен на рис. 2.7.4.

Использование кругов Мора позволяет легко определить величины нормальных и касательных напряжений, приложенных к наклонным площадкам. При такой геометрической интерпретации ясно, что каждой секущей площадке, наклоненной под определенным углом, соответствует точка на круге Мора. Текущие напряжения на площадке, наклоненной под углом α, равны координатам точки пересечения этого круга с прямой, проведенной под углом 2α (рис. 2.7.4а).



а) b)

Рис. 2.7.4

Рассмотренный выше подход к описанию плоского напряженного состояния наклонной площадки, находящейся в плоскости оси z, можно распространить и на площадки, лежащие в других плоскостях. Очевидно, что каждая из этих площадок характеризуется парой главных напряжений, а напряженное состояние на любой наклонной площадке в случае трехосного нагружения определяется совокупностью трех кругов напряжений (рис. 2.7.4b). Методами теории упругости можно доказать, что координаты точек заштрихованной области равны нормальным и касательным напряжениям на произвольно ориентированных площадках. Так, например, координаты произвольной точки P равны напряжениям, действующим на площадке, не параллельной ни одному из главных напряжений: абсцисса — нормальному напряжению σ, а ордината — касательному τ:

$$\sigma = \sigma_1 \cos^2 \alpha_1 + \sigma_2 \cos^2 \alpha_2 + \sigma_3 \cos^2 \alpha_3;$$

$$\tau = \sqrt{\sigma_1 \cos^2 \alpha_1 + \sigma_2 \cos^2 \alpha_2 + \sigma_3 \cos^2 \alpha_3 - \sigma^2}.$$

Обобщенный закон Гука и потенциальная энергия деформации. Рассматривая нормальные нагружения и нагружения сдвига, можно выявить зависимость между компонентами напряженного и деформированного состояний (т. е. напряжениями σ и τ и линейными ε и угловыми γ деформациями) и тем самым записать выражение для *обобщенного закона Гука* (см. 2.2.6 и 2.4.12). Применительно к случаю *плоского напряженного состояния* закон Гука записывается в виде

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \mu\sigma_y) \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}(\sigma_y - \mu\sigma_x) \\ \varepsilon_z &= -\frac{\mu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) \\ \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} \end{aligned}\right\}. \qquad (2.7.7)$$

Для случая объемного напряженного состояния имеем

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)\right] \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z)\right] \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)\right] \\ \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G},\ \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G},\ \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G} \end{aligned}\right\}, \qquad (2.7.8)$$

где

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta dx}{dx}; \qquad \varepsilon_y = \frac{\Delta dy}{dy}; \qquad \varepsilon_z = \frac{\Delta dz}{dz}. \tag{2.7.9}$$

Относительная объемная деформация ε_V элемента объема $dV = dxdydz$ равна

$$\varepsilon_V = \frac{(dx + \Delta dx)(dy + \Delta dy)(dz + \Delta dz)}{dxdydz}, \tag{2.7.10}$$

или, с учетом (2.7.9),

$$\varepsilon_V = (1 + \varepsilon_x)(1 + \varepsilon_y)(1 + \varepsilon_z). \tag{2.7.11}$$

Обозначим через V объем тела до деформации, а через V_1 — после деформации. Выполнив в правой части (2.7.11) операцию умножения и отбросив члены порядка выше первого, получаем выражение для относительного изменения объема θ,

$$\theta = \frac{V_1 - V}{V} = \frac{\varepsilon_V V - V}{V} = \varepsilon_V - 1 = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z. \tag{2.7.12}$$

Потенциальная энергия деформации элемента объема в общем случае нагружения, как известно, равна сумме элементарных работ всех сил, распределенных по поверхности этого объема, т. е.

$$dU = \frac{1}{2}(\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{yz}\gamma_{yz} + \tau_{zx}\gamma_{zx})dxdydz. \tag{2.7.13}$$

Выражая в (2.7.13) деформации через напряжения по формулам (2.7.8), запишем

$$dU = \frac{1}{2E}\left[\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - 2\mu\left(\sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x + \sigma_x\sigma_y\right)\right]dxdydz + \frac{1}{2G}\left(\tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 + \tau_{xy}^2\right)dxdydz, \tag{2.7.14}$$

или в главных напряжениях

$$dU = \frac{1}{2E}\left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1 + \sigma_1\sigma_2)\right]dxdydz. \tag{2.7.15}$$

Очевидно, что полная потенциальная энергия определится суммированием энергий элементарных объемов:

$$U = \int_V dU. \tag{2.7.16}$$

Теория предельных напряженных состояний. Как известно, механическое состояние тела главным образом определяется напряжениями, возникающими вследствие его нагружения. При малых действующих силах материал проявляет упругие свойства, а при повышении нагрузки у него появляются необратимые пластические деформации, величины которых растут по мере увеличения внешних силовых факторов. Пластические деформации характерны только для пластичных материалов, к которым следует отнести большинство сталей, используемых в про-

изводстве машин. Пластическое деформирование приводит вначале к взаимному смещению слоев металла, затем происходит зарождение трещин и, наконец, наступает *разрушение,* или *потеря прочности.*

Состояние, при котором внутренние изменения в металле приводят к его разрушению, называется *предельным напряжением,* или *предельным напряженным состоянием.* Под предельным напряженным состоянием хрупких материалов понимается начало их разрушения, а пластичных — возникновение необратимых пластических деформаций. Вывод о надежности любой проектируемой конструкции следует делать на основании сопоставления максимальных напряжений, которые могут возникнуть в наиболее опасной точке, и напряжений, предельно допустимых для данного материала. Предельное напряженное состояние детали или конструкции является той границей, за которой недопустима их эксплуатация. Надежность работы оказывается тем выше, чем дальше от предельного состояния находится уровень фактических напряжений внутри материала детали. Это обстоятельство говорит о важности расчета параметров, характеризующих предельное напряженное состояние рассматриваемого объекта.

Для числовой характеристики статической прочности обычно используют понятие *запаса прочности.* На решении этой проблемы следует остановиться более подробно.

За *коэффициент запаса* данного напряженного состояния принимается число, показывающее, во сколько раз нужно увеличить все параметры напряженного состояния, чтобы оно стало предельным. Важным понятием при расчетах на прочность является понятие *равнопрочности.* Два разнотипных напряженных состояния считаются *равнопрочными,* если они вызывают равную вероятность статического разрушения, т. е. равны коэффициенты запаса этих состояний. Фактическое напряженное состояние тела можно сравнивать, например, с одноосным растяжением (сжатием), так как этот вид деформации является наиболее доступным и простым испытанием. Напряжение растяжения, которое вызывает в образце такую же вероятность разрушения, что и фактическое напряженное состояние, называется *эквивалентным.* Эквивалентное напряжение σ_e является функцией главных напряжений, что можно коротко записать в виде

$$\sigma_e = f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3). \qquad (2.7.17)$$

Очевидно, что наиболее опасной является такая точка элемента конструкции, в которой эквивалентное напряжение σ_e достигает максимального значения. Условие прочности в таком случае записывается в следующем виде:

- $\sigma_e \le \dfrac{\sigma_b}{n_b} = \sigma_{ab}$ — для хрупких материалов; (2.7.18)
- $\sigma_e \le \dfrac{\sigma_r}{n_r} = \sigma_{ar}$ — для пластичных. (2.7.19)

Здесь σ_{ab} и σ_{ar} — допускаемые напряжения по пределам прочности и текучести соответственно, n_b и n_r — коэффициенты запаса прочности и текучести, σ_b и σ_r — пределы прочности и текучести.

Однозначно сформулировать критерии равнопрочности не удается, поэтому существует несколько теорий, которые взаимно дополняют друг друга и могут быть применены для различных материалов и условий их нагружения. Например, для хрупких материалов рекомендуется использовать *теорию наибольших нормальных напряжений (наибольших растягивающих деформаций)*. Эти рекомендации сформулированы на основе многочисленных лабораторных испытаний образцов, изготовленных из разных материалов.

Рассмотрим последовательно каждую из существующих теорий, определяющих предельное состояние, и укажем границы их рационального применения. Читателя не должно удивлять то обстоятельство, что различные теории при описании предельного состояния приводят к разным результатам — это еще раз говорит о приближенности гипотез прочности.

Гипотеза наибольших нормальных напряжений (первая теория прочности). Согласно первой теории прочности, два напряженных состояния тела считаются равнопрочными, если равны их наибольшие напряжения растяжения,

$$\sigma_e = \sigma_1 . \tag{2.7.20}$$

Эта гипотеза основывается на том очевидном факте, что наибольшее влияние на процесс разрушения оказывают максимальные главные напряжения, которые вызывают разрыв межмолекулярных связей. Два других главных напряжения при этом в расчет не принимаются. Как показали лабораторные испытания, наличие других главных напряжений тем не менее может существенно повлиять на прочность тела. Однако в том случае, если другие главные напряжения много меньше максимальных, эта гипотеза может быть с успехом использована, но только при расчетах деталей из хрупких материалов. Для остальных же случаев ее применение необоснованно.

Гипотеза наибольших нормальных деформаций (вторая теория прочности). Если предположить, что разрушение происходит в результате отрыва, вызванного чрезмерным уровнем относительного удлинения, то можно сформулировать вторую теорию прочности, согласно которой условие равнопрочности выполняется в том случае, когда равны относительные линейные деформации

$$\varepsilon_e = \varepsilon_1 , \tag{2.7.21}$$

где ε_e и ε_1 — линейные деформации растяжения при эквивалентной и рабочей нагрузках соответственно. Уравнение второй теории прочности, записанное через напряжения, принимает вид

$$\sigma_e = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) . \tag{2.7.22}$$

Как видно из (2.7.22), при определении эквивалентных напряжений учитываются все напряжения, а не только главные. Второй теорией можно описывать прочность некоторых неметаллических материалов. Однако эта теория, как и первая, не имеет достаточного экспериментального подтверждения. Ее применение дает лучшие результаты для хрупких материалов.

Гипотеза наибольших касательных напряжений (третья теория прочности). Теория наибольших касательных напряжений используется для описания прочности пластических материалов, к каковым, как уже говорилось выше, относится большинство металлов. Для хрупких материалов эта гипотеза неприменима.

Основанием для формулировки гипотезы наибольших касательных напряжений является предположение, что при растяжении цилиндрические образцы разрушаются по площадкам, наклоненным под углом в $\pi/4$. Как было показано в главе 4.2.2, на этих же площадках действуют наибольшие касательные напряжения. Согласно теории наибольших касательных напряжений два напряженных состояния являются равнопрочными, если равны их наибольшие касательные напряжения, т. е.

$$\sigma_e = \sigma_1 - \sigma_3 = 2\tau. \qquad (2.7.23)$$

Здесь под τ понимается максимальное значение касательного напряжения (2.7.5).

Главный недостаток гипотезы наибольших касательных напряжений заключается в том, что при ее использовании не учитывается влияние средних главных напряжений, которые так или иначе участвуют в процессе разрушения. Например, пренебрежение напряжениями σ_2, как показали испытания, в отдельных случаях может привести к ошибке порядка $(10 \div 15)\%$, что необходимо помнить при выборе значений коэффициентов запаса прочности.

Энергетическая гипотеза Хубера-Мизеса (четвертая теория прочности). Очевидно, что при нагружении тела внешней нагрузкой увеличивается его потенциальная энергия. Казалось бы, при определенном уровне потенциальной энергии должно произойти разрушение. Однако, как следует из результатов экспериментов, при нагружении образца одинаковой сжимающей силой в трех взаимно перпендикулярных плоскостях даже при неограниченном возрастании внутренней потенциальной энергии разрушения материала все же не происходит. Можно сказать, что в этом случае изменение объема не приводит к изменению формы. Следовательно, опасное состояние связано не с *энергией изменения объема*, а с *энергией формоизменения*. В соответствии с энергетической теорией два напряженных состояния считаются равнопрочными, если они имеют одинаковые энергии формоизменения. Достоинством этой теории является то, что при расчетах учитываются все главные напряжения. Погрешность вычислений по этой теории не превышает 15%.

Рассмотрим деформацию элементарного кубика (рис. 2.2.10). Вследствие условного деления полной внутренней потенциальной энергии на две составляющих, энергию изменения формы и энергию изменения объема, каждое из главных напряжений представляем в виде суммы двух величин,

$$\sigma_1 = \sigma_m + \sigma_1', \quad \sigma_2 = \sigma_m + \sigma_2', \quad \sigma_3 = \sigma_m + \sigma_3', \qquad (2.7.24)$$

первые из которых отвечают за всестороннее растяжение, а вторые дополняют это растяжение до заданного напряженного состояния. Значения σ_m выбираются таким образом, чтобы объем в дополнительном напряженном состоянии не изменялся, т. е. согласно (2.7.12) $\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = 0$, и, следовательно,

$$\sigma_1' + \sigma_2' + \sigma_3' = 0.$$

В таком случае из (2.7.24) следует, что

$$\sigma_m = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma}{3}. \qquad (2.7.25)$$

При таком подходе оба напряженных состояния, основное объемное растяжение и дополнительное к нему, совершенно независимы, и взаимные работы отсутствуют. Тогда, согласно принципу суперпозиции, полная потенциальная энергия деформации кубика dU складывается из двух частей, соответствующих этим двум напряженным состояниям: энергии формоизменения dU_f и энергии изменения объема dU_V, так что

$$dU = dU_f + dU_V. \tag{2.7.26}$$

Подстановка в (2.2.13) вместо всех главных напряжений величины σ_m из (2.7.25) дает выражение для расчета энергии изменения объема:

$$dU_V = \frac{1-2\mu}{6}(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)^2\,dxdydz. \tag{2.7.27}$$

Тогда согласно (2.7.26) и (2.2.13) энергия изменения формы имеет вид

$$dU_f = \frac{1+\mu}{6E}\left[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2\right]dxdydz. \tag{2.7.28}$$

Для одноосного напряженного состояния, при котором $\sigma_1=\sigma_e$ и $\sigma_2=\sigma_3=0$, энергия изменения формы dU_f согласно (2.7.28) равна

$$dU_f = \frac{1+\mu}{3E}\sigma_e^2\,dxdydz. \tag{2.7.29}$$

Приравнивая правые части (2.7.28) и (2.7.29), находим

$$\sigma_e = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2}. \tag{2.7.30}$$

Переход в (2.7.30) от главных напряжений к текущим дает

$$\sigma_e = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_x-\sigma_y)^2+(\sigma_y-\sigma_z)^2+(\sigma_z-\sigma_x)^2+6(\tau_{yz}^2+\tau_{zx}^2+\tau_{xy}^2)}. \tag{2.7.31}$$

В частном случае плоского напряженного состояния (одноосное растяжение со сдвигом), когда $\sigma_x=\sigma_y=0$; $\sigma_z=\sigma$; $\tau_{xy}=\tau_{zx}=0$; $\tau_{zy}=\tau$, выражение (2.7.31) переписывается в виде

$$\sigma_e = \sqrt{\sigma^2+3\tau^2}. \tag{2.7.32}$$

Если далее положить в (2.7.32) $\sigma=0$, т. е. рассматривать напряженное состояние в форме чистого сдвига, то получим

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{3}}\sigma_e \approx 0{,}577\sigma_e. \tag{2.7.33}$$

Поскольку первые признаки пластического деформирования появляются тогда, когда эквивалентные напряжения становятся равными пределу текучести, то значение предела текучести при сдвиге можно рассчитывать по формуле

$$\tau_r = \frac{1}{\sqrt{3}}\sigma_r \approx 0{,}577\sigma_r, \qquad (2.7.34)$$

что хорошо согласуется с экспериментальными данными. Эксперименты показали, что первые пластические деформации появляются в материале при напряжениях, равных $(0{,}56 \div 0{,}6)\,\sigma_r$, то есть теория энергии формоизменения наиболее близка к экспериментальным данным и может быть использована для описания прочности упруго — пластических материалов. Отметим, что согласно (2.7.23) теория наибольших касательных напряжений приводит к результату

$$\tau_r = 0{,}5\sigma_r, \qquad (2.7.35)$$

близкому к (2.7.34), но менее точному.

В заключение следует заметить, что все вышеописанные теории прочности неприменимы к анизотропным материалам, прочность которых, помимо всего прочего, зависит от направления приложения внешней нагрузки.

Теория предельных состояний (теория Мора). Как уже говорилось, наиболее простым с точки зрения практической реализации является испытание материалов на растяжение (сжатие). В случае предельного растяжения можно ограничиться напряжением, равным значению предела текучести при растяжении σ_{rt}, а в случае предельного сжатия — пределом текучести при сжатии σ_{rc}. Круги Мора, соответствующие этому варианту нагружения, изображены на рис. 2.7.5. Все остальные напряженные состояния будут находиться внутри этих двух предельных. Логично предположить, что граница предельного состояния совпадает с огибающей двух предельно допустимых, и она линейна. Случаи фактического нагружения будут считаться безопасными с точки зрения прочности, если их наибольшие напряжения не превосходят граничных значений.

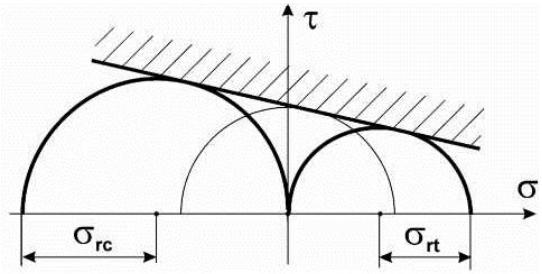


Рис. 2.7.5

Поскольку фактическое нагружение характеризуется двумя главными наибольшими напряжениями σ_1 и σ_3, то, полагая коэффициент запаса равным n, можно с помощью (2.7.18) — (2.7.19) определить предельные значения σ_{a1} и σ_{a3} этих напряжений:

$$\sigma_{a1} = n\sigma_1; \qquad \sigma_{a3} = n\sigma_3. \qquad (2.7.36)$$

Предельный круг Мора на рис. 2.7.6 изображен пунктиром. Проведя из точки C горизонталь, запишем

$$\frac{DE}{CE} = \frac{FG}{CG}. \qquad (2.7.37)$$

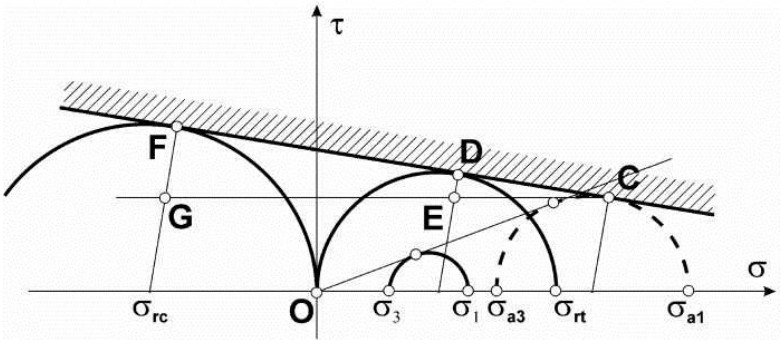


Рис. 2.7.6

Очевидно, что величины отрезков DE, FG, CE и CG можно представить в виде

$$DE = \frac{\sigma_{rt}}{2} - \frac{\sigma_{a1} - \sigma_{a3}}{2}; \qquad FG = \frac{\sigma_{rc}}{2} - \frac{\sigma_{a1} - \sigma_{a3}}{2};$$

$$CE = \frac{\sigma_{a1} + \sigma_{a3}}{2} - \frac{\sigma_{rt}}{2}; \qquad CG = \frac{\sigma_{a1} + \sigma_{a3}}{2} + \frac{\sigma_{rc}}{2}. \tag{2.7.38}$$

Тогда, подставляя (2.7.38) в (2.7.37) и разрешая пропорциональное уравнение относительно предела текучести при растяжении, получаем

$$\sigma_{rt} = \sigma_{a1} - \frac{\sigma_{rt}}{\sigma_{rc}}\sigma_{a3}. \tag{2.7.39}$$

Значение коэффициента запаса при этом, как следует из (2.7.36), определяется выражением

$$n = \frac{\sigma_{rt}}{\sigma_1 - \frac{\sigma_{rt}}{\sigma_{rc}}\sigma_3}. \tag{2.7.40}$$

Коэффициент запаса прочности для эквивалентного растяжения равен

$$n = \frac{\sigma_{rt}}{\sigma_e}. \tag{2.7.41}$$

Так как коэффициенты запаса рассматриваемого и эквивалентного напряженных состояний по определению равны, то имеем

$$\sigma_e = \sigma_1 - k\sigma_3, \tag{2.7.42}$$

где $k = \frac{\sigma_{rt}}{\sigma_{rc}}$. Для хрупких материалов вместо $\frac{\sigma_{rt}}{\sigma_{rc}}$ следует брать отношение $\frac{\sigma_{bt}}{\sigma_{bc}}$.

Теорию Мора рекомендуется использовать, если материалы по-разному работают на растяжение и сжатие.

Глава 2.8. Расчет толстостенных цилиндрических тел и тонкостенных осесимметричных оболочек

Расчет напряженно-деформированного состояния толстостенных цилиндров. Одной из важных задач теории напряженно-деформированных состояний является расчет осесимметричных цилиндрических тел при нагружении постоянным распределенным давлением, действующим как по наружной, так и по внутренней поверхностям. Такой случай нагружения не может быть рассчитан с помощью описанных ранее методов, а требует специального подхода.

Рассмотрим однородное толстостенное цилиндрическое тело произвольных размеров, нагруженное осесимметричной радиальной внешней нагрузкой. После приложения нагрузки каждая точка тела перемещается, причем из соображений симметрии ясно, что эти перемещения будут происходить в радиальных плоскостях. Состояние после нагружения удобно наблюдать на примере деформации элемента цилиндра радиуса ρ и толщины $d\rho$ (рис. 2.8.1). Радиальное перемещение произвольной точки A обозначим через u. В принятой нами расчетной модели перемещение u зависит только от текущего радиуса цилиндра ρ. Если после приложения внешней нагрузки радиус ρ получает приращение u (т. е. точка A перемещается на расстояние u и переходит в точку A'), то отрезок $\rho + d\rho$ — приращение $u + du$ (точка B перемещается на расстояние $u + du$ и переходит в точку B'). Тогда радиальное удлинение ε_n рассматриваемого элемента равно

$$\varepsilon_n = \frac{du}{d\rho}, \tag{2.8.1}$$

а относительное удлинение длины окружности —

$$\varepsilon_t = \frac{2\pi(\rho + u) - 2\pi\rho}{2\pi\rho} = \frac{u}{\rho}. \tag{2.8.2}$$

Для нахождения зависимостей между возникающими напряжениями рассмотрим равновесие выделенного элемента объема цилиндра с размерами $d\rho$, dz и $\rho d\varphi$ (рис. 2.8.2). Касательные напряжения в осевых и поперечных сечениях ци-

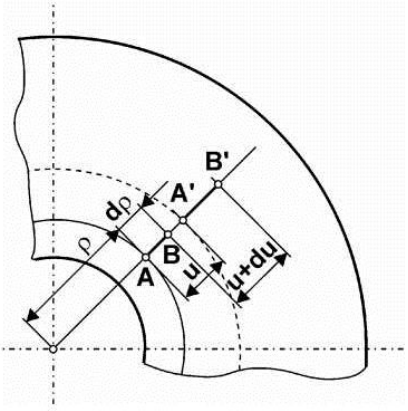


Рис. 2.8.1

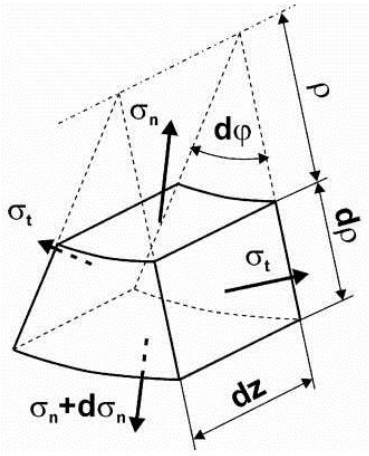


Рис. 2.8.2

линдра вследствие осевой симметрии отсутствуют, поэтому остаются только нормальные (или *окружные*) σ_t и *радиальные* σ_n напряжения. Спроецировав все действующие на выделенный элемент силовые факторы на радиальное направление, можно записать уравнение равновесия:

$$(\sigma_n + d\sigma_n)(\rho + d\rho)d\varphi\, dz - \sigma_n \rho d\varphi dz - \sigma_t d\rho\, dz d\varphi = 0,$$

откуда

$$\sigma_n + \frac{d\sigma_n}{d\rho}\rho - \sigma_t = 0, \tag{2.8.3}$$

или

$$\frac{d(\sigma_n \rho)}{d\rho} - \sigma_t = 0. \tag{2.8.4}$$

Напомним, что мы рассматриваем случай, когда напряжения сдвига отсутствуют, следовательно, σ_n и σ_t являются главными напряжениями.

Закон Гука (2.2.6) для случая двухосного растяжения записывается в виде

$$\varepsilon_n = \frac{1}{E}(\sigma_n - \mu\sigma_t); \qquad \varepsilon_t = \frac{1}{E}(\sigma_t - \mu\sigma_n),$$

так что после очевидных преобразований с учетом (2.8.1) и (2.8.2) получаем

$$\sigma_n = \frac{E}{1-\mu^2}\left(\frac{du}{d\rho} + \mu\frac{u}{\rho}\right);$$

$$\sigma_t = \frac{E}{1-\mu^2}\left(\frac{u}{\rho} + \mu\frac{du}{d\rho}\right). \tag{2.8.5}$$

Подставляя в (2.8.4) значения напряжений σ_n и σ_t из (2.8.5), приходим к следующему дифференциальному уравнению для расчета деформаций:

$$\frac{d^2u}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{du}{d\rho} - \frac{u}{\rho^2} = 0. \tag{2.8.6}$$

Уравнение (2.8.6) может быть переписано как

$$\frac{d}{d\rho}\left[\frac{du}{d\rho} + \frac{u}{\rho}\right] = 0,$$

или

$$\frac{d}{d\rho}\left[\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}(u\rho)\right] = 0. \tag{2.8.7}$$

Решением (2.8.7) является функция радиального перемещения u вида

$$u = C_1\rho + \frac{C_2}{\rho}, \qquad (2.8.8)$$

где C_1 и C_2 — постоянные интегрирования, значения которых в каждом конкретном случае определяются из граничных условий.

Найденную в (2.8.8) функцию u можно использовать для расчета напряжений. Подставив (2.8.8) в (2.8.5), получим

$$\sigma_n = \frac{E}{1-\mu^2}\left[C_1(1+\mu) - C_2(1-\mu)\frac{1}{\rho^2}\right];$$

$$\sigma_t = \frac{E}{1-\mu^2}\left[C_1(1+\mu) + C_2(1-\mu)\frac{1}{\rho^2}\right]. \qquad (2.8.9)$$

Задача Ляме. Рассмотрим толстостенный цилиндр с внутренним и внешним радиусами r_1 и r_2, нагруженный одновременно внутренним и внешним давлениями p_1 и p_2 (рис. 2.8.3). Задача определения напряженно-деформированного состояния такого цилиндра называется *задачей Ляме*.

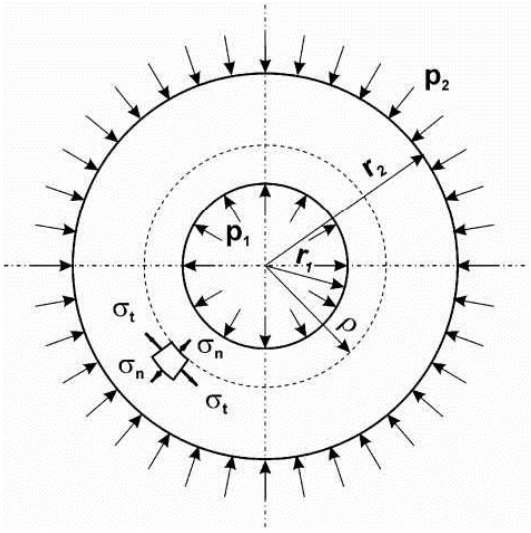


Рис. 2.8.3

Граничные условия для напряжений в этом случае можно записать в следующем виде:

$$\sigma_n(\rho = r_1) = -p_1;\ \sigma_n(\rho = r_2) = -p_2,$$

откуда постоянные интегрирования с учетом (2.8.9) равны

$$C_1 = \frac{1-\mu}{E}\cdot\frac{p_1 r_1^2 - p_2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2};$$

$$C_2 = \frac{1+\mu}{E}\cdot\frac{r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}(p_1 - p_2). \qquad (2.8.10)$$

Подстановка (2.8.10) в (2.8.9) и (2.8.8) дает

$$\sigma_n = \frac{p_1 r_1^2 - p_2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} - \frac{r_1^2 r_2^2}{\rho^2}\cdot\frac{p_1 - p_2}{r_2^2 - r_1^2};$$

$$\sigma_t = \frac{p_1 r_1^2 - p_2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} + \frac{r_1^2 r_2^2}{\rho^2}\cdot\frac{p_1 - p_2}{r_2^2 - r_1^2}. \qquad (2.8.11)$$

$$u = \frac{1-\mu}{E}\cdot\frac{p_1 r_1^2 - p_2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}\rho + \frac{1+\mu}{E}\cdot\frac{r_1^2 r_2^2}{\rho}\cdot\frac{p_1 - p_2}{r_2^2 - r_1^2}. \qquad (2.8.12)$$

Рассмотрим ряд частных решений, представляющих интерес для практики проектирования.

1. Цилиндр нагружен только внутренним давлением. Для указанного варианта нагружения справедливы следующие граничные условия:

$$\sigma_n(\rho = r_1) = -p; \qquad \sigma_n(\rho = r_2) = 0.$$

Тогда (2.8.11) переписывается в виде

$$\sigma_n = \frac{pr_1^2}{r_2^2 - r_1^2}\left(1 - \frac{r_2^2}{\rho^2}\right); \qquad \sigma_t = \frac{pr_1^2}{r_2^2 - r_1^2}\left(1 + \frac{r_2^2}{\rho^2}\right). \tag{2.8.13}$$

На рис. 2.8.4 показан график изменения радиальных и окружных напряжений по толщине цилиндра. Из графика видно, что наибольших значений окружное напряжение достигает в точках внутренней поверхности радиуса r_1:

$$\sigma_{t\max} = p\frac{r_2^2 + r_1^2}{r_2^2 - r_1^2}.$$

При этом радиальное напряжение, как следует из (2.8.13), равно $\sigma_{n\max} = -p$.

Так как расчет статической прочности следует выполнять для наиболее нагруженных точек, то условие прочности по теории максимальных касательных напряжений (2.7.23) записывается в виде

$$\sigma_e = \sigma_{t\max} - \sigma_{n\max} = p\frac{r_2^2 + r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} - (-p) = p\frac{2r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}. \tag{2.8.14}$$

2. Цилиндр нагружен только внешним давлением. Граничные условия в этом случае имеют вид

$$\sigma_n(\rho = r_1) = 0; \qquad \sigma_n(\rho = r_2) = -p,$$

так что из (2.8.11) следует

$$\sigma_n = -\frac{pr_2^2}{r_2^2 - r_1^2}\left(1 - \frac{r_1^2}{\rho^2}\right); \qquad \sigma_t = -\frac{pr_2^2}{r_2^2 - r_1^2}\left(1 + \frac{r_1^2}{\rho^2}\right). \tag{2.8.15}$$

Из приведенных на рис. 2.8.5 графиков изменения напряжений σ_n и σ_t по

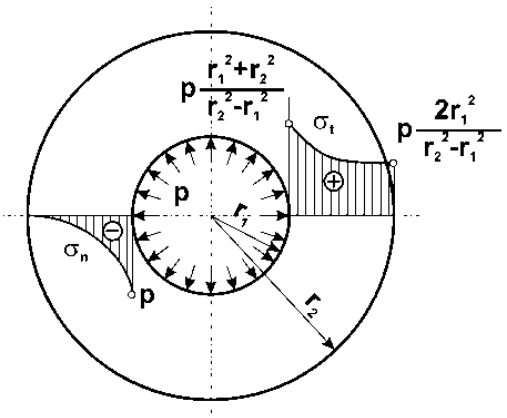


Рис. 2.8.4

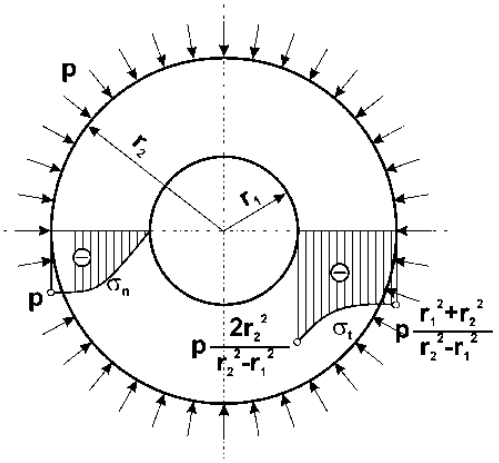


Рис. 2.8.5

толщине цилиндра видно, что эквивалентное напряжение $\sigma_e = \sigma_n - \sigma_t$ достигает наибольшего значения на внутренней поверхности цилиндра, т. е. при $\rho = r_1$. Величина этого напряжения, согласно гипотезе наибольших касательных напряжений (2.7.23), определяется по формуле

$$\sigma_e = 0 - \left(- p \frac{2r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \right) = p \frac{2r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}. \qquad (2.8.16)$$

Полученное выражение (2.8.16) полностью совпадает с результатом аналогичного расчета (2.8.14), проведенного для случая нагружения внутренним давлением.

В том случае, если радиус внутреннего отверстия $r_1 = 0$ (т. е. толстостенный цилиндр превращается в сплошной вал), то, как следует из (2.8.16), напряжения в цилиндре будут распределены равномерно:

$$\sigma_n = \sigma_t = -p.$$

Расчет напряженно-деформированного состояния составных цилиндров. Этот случай интересен прежде всего с точки зрения рассмотрения соединения деталей с натягом (см. далее главу 4.2). При такой сборке внешний диаметр одной из сопрягаемых деталей (вала) больше диаметра отверстия другой детали. Соединения с натягом широко используются для сборки деталей, представляющих собой тела вращения.

Процесс сборки такого соединения связан с созданием натяга δ за счет деформаций сопряженных деталей. Присвоим внутренней детали индекс 1, а наружной — 2. Тогда натяг равен разности

$$\delta = u_2 - u_1, \qquad (2.8.17)$$

где u_2 — увеличение радиуса отверстия; u_1 — уменьшение радиуса вала.

После сборки на контактирующих поверхностях появляется давление, абсолютную величину которого обозначим через p_0. Перемещение u_1 определяется по формуле (2.8.12), если положить в ней $p_1 = 0$, $p_2 = p_0$, $r_2 = \rho$. Аналогично при вычисления u_2 делаем замену $p_1 = p_0$, $p_2 = 0$, $r_1 = \rho$. Тогда, предполагая, что сопрягаемые детали изготовлены из одинакового материала, получаем

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= \frac{p_0}{E} \cdot \frac{(\mu - 1)\rho^3 - (\mu + 1)r_1^2 \rho}{\rho^2 - r_1^2} \\ u_2 &= \frac{p_0}{E} \cdot \frac{(1 - \mu)\rho^3 + (\mu + 1)r_2^2 \rho}{r_2^2 - \rho^2} \end{aligned}\right\}. \qquad (2.8.18)$$

Вычисляя далее значение δ подстановкой (2.8.18) в (2.8.17) и выражая оттуда p_0, находим

$$p_0 = \frac{E\delta}{2\rho^3} \cdot \frac{(\rho^2 - r_1^2)(r_2^2 - \rho^2)}{r_2^2 - r_1^2}. \qquad (2.8.19)$$

В том случае, когда детали изготавливаются из различных материалов, формула (2.8.19) приобретает вид

$$p_0 = \frac{\delta}{2\rho\left(C_{01}/E_1 + C_{02}/E_2\right)}, \qquad (2.8.20)$$

где

$$C_{01} = \frac{\rho^2 + r_1^2}{\rho^2 - r_1^2} - \mu_1; \qquad C_{02} = \frac{\rho^2 + r_2^2}{\rho^2 - r_2^2} + \mu_2.$$

Расчет напряженно-деформированного состояния тонкостенных осесимметричных оболочек. Под о б о л о ч к о й понимается тело, одно из измерений которого (толщина) значительно *меньше* двух других (сравним: брусом, как известно, называется тело, одно из измерений которого, а именно длина, значительно *больше* двух других). Геометрическое место точек, равноотстоящих от наружной и внутренней поверхностей оболочки, носит название *срединной поверхности*. Если срединная поверхность является плоскостью, то оболочка превращается в п л а с т и н у.

Геометрия оболочки определяется формой срединной поверхности и законом изменения толщины этой оболочки. На практике все оболочки имеют, как правило, постоянную толщину, малую по сравнению с наименьшим радиусом кривизны поверхности. Тонкостенные оболочки можно рассматривать как противоположный предельный случай относительно толстостенных цилиндров. В частности, *осесимметричной тонкостенной* называется оболочка, имеющая форму тела вращения, толщина которой пренебрежимо мала по сравнению с радиусами кривизны ее внешней и внутренней поверхностей. Примерами машиностроительных объектов, моделируемых при расчете тонкостенными оболочечными конструкциями, являются различного рода резервуары, котлы, баки, цистерны, газгольдеры, многие строительные сооружения и др. Важной особенностью таких оболочек является то, что действующие на их внутреннюю поверхность силовые факторы перпендикулярны этой поверхности и симметричны относительно оси оболочки. В этой связи при расчете, так же как и для толстостенных цилиндров, можно пренебречь деформациями изгиба поверхности оболочки. Такая теория, построенная в предположении отсутствия изгиба оболочки, называется *безмоментной теорией*. Отличие от случая толстостенного цилиндра будет состоять в том, что напряжения по толщине стенки оболочки распределены *равномерно*.

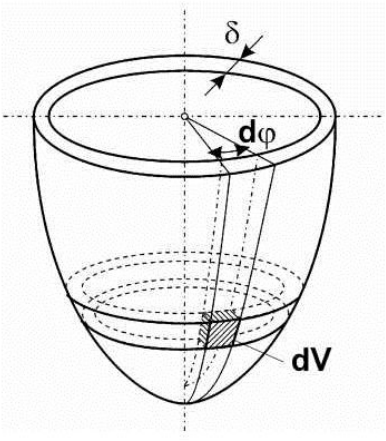


Рис. 2.8.6

Следует отметить, что на практике часто приходится иметь дело с недостаточно тонкими оболочками или с оболочками, имеющими локальные изломы, жесткие закрепления, точки приложения сосредоточенных сил и моментов. В окрестностях таких мест, разумеется, возникает изгиб, однако по мере удаления от них изгибные деформации быстро затухают, поэтому вдали от мест локальных возмущений расчет оболочки допустимо производить при указанных выше предположениях.

Рассмотрим тонкостенную осесимметричную оболочку толщины δ, подвергающуюся действию внутреннего давления p, перпендикулярного ее поверхности (рис. 2.8.6). Введем некоторые определения:

- ось оболочки — ось поверхности вращения;
- меридиональная плоскость — плоскость, проходящая через ось оболочки;
- окружная плоскость — плоскость, перпендикулярная оси оболочки;
- меридиональное сечение — сечение оболочки меридиональной плоскостью;
- окружное сечение — сечение оболочки конической поверхностью, нормальной к ее срединной поверхности, вершина которой лежит на оси;
- меридиан — линия пересечения срединной поверхности с осевой плоскостью.

Выделим из оболочки бесконечно малый элемент dV двумя парами бесконечно близких меридиональных и окружных конических сечений. Будем считать, что при нагружении оболочки на гранях этого элемента появляются нормальные *меридиональное напряжение* (направленное по дуге меридиана) σ_m и *окружное напряжение* σ_t.

Для нахождения зависимостей между возникающими напряжениями исследуем равновесие выделенного элемента (рис 2.8.7). На рисунке приняты следующие обозначения: точки A, B, C и D, принадлежащие срединной поверхности, равноудалены от наружной и внутренней поверхностей оболочки; $\rho_m = |O''A| = |O''B|$ — радиус кривизны дуги меридиана срединной поверхности $ABCD$; $\rho_t = |O'B| = |O'C|$ — радиус кривизны нормального сечения, перпендикулярного к дуге меридиана (равный отрезку нормали к срединной поверхности, заключенному между этой поверхностью и осью оболочки); O' и O'' — центры кривизны меридиана и лежащего на оси окружного сечения соответственно; ds_1 и ds_2 — площади граней AD (BC) и AB (CD).

Ясно, что вследствие осевой симметрии самой оболочки и приложенной к ней нагрузки на боковых гранях AB и CD, параллельных меридиональным плоско-

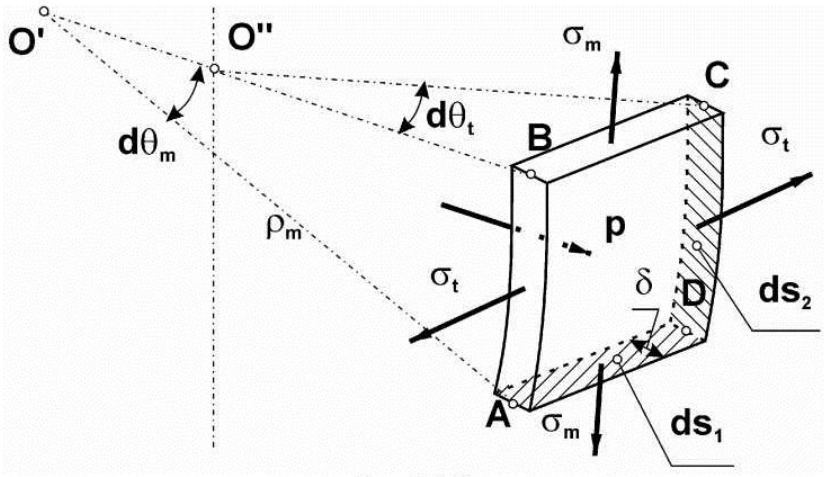


Рис. 2.8.7

стям, касательное напряжение отсутствует — на этих гранях действуют только нормальные (окружные) напряжения σ_t. Что же касается граней BC и AD, то на них в соответствии с законом парности напряжений касательные напряжения также равны нулю, и, следовательно, эти грани испытывают действие лишь меридиональных напряжений σ_m. Кроме того, к рассматриваемому элементу оболочки приложено внутреннее давление p, перпендикулярное поверхности $ABCD$. Это давление постоянно во всех точках поверхности оболочек, заполненных газом, и меняется в направлении меридиана в случае жидкого наполнителя.

Уравнение равновесия выделенного бесконечно малого элемента оболочки в проекциях на нормаль к срединной поверхности $ABCD$, как следует из рис. 2.8.7, имеет вид

$$pds_1 ds_2 - 2\sigma_t \delta\, ds_2 \sin\frac{d\theta_t}{2} - 2\sigma_m \delta\, ds_1 \sin\frac{d\theta_m}{2} = 0. \qquad (2.8.21)$$

Поскольку углы $\frac{d\theta_t}{2}$ и $\frac{d\theta_m}{2}$ малы, то их синусы можно заменить значениями самих углов, так что

$$\sin\frac{d\theta_t}{2} \cong \frac{d\theta_t}{2} = \frac{ds_1}{2\rho_t}; \qquad \sin\frac{d\theta_m}{2} \cong \frac{d\theta_m}{2} = \frac{ds_2}{2\rho_m}. \qquad (2.8.22)$$

Подстановка (2.8.22) в (2.8.21) после несложных преобразований приводит к так называемому *уравнению Лапласа*:

$$\frac{\sigma_m}{\rho_m} + \frac{\sigma_t}{\rho_t} = \frac{p}{\delta}. \qquad (2.8.23)$$

Уравнение Лапласа (2.8.23) содержит две неизвестные величины — напряжения σ_m и σ_t, поэтому определить эти напряжения можно, лишь привлекая дополнительные соотношения. В качестве таковых допустимо использовать, например, уравнение равновесия части оболочки, отсеченной перпендикулярной к меридианам конической поверхностью. Однако в некоторых частных случаях задача может быть решена только на основе соотношения (2.8.23). Так, если сферическая оболочка радиуса R наполнена газом, то вследствие центральной симметрии самой оболочки и действующей на нее нагрузки имеют место равенства

$$\rho_m = \rho_t = R; \qquad \sigma_m = \sigma_t,$$

так что из уравнения (2.8.23) получаем

$$\sigma_m = \sigma_t = \frac{pR}{2\delta}. \qquad (2.8.24)$$

В цилиндрической или конической оболочках меридиан является прямой линией, радиус кривизны которой, как известно, бесконечен, $\rho_m \to \infty$, так что

$$\sigma_m / \rho_m \to 0,\ \rho_t = R \quad \text{и} \quad \sigma_t = \frac{pR_t}{\delta}.$$

В общем случае оболочки произвольной формы ее расчет следует проводить методом конечным элементов.

Глава 2.9. **Устойчивость механических конструкций**

Под устойчивостью понимается свойство системы сохранять свое состояние при внешних воздействиях. Понятие устойчивости играет очень важную роль в механике. Дело в том, что если какая-либо механическая система сконструирована без учета требований устойчивости, то она будет чувствительна даже к незначительным внешним воздействиям, а это в конечном итоге может привести к самым нежелательным последствиям. Переход системы в *неустойчивое состояние* (или *потеря устойчивости*) так же опасен, как и потеря прочности, т. е. способен вызвать полное разрушение данной конструкции. Вот почему так важно определить границы перехода механической системы от устойчивого состояния к неустойчивому.

Определим *состояние устойчивости* механической системы как состояние, находясь в котором, система при приложении любого сколь угодно малого внешнего воздействия (т. е. воздействия, которое является не только малым, но может быть сделано меньше любой наперед заданной величины) возвращается в исходное положение равновесия после снятия внешних силовых факторов. Значение внешней силы, при которой система переходит из устойчивого состояния в неустойчивое, называется *критической силой*. Долю n внешней нагрузки по отношению к критической назовем *запасом устойчивости*.

Физический смысл устойчивости можно проиллюстрировать на простом примере (рис. 2.9.1). Если тяжелый шар находится внутри вогнутой поверхности (рис. 2.9.1a), то состояние его равновесия следует считать устойчивым, так как после малого толчка он будет двигаться со все уменьшающейся скоростью, причем чем слабее толчок, тем на меньшее расстояние шар отклонится от исходного положения. Если же шар находится в состоянии равновесия на вершине выпуклой поверхности (рис. 2.9.1b), то достаточно слегка толкнуть его, чтобы он начал с возрастающей скоростью удаляться от положения равновесия — следовательно, исходное состояние равновесия неустойчиво. Когда же шар расположен на плоскости (рис. 2.9.1c), то с точки зрения устойчивости его равновесие безразлично.

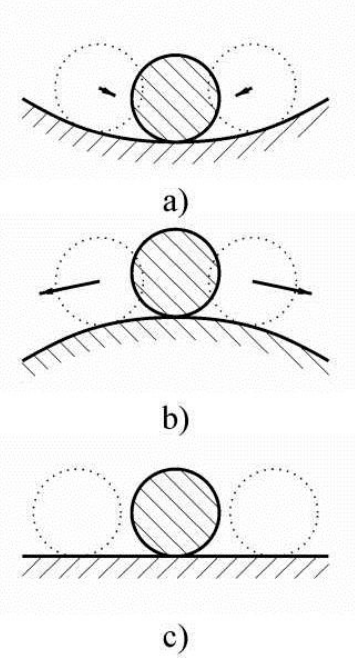


Рис. 2.9.1

Таким образом, устойчивым следует считать такое состояние механической системы, при котором любое внешнее отклонение от состояния равновесия вызывает реакцию системы, восстанавливающую это равновесие.

В качестве еще одного примера рассмотрим сжатие длинного стержня (или тонкостенной трубы) центральной осевой нагрузкой F (рис. 2.9.2). При малых деформациях стержень остается прямым и после снятия нагрузки восстанавливает первоначальное положение. Возрастание осевой нагрузки приводит к резкому увеличению деформаций изгиба. При больших значениях деформаций изгиба могут появиться признаки пластического деформирования, вследствие которых стержень не вернется в исходное состояние, а его ось останется

криволинейной. Такое явление называется *потерей устойчивости*. Следует отметить, что пластические деформации могут быть вызваны и деформациями растяжения, но в этом случае ось стержня остается прямой. Отсутствие пластических деформаций при растяжении можно проверить по условию прочности, а при сжатии — по тому из критериев (прочности или устойчивости), нарушение которого проявляется раньше.

Увеличение линейных размеров конструкции при постоянстве внешних силовых факторов также может привести к возникновению сильных пластических деформаций и даже к ее разрушению, несмотря на то, что все условия статической прочности будут выполнены.

Подобных примеров можно привести множество. Все они указывают на исключительную важность понятия устойчивости в механике.

Задача устойчивости сжатого стержня. Задачу расчета устойчивости проиллюстрируем на классическом примере: рассмотрим равновесие двухопорного стержня постоянного поперечного сечения A, нагруженного осевой силой F (задача Эйлера). После приложения осевой силы упругая линия стержня из линейной превращается в криволинейную (рис. 2.9.2). Если возникающий в сечении стержня изгибающий момент M_{nx} способен удержать стержень в изогнутом состоянии, то первоначальная прямолинейная форма равновесия стержня окажется неустойчивой. Форму упругой линии можно определить из уравнения изгиба стержня (2.5.22), справедливого при малых прогибах:

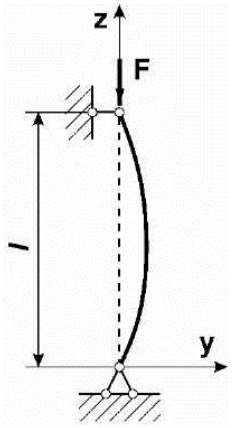


Рис. 2.9.2

$$EI_{\min} y'' = -M_{nx}. \qquad (2.9.1)$$

Здесь $I_{\min}$ — минимальный осевой момент инерции (2.3.4), $M_{nx} = Fy$ — изгибающий момент. Знак " – " в правой части уравнения обусловлен выбором направления кривизны (в данном случае кривизна уменьшается, поэтому вызывающая ее сила считается отрицательной). Записанное дифференциальное уравнение (2.9.1) можно представить в иной форме, а именно

$$y'' + k^2 y = 0, \qquad (2.9.2)$$

где

$$k^2 = \frac{F}{EI_{\min}}. \qquad (2.9.3)$$

Общее решение такого уравнения, как известно, следует искать в виде

$$y = C_1 \sin(kz) + C_2 \cos(kz). \qquad (2.9.4)$$

Постоянные интегрирования в (2.9.4) выбираются так, чтобы были выполнены граничные условия:

$$y(z=0) = 0; \qquad y(z=l) = 0.$$

Из первого условия однозначно следует $C_2 = 0$. Выполнение второго граничного условия приводит к уравнению $C_1 \sin(kl) = 0$, которое имеет два решения.

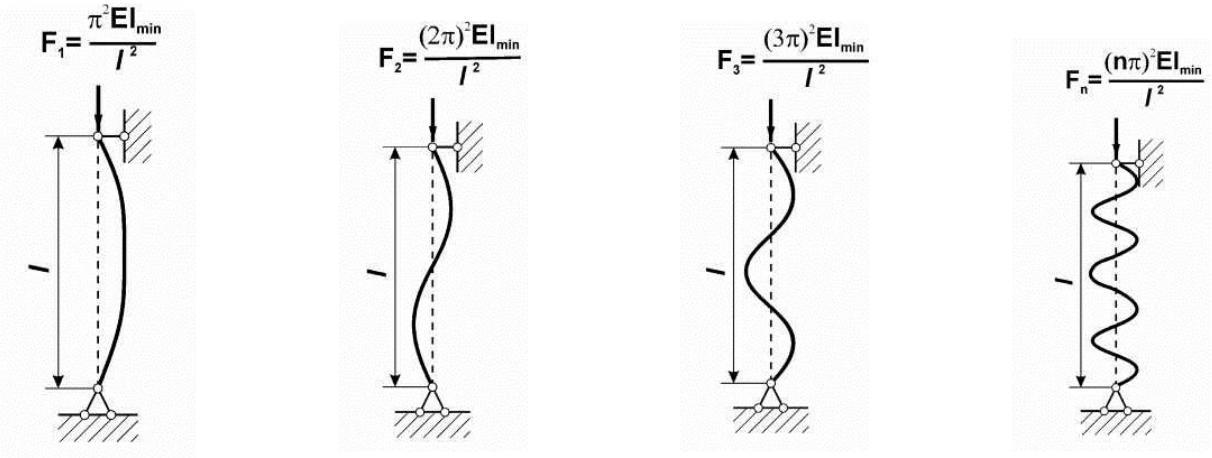


Рис. 2.9.3

Первое решение, $C_1 = 0$, соответствует варианту, при котором балка не деформируется, и практического интереса не представляет. Во втором случае, когда $\sin(kl) = 0$, получаем $kl = n\pi$, где n — произвольное целое число. Тогда для осевой нагрузки из (2.9.3) имеем

$$F = \frac{\pi^2 n^2 EI_{\min}}{l^2}. \tag{2.9.5}$$

Наличие в выражении (2.9.5) целого множителя n означает, что при данной постановке задачи осевая сила может принимать не любые значения, а только кратные n. Более того, меняя последовательно n и определяя для каждого из них функцию y, можно обнаружить, что форма стержня при этом тоже меняется. Так, при $n = 1$ стержень принимает форму полуволны синусоиды, при $n = 2$ на той же длине l укладывается уже одна полная волна, и т. д. (рис. 2.9.3). В общем случае при любом целом n упругая линия балки описывается кривой

$$y = C_1 \sin\frac{\pi n z}{l}, \tag{2.9.6}$$

которая представляет собой синусоиду, состоящую из n полуволн. Амплитуда C_1 синусоиды равняется максимальному прогибу стержня, который в рамках принятых допущений (т.е. при рассмотрении только малых прогибов, когда дифференциальное уравнение упругой линии стержня приближенно принимается линейным) определить нельзя.

Дополнительные исследования показали, что переход от деформированного состояния с $n = 1$ к состоянию с $n = 2$ всегда связан с большими деформациями при малом изменении нагрузки. Следовательно, состояние при $n = 1$ является предельным, а наименьшая отличная от нуля осевая сила $F_{\lim}$, соответствующая этому случаю, называется *критической*:

$$F_{\lim} = \frac{\pi^2 n^2 EI_{\min}}{l^2}. \tag{2.9.7}$$

Значение критической силы (2.9.7), определяющей границу устойчивости для случая сжатия стержня, впервые получено Эйлером, поэтому эта сила получила название *силы Эйлера.*

Заметим, что, так же как и в рассмотренном выше простейшем примере, решение любой задачи устойчивости сводится к определению критической нагрузки и, следовательно, коэффициента запаса устойчивости. При решении задачи Эйлера этот результат получается путем решения дифференциального уравнения изгиба для соответствующих граничных условий. Однако на практике такая схема решения не является широко распространенной, поскольку часто приводит к громоздким вычислениям.

Энергетический метод определения критических нагрузок при расчете на устойчивость. Среди других методов, используемых для решения задачи устойчивости, наиболее универсальным является приближенный метод расчета критических нагрузок $F_{\lim}$, называемый *энергетическим.* Реализация этого метода может быть эффективной при использовании вычислительной техники.

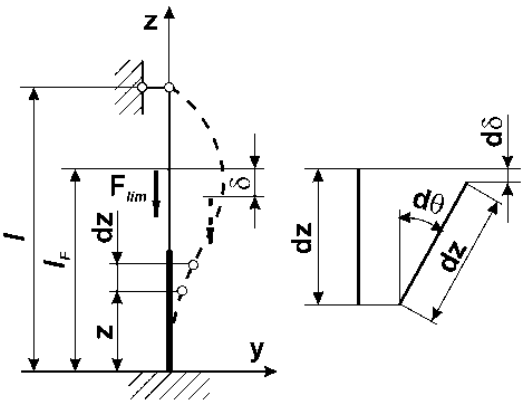


Рис. 2.9.4

Рассмотрим стержень, к которому приложена постоянная сжимающая критическая сила $F = F_{\lim}$. Очевидно, что после приложения этой нагрузки ось стержня изгибается (рис. 2.9.4), при этом критическая нагрузка $F_{\lim}$ совершает работу W_F на осевом перемещении δ:

$$W_F = F_{\lim}\delta, \tag{2.9.8}$$

В соответствии с законом сохранения энергии работа W_F должна быть равна увеличению потенциальной энергии деформации U, а именно

$$U = W_F. \tag{2.9.9}$$

С другой стороны, потенциальная энергия деформации при изгибе согласно (2.5.33) рассчитывается как сумма

$$U = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}\int_0^{l_i}\frac{M_{nx}^2 dz}{EI_{i\min}}, \tag{2.9.10}$$

где k — число участков разного поперечного сечения; i и l_i — номер текущего участка равной площади и его длина соответственно. Подставив в (2.9.10) выражение для M_{nx} из (2.9.1), перепишем (2.9.10) в виде

$$U = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}\int_0^{l_i} EI_{i\min}(y'')^2 dz. \tag{2.9.11}$$

Элемент длины dz после деформации повернется на угол $d\theta$ и сместится на

величину $d\delta$ (рис. 2.9.4). Тогда полное осевое перемещение точки приложения силы l_F может быть подсчитано по формуле

$$\delta = \int_0^{l_F} d\delta \,. \tag{2.9.12}$$

Из геометрических соображений ясно, что

$$d\delta = dz - dz\cos(d\theta) = 2\sin^2\frac{d\theta}{2}dz \,.$$

Поскольку в рассматриваемом случае углы поворота сечения деформированной балки считаются малыми, то

$$\sin\frac{d\theta}{2} = \frac{d\theta}{2} = \frac{y'}{2},$$

тогда

$$\delta = \frac{1}{2}\int_0^{l_F} (y')^2 dz \,. \tag{2.9.13}$$

Подставляя (2.9.8) и (2.9.11) в закон сохранения энергии (2.9.9) и разрешая его относительно критической силы, с учетом (2.9.13) получаем:

$$F_{\lim} = \frac{\sum_{i\ 1}^{n} \int_{l_i} EI_{\min}(y'')^2 dz}{\int_0^{l_F} (y')^2 dz} \,. \tag{2.9.14}$$

Из выражения (2.9.14) следует, что необходимым условием получения правильного решения является наличие информации, описывающей поведение упругой линии стержня. Уравнение этой кривой $y = y(z)$ приближенно может быть представлено в явной форме. К примеру, зададим его в виде степенного ряда, число членов которого на единицу больше количества граничных условий, которым необходимо удовлетворить:

$$y = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4 + \cdots + a_n z^n \,. \tag{2.9.15}$$

Постоянные множители $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ ряда (2.9.15) определяются из граничных условий, которые зависят от вида стержня, местоположения и типа опор типа, а также местоположения и вида внешних сил. При этом точность полученного результата, разумеется, напрямую зависит от точности описания формы изогнутой оси стержня.

Численные методы позволяют определить перемещение каждой точки стержня, что дает возможность использовать их для решения задачи устойчивости, не прибегая к процедуре аналитического описания изогнутой оси $y = y(z)$. При таком подходе определение производных оказывается простой численной операцией, а задача расчета устойчивости существенно упрощается.

В случае, когда на стержень действует несколько осевых сил, вызывающих его сжатие, работа этих сил имеет вид

$$W_{\sum F} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m} F_j \int_0^{l_j} (y')^2 dz, \qquad (2.9.16)$$

где j — текущее значение осевой силы, m — общее число приложенных нагрузок; l_j — расстояние от точки закрепления до точки приложения сжимающей силы.

Критические напряжения. Если максимальную из приложенных сил назвать *критической*, а остальные выразить в долях по отношении к ней, то подстановкой в уравнение сохранения энергии находится значение этой критической нагрузки. По значению критической нагрузки можно определить вызванное ею критическое сжимающее напряжение $\sigma_{\lim}$, т.е. то напряжение, при котором прямолинейная форма равновесия стержня становится неустойчивой:

$$\sigma_{\lim} = \frac{F_{\lim}}{A}. \qquad (2.9.17)$$

С целью выяснения границ применимости рассмотренной выше теории заметим, что выражение для критической силы в случае произвольного стержня допустимо представить в виде

$$F_{\lim} = \frac{\pi^2 E I_{\min}}{(\mu l)^2}, \qquad (2.9.18)$$

Таблица 2.9.1 **Значения коэффициента приведения длины μ**

Способ закрепления концов стержня	μ
оба конца шарнирно закреплены	1
оба конца заделаны	0,5
один конец заделан, а другой шарнирно закреплен	0,7
один конец заделан, а другой свободен	2

где μ — так называемый коэффициент приведенной длины стержня, зависящий от наложенных на стержень связей, изменения жесткости сечения вдоль его оси и способа нагружения стержня. Коэффициент μ позволяет при расчетах и испытаниях на устойчивость заменять произвольный случай закрепления концов стержня основным случаем, т. е. стержнем с шарнирно закрепленными концами. Таким образом, результаты испытаний для основного случая можно перенести на произвольный стержень, если для него известен коэффициент μ. Если стержень обладает постоянной жесткостью и нагружен сжимающей силой в концевых сечениях, величина μ рассчитывается методом Эйлера. Значения μ для наиболее часто встречающихся вариантов закрепления приведены в таблице 2.9.1.

Подставляя (2.9.18) в (2.9.17), получаем формулу

$$\sigma_{\lim} = \frac{\pi^2 E I_{\min}}{(\mu l)^2 A},$$

которую удобнее записать как

$$\sigma_{\lim} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}, \qquad (2.9.19)$$

где $\lambda = \mu l / i_{\min}$ — гибкость стержня; $i_{\min} = \sqrt{I_{\min} / A}$ — наименьший радиус инерции поперечного сечения стержня.

Выражение (2.9.19) носит название *формулы Эйлера для определения критических напряжений.* Ею можно пользоваться только тогда, когда напряжения $\sigma_{\lim}$ в материале стержня, вызванные действием критической силы, не превышают предела пропорциональности $\sigma_{\text{Д}}$ (рис. 2.2.3),

$$\sigma_{\lim} \le \sigma_{\text{Д}}, \qquad (2.9.20)$$

поскольку в основу ее вывода было положено дифференциальное уравнение упругой линии стержня, справедливое лишь в пределах применимости закону Гука. С учетом (2.9.19) условие (2.9.20) приобретает вид

$$\sigma_{\lim} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \le \sigma_{\text{Д}},$$

откуда

$$\lambda \ge \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{\text{Д}}}} = \lambda_{\lim}. \qquad (2.9.21)$$

В правой части (2.9.21) стоит то наименьшее значение гибкости стержня, при котором формула Эйлера еще применима, т. е. **предельная гибкость** $\lambda_{\lim} = \sqrt{\pi^2 E / \sigma_{\text{Д}}}$, зависящая только от физико-механических характеристик материала стержня — модуля упругости и предела пропорциональности. Например, для дерева $\lambda_{\lim} \approx 110$, для чугуна — $\lambda_{\lim} \approx 80$, для сталей — обычно $\lambda_{\lim} \approx 100$. Однако для сталей с повышенным значением предела пропорциональности предельная гибкость уменьшается; так, некоторые легированные стали обладают $\lambda_{\lim} \approx 60 \div 70$.

Итак, при выполнении условия (2.9.21) расчет критических сил и напряжений можно проводить по формулам Эйлера (2.9.18) — (2.9.19). Для стержней же с гибкостью меньше предельной, $\lambda < \lambda_{\lim}$, действительные критические силы и напряжения значительно меньше тех значений, которые получаются из (2.9.18) — (2.9.19). К примеру, при гибкости стального стержня, равной $\lambda = 50 < \lambda_{\lim}$, в соответствии с (2.9.19) имеем $\sigma_{\lim} \approx 800$ МПа, что намного превышает не только предел пропорциональности, но даже пределы прочности и текучести большинства

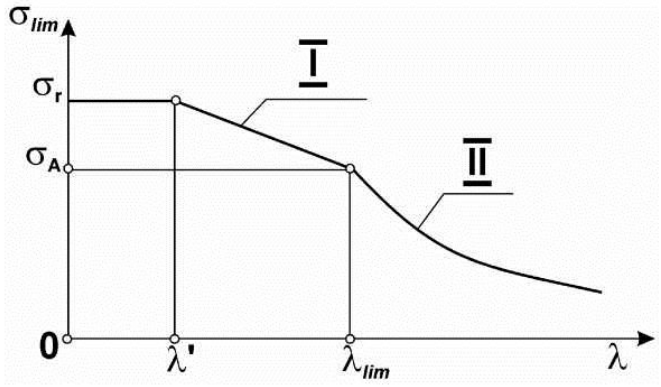


Рис. 2.9.5

сталей. В таких случаях критические параметры можно определять по эмпирическим формулам, одна из которых носит имя *Ясинского*:

$$\sigma_{\lim} = a - b\lambda\,, \qquad (2.9.22)$$

где a и b — некоторые определяемые экспериментально коэффициенты, зависящие от физико-химических свойств материала.

Формула Ясинского справедлива для пластичных материалов, гибкость которых лежит в пределах $\lambda' < \lambda < \lambda_{\lim}$. На основании анализа многочисленных экспериментальных данных установлено, что для сталей $\lambda' = 0{,}4\lambda_{\lim}$; для цветных металлов $\lambda' = 0{,}25\lambda_{\lim}$. При гибкости $\lambda < \lambda'$ напряжение $\sigma_{\lim}$ полагается постоянным и равным пределу текучести σ_r.

На рис. 2.9.5 приведен график критических напряжений, т. е. зависимость $\sigma_{\lim} = \sigma_{\lim}(\lambda)$. Из рисунка видно, что на участке $\lambda < \lambda'$ напряжение $\sigma_{\lim}$ имеет постоянное значение; участок $\lambda' < \lambda < \lambda_{\lim}$ описывается формулой Ясинского (2.9.22) — прямая I; при $\lambda > \lambda_{\lim}$ критическое напряжение определяется по формуле Эйлера (2.9.19) — кривая II.

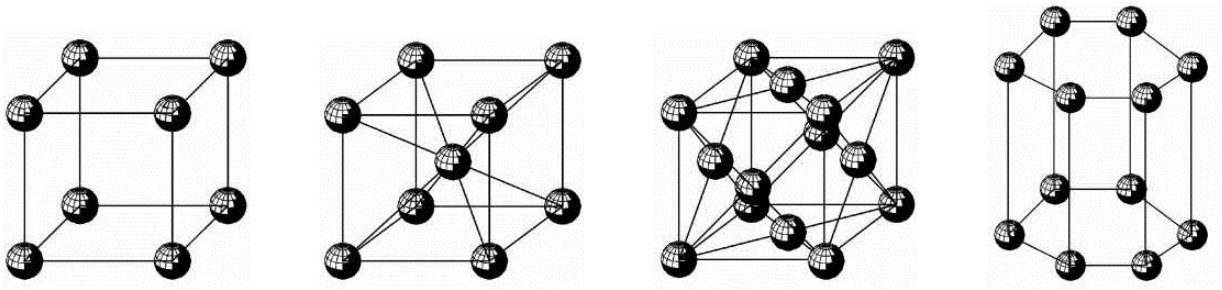
В заключение следует отметить, что решение задачи устойчивости в общем виде для любой твердотельной модели может быть выполнено методом конечных элементов.

Глава 2.10. Расчет прочности при переменном характере внешнего нагружения

Механизм разрушения деталей при их статическом нагружении. Модель материала в виде сплошного изотропного тела может быть применима только к объектам больших линейных размеров. У малых объемов, как правило, наблюдается анизотропия структуры (т. е. различие свойств по разным направлениям), которая приводит к значительному изменению механических свойств материала и их рассеянию. Если рассматривать металлы на молекулярном уровне, то можно утверждать, что они состоят из одинаковых сферических атомов с плотно упакованной кристаллической решеткой. Размеры атома обычно не превышают $(1 \div 2) \cdot 10^{-7}$ мм. Единица длины, равная 10^{-7} мм, называется *ангстремом*. Совокупность атомов, образующих периодическую структуру, называется кристаллической решеткой, а точки, в которых размещены сами атомы — узлами решетки. По местоположению узловых точек кристаллические решетки металлов бывают кубическими (рис. 2.10.1a), *объемно-центрированными* (рис. 2.10.1b), *гранецентрированными* (рис. 2.10.1c) и *гексагональными* (рис. 2.10.1d). Например, железо, хром и молибден имеют кубическую объемно-центрированную структуру, в то время как алюминий и медь — кубическую гранецентрированную. Можно привести и другие примеры, однако заметим, что атомарное строение твердых тел описывается с помощью методов физики твердого тела, и за получением более подробной информации по этим вопросам можно обратиться к любой монографии по этому разделу физики.

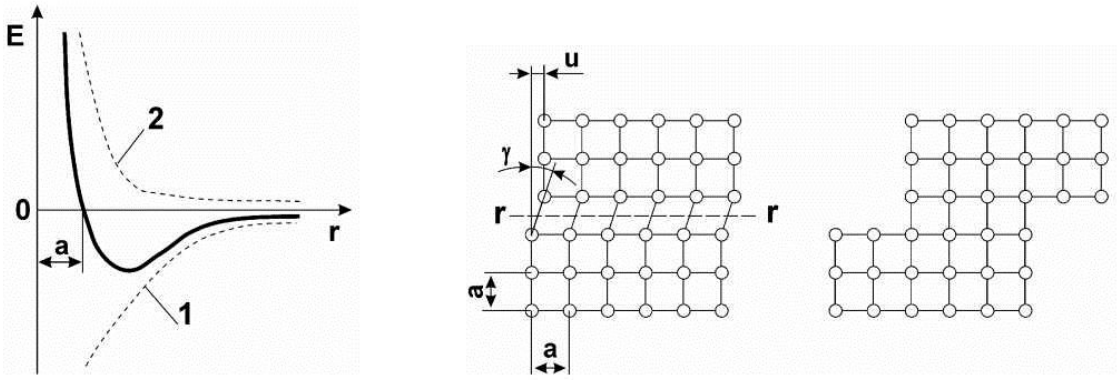
Здесь же, не вдаваясь в детали квантово — механической модели взаимодействия атомов кристаллической решетки, следует указать лишь на то, что взаимное расположение элементов кристаллической решетки обусловлено двумя параллельными процессами: отталкиванием (рис. 2.10.2a, кривая 1) и притяжением (кривая 2). Силы притяжения возникают благодаря взаимодействию электронов с положительно заряженным ядром собственного атома, а отталкивания — благодаря наличию взаимодействия электронов с ядрами соседних атомов.

В результате при отсутствии нагрузки атомы располагаются всегда на некотором расстоянии a друг от друга, где сила их взаимодействия, а, следовательно, и энергия E, равны нулю. Такое состояние кристаллической решетки является *устойчивым,* или *равновесным*. Последнее означает, что при сколь угодно малых смещениях атомов, вызванных приложением внешних сил, они возвращаются в ис-



a) b) c) d)

Рис. 2.10.1



a) b)

Рис. 2.10.2

ходное состояние после снятия нагрузки. Если перемещения относительно малы по величине, то силу взаимодействия атомов допустимо считать линейной относительно этих перемещений (рис. 2.10.2b), а деформацию — упругой. В силу абсолютной симметрии можно утверждать, что смещенные на расстояние $u = a/2$ атомы взаимодействуют с другой группой атомов, что приводит к необратимым сдвигам слоев. В свою очередь, сдвиг слоев вызывает появление пластических деформаций, величина которых кратна u. Предположим, что величина касательного напряжения τ зависит от смещений по синусоидальному закону, а именно $\tau = \tau_{\max} \sin(2\pi u / a)$, где $\tau_{\max}$ — напряжение, при котором появляются пластические деформации. Тогда очевидно, что для малых углов получаем прямо пропорциональную зависимость

$$\tau = \tau_{\max} \frac{2\pi u}{a}. \qquad (2.10.1)$$

Запишем аналогично (2.4.1) закон Гука для рассматриваемого нами случая:

$$\tau = G\gamma, \qquad (2.10.2)$$

где G — модуль упругости при сдвиге, $\gamma = u / a$ — угол сдвига. Подставляя в (2.10.2) выражение (2.10.1), имеем

$$\tau_{\max} = G / (2\pi).$$

Переходя от наибольшего касательного напряжения $\tau_{\max}$ к нормальному $\sigma_{\max}$ (для случая одноосного растяжения согласно (2.2.9) можно записать $\sigma_{\max} = 2\tau_{\max}$) и принимая во внимание, что для металлов при $\mu = 0{,}3$ модуль упругости равен $G = E / 2{,}6$, окончательно получаем

$$\sigma_{\max} = \frac{E}{2{,}6\pi} \cong \frac{1}{8} E. \qquad (2.10.3)$$

Выражение (2.10.3) говорит о том, что в случае одноосного растяжения пластические деформации начинаются при напряжениях, равных примерно одной восьмой модуля упругости E. Между тем, как показывают экспериментальные данные, напряжения,



a) b)

Рис. 2.10.3

при которых материалы начинают пластически деформироваться, могут быть ниже в десятки и даже сотни раз. Близкие к расчетным результаты наблюдаются только для кристаллов с одним центром кристаллизации (монокристаллов), выращенных в специальных условиях. Поликристаллические структуры (рис. 2.10.3a) с хаотично ориентированными кристаллическими решетками являются значительно менее прочными из-за наличия в них дислокаций (т. е. дефектов кристаллической решетки в тех местах, где имеются смещенные из устойчивого положения атомы), дефектов на границах и т. д. Можно утверждать, что металлы состоят из множества зерен, хаотично ориентированных внутри рассматриваемого объема.

Атомарная модель может быть использована при описании монокристаллических тел либо тел малых объемов, размеры которых не превышают размеров одного зерна. Тем не менее, даже если размеры объекта состоят из единичного числа зерен, может возникать явление анизотропии. Анизотропия свойств не наблюдается для металлов, имеющих большие по сравнению с размером зерен линейные размеры, так как хаотически ориентированные механические свойства зерен в совокупности приводят к усредненным характеристикам, не зависящим от направления. В этой связи и была сформулирована модель материала в виде сплошной среды, имеющей одинаковые свойства во всех направлениях (рис. 2.10.3b).

Механизм усталостного разрушения деталей. Если детали подвержены действию переменных нагрузок, то при определенных значениях переменных напряжений, возникающих внутри их объема, начинают протекать процессы зарождения и развития трещин, что, в конечном итоге, может привести к внезапному разрушению этих деталей. Зарождение трещин связано с накоплением повреждений, а их количество зависит от числа циклов нагружения детали. Вероятность появления трещины больше там, где выше уровень напряжений, и в этом смысле опасными являются как номинальные, так и местные напряжения.

Процесс зарождения трещины случаен и в сильной степени зависит от размеров зерен. Кроме того, причиной ее возникновения могут быть пластические деформации сдвига, появляющиеся в отдельных неблагоприятно ориентированных зернах. Следы таких сдвигов можно наблюдать и при малом числе циклов нагружения. Они бывают заметными даже в деталях, отработавших лишь один процент времени от фактической долговечности. Опасным местом зарождения и роста трещины является также поверхностный слой, который из-за наличия шероховатостей и поверхностных напряжений сам является концентратором напряжений. Процесс пластического деформирования вблизи поверхности оказывается более легким, чем в толще материала. Этим можно объяснить тот факт, что почти все трещины, приводящие к разрушению, начинаются с поверхности. Ярким доказательством этого служит периодическая обработка поверхности с целью удаления дефектного слоя,

которая приводит к значительному увеличению срока службы детали, работающей в условиях переменного нагружения.

Механизм разрушения детали определяется многими факторами: неоднородностью структуры материала, наличием дефектов кристаллической решетки, примесей, включений и т. п. Возникновение микроскопических трещин, чаще всего связанное с перемещением дислокаций на границу зерна и их объединением, начинается в наиболее напряженных зонах. С течением времени трещины группируются, образуя макроскопические структуры протяженностью $0{,}1 \div 0{,}5$ мм. Повреждения таких размеров, являясь дополнительными концентраторами, способны существенно изменить картину распределения напряжений, что значительно ускоряет процесс разрушения.

Скорость процесса роста трещины зависит также от температуры тела. Поскольку в процессе нагружения механическая система поглощает энергию, то ее температура при этом возрастает, что приводит к увеличению подвижности дислокаций и скорости роста трещин. Замедлить этот процесс можно с помощью теплоотвода.

Описанный выше тип разрушений является наиболее частой причиной поломки машин, однако именно он менее всего прогнозируем. Способность металла сопротивляться процессу накопления повреждений, вызванному переменным характером нагружения, называют в ы н о с л и в о с т ь ю . В основе расчетов на выносливость лежат фундаментальные экспериментальные исследования поведения материалов в условиях их переменного нагружения. Остановимся на этом более подробно.

Кривая выносливости и определение предела выносливости. В большинстве случаев смена режимов нагружения происходит периодически (циклически). Это приводит к возникновению таких же переменных напряжений. Для периодического нагружения важной характеристикой является цикл. Под ц и к л о м н а г р у ж е н и я понимается совокупность переменных напряжений за время, равное одному периоду. За время цикла напряжение меняются в пределах $\sigma_{\min} \le \sigma \le \sigma_{\max}$, где $\sigma_{\min}$ и $\sigma_{\max}$ — наименьшее и наибольшее напряжения цикла. Для характеристики цикла можно использовать следующие параметры (рис. 2.10.4):

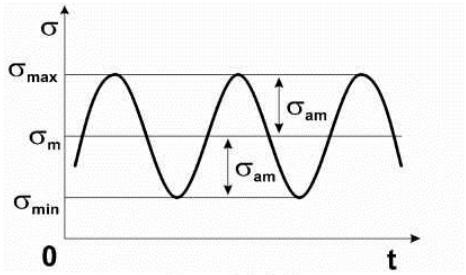


Рис. 2.10.4

- среднее (постоянное) напряжение цикла

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2}; \qquad (2.10.4)$$

- амплитудное напряжение цикла

$$\sigma_{am} = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2}; \qquad (2.10.5)$$

- коэффициент асимметрии

$$R = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}}. \qquad (2.10.6)$$

Рассмотрим несколько важных с практической точки зрения характерных циклов:

- симметричный (рис. 2.10.5a)

$$\sigma_{am} = \sigma_{\max} = -\sigma_{\min}, \quad \sigma_m = 0, \quad R = -1;$$

- асимметричный (рис. 2.10.5b)

$$abs(\sigma_{\max}) \neq abs(\sigma_{\min});$$

- пульсирующий положительный (рис. 2.10.5c)

$$\sigma_{\min} = 0, \quad \sigma_{am} = \sigma_m = \sigma_{\max}/2, \quad R = 0;$$

- пульсирующий отрицательный (рис. 2.10.5d)

$$\sigma_{\max} = 0, \quad \sigma_{am} = -\sigma_m = -\sigma_{\min}/2, \quad R = \pm\infty;$$

- постоянный (случай статического нагружения)

$$\sigma_{\max} = \sigma_{\min} = \sigma_m, \quad \sigma_{am} = 0, \quad R = 1. \qquad (2.10.7)$$

На практике наиболее просто реализовать случай симметричного нагружения (рис. 2.10.5a). В этом смысле он является базовым и лежит в основе исследований на выносливость.

Экспериментально построенная кривая, определяющая зависимость допустимого напряжения σ от числа циклов нагружения N, называется кривой выносливости. Чаще всего она строится по результатам испытания цилиндрических образцов на изгиб при их вращении. Следует отметить, что число циклов до разрушения — непостоянная величина, а потому корректное построение кри-

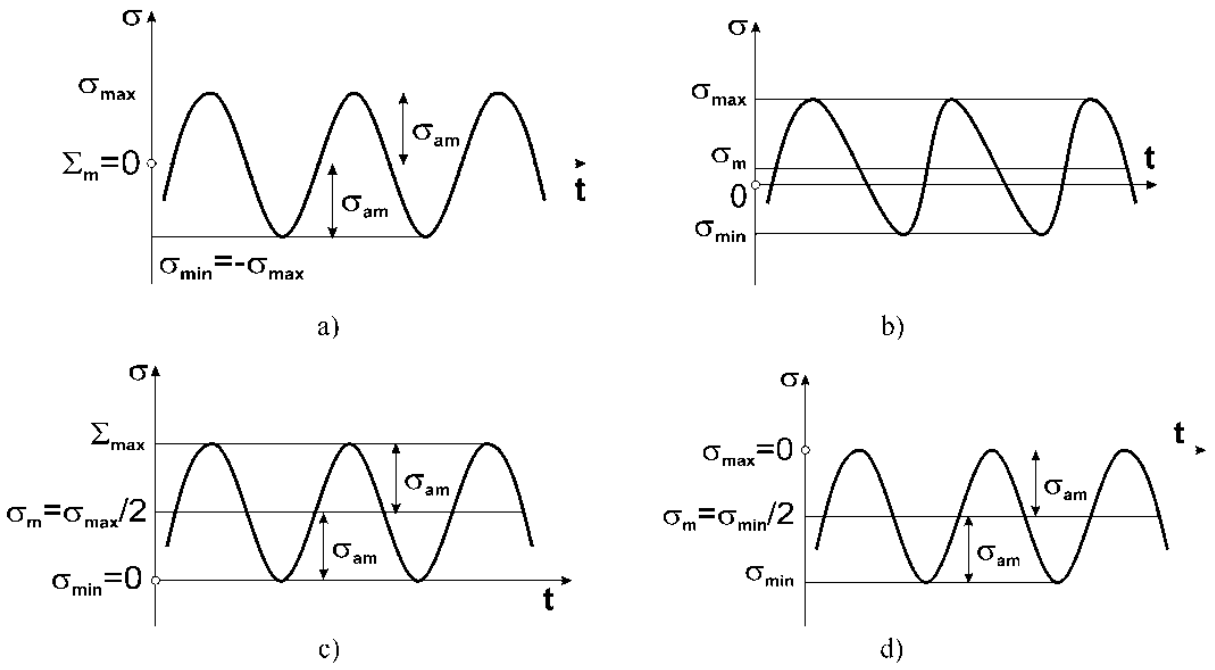


Рис. 2.10.5

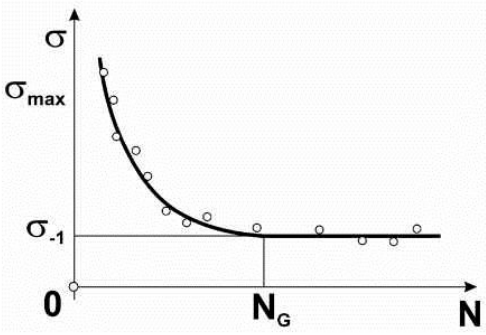


Рис. 2.10.6

вой выносливости требует довольно большого числа испытаний с последующей статистической обработкой полученных значений. В качестве примера на рис. 2.10.6 приведена кривая, отражающая данные эксперимента для образцов из углеродистой стали в условиях симметричного нагружения. Аналитическое уравнение этой кривой может быть записано в виде

$$\left.\begin{aligned} \sigma^m N = const, \quad & N \le N_G \\ \sigma = \sigma_{-1} = const, \quad & N > N_G \end{aligned}\right\}. \qquad (2.10.8)$$

Здесь m — показатель степени, зависящий от материала и термообработки. Если нет более достоверных сведений, то величину показателя степени m можно оценить с помощью формулы

$$m = 5 + \frac{\sigma_b}{80}, \qquad (2.10.8а)$$

где σ_b — предел прочности.

Как следует из рисунка, кривая выносливости делится на два участка. На первом степенная зависимость оказывается ярко выраженной, а на втором наблюдается асимптотическое стремление функции к пределу $\lim \sigma_{N\to\infty} = \sigma_{-1}$.

Уровень напряжений, соответствующий этому пределу и характеризующий усталостную прочность, называется *пределом выносливости* и обозначается σ_R, где нижний индекс равен коэффициенту асимметрии цикла. Так, в данном случае обозначение σ_{-1} говорит о том, что напряжение определяется для случая симметричного нагружения, для которого $R = -1$. Число циклов нагружения N_G, соответствующее границе перехода от первого участка ко второму, называется *базовым числом циклов*.

В области малых значений чисел циклов напряжения ограничены *пределом прочности* σ_b. Под малым значением чисел циклов следует понимать диапазон $0 < N < 10^2$, для которого нет необходимости учитывать переменный характер режима нагружения. Область $10^2 < N < 10^3$ соответствует малоцикловой усталости. Числа циклов, принадлежащие диапазону $10^3 < N < \infty$, составляют область многоцикловой усталости. Следует отметить, что режим нагружения с малым числом циклов, $N = 10^2 \div 10^3$, на практике встречается редко и поэтому здесь не рассматривается. Все дальнейшие выводы относятся к области многоцикловой усталости.

Параметры кривой выносливости определяются экспериментально, но для практического применения можно использовать приближенные зависимости, полученные с помощью обработки результатов огромного количества испытаний. Установлено, например, что предел усталостной прочности по нормальным изгибным напряжениям для сталей лежит в пределах $\sigma_{-1} = (0{,}4 \div 0{,}5)\sigma_b$, где σ_b — предел

прочности материала. Более точная зависимость описывается выражением $\sigma_{-1} = (0{,}55 - 0{,}0001\sigma_b)\sigma_b$.

Аналогично можно проводить испытания на кручение. Такие испытания по определению предела усталостной прочности по касательным напряжениям дали следующие результаты:

- для углеродистых и низколегированных сталей

$$\tau_{-1} = (0{,}5 \div 0{,}6)\sigma_{-1} \cong 0{,}25\sigma_b;$$

- для хрупких материалов (высокоуглеродистая сталь, чугун)

$$\tau_{-1} = 0{,}8\sigma_{-1}. \qquad (2.10.9)$$

Сравнивая эти результаты с полученным ранее в (2.7.35) значением предела текучести при сдвиге в статике $\tau_r = 0{,}5\sigma_r$ (или предела прочности $\tau_b = 0{,}5\sigma_b$), приходим к выводу, что для углеродистых и низколегированных сталей соотношения, характеризующие статическую и усталостную прочности, аналогичны.

Опытным путем для сталей установлено, что базовое число циклов лежит в интервале $N_G = (1 \div 3)\cdot 10^6$, поэтому при отсутствии более достоверных сведений можно принимать $N_G = 2\cdot 10^6$. Для некоторых материалов не удается обнаружить границу горизонтального участка. В этом случае используют понятие условного предела прочности. Под условным пределом прочности понимают напряжение, которое выдерживает образец при $N = 10^8$ циклах нагружения.

Влияние различных факторов на величину предела выносливости. Значение предела выносливости в сильной степени зависит от размеров образца и состояния его поверхности, наличия местных напряжений, асимметрии цикла и т. п. Остановимся на каждом из этих факторов более подробно.

1. Влияние местных напряжений. Предел прочности снижается, если кроме основных (номинальных) напряжений в образце возникают напряжения местного характера, превосходящие основной уровень (рис. 2.10.7). Местные напряжения появляются в областях резкого изменения конфигурации детали, которые называются концентраторами. В качестве концентраторов могут выступать галтели, канавки, отверстия, шпоночные пазы, шлицевые участки и т. д.

Отметим, что разделение напряжений на номинальные и местные несколько условно. Современные численные методы расчета напряженно — деформированного состояния детали позволяют определить напряжения в любой точке, включая и местные напряжения, не разделяя их по признакам. Тем не менее существующая аналитическая методика предусматривает такое деление.

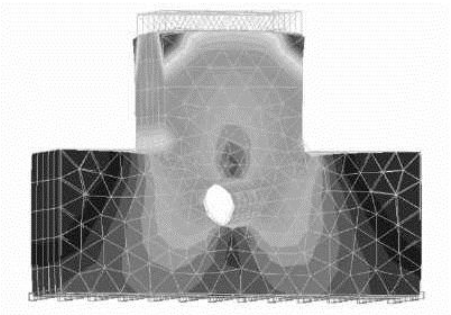


Рис. 2.10.7

Для учета местных напряжений в областях размещения концентратора вводится понятие эффективного коэффициента концентрации напряжений K_σ для нормальных напряжений и K_τ — для касательных

(здесь и далее индекс σ у поправочных коэффициентов относится к нормальным напряжениям, а τ — к касательным, или напряжениям сдвига).

Эффективный коэффициент концентрации напряжений представляет собой отношение предела выносливости стандартного образца без концентратора к пределу выносливости образца такого же размера, но с концентратором:

$$K_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_{-1c}}; \quad K_\tau = \frac{\tau_{-1}}{\tau_{-1c}}. \qquad (2.10.10)$$

Значения K_σ и K_τ можно определить через теоретические коэффициенты концентрации $\alpha_{c\sigma}$ и $\alpha_{c\tau}$, которые равны отношениям соответствующих наибольших местных напряжений к номинальным. Тогда имеем

$$K_\sigma = 1 + q(\alpha_{c\sigma} - 1); \quad K_\tau = 1 + q(\alpha_{c\tau} - 1), \qquad (2.10.11)$$

где q — коэффициент чувствительности материала к концентрации напряжений. Формула (2.10.11) является результатом обобщения экспериментальных данных о влиянии местных напряжений на усталостную прочность. Исследования показали, что коэффициент чувствительности материала q зависит исключительно от химического состава этого материала, и для практических расчетов можно воспользоваться усредненными значениями, приведенными в таблице 2.10.1. Однако этот способ довольно грубый, и ошибка при его применении достигает 25%.

Таблица 2.10.1 **Рекомендуемые значения коэффициента чувствительности материала q**

Материалы	q
литые материалы	0,1 ÷ 0,2
среднеуглеродистые и низколегированные стали	0,4 ÷ 0,6
легированные стали	0,6 ÷ 0,7
высоколегированные стали	0,9

Значения коэффициентов $\alpha_{c\sigma}$ и $\alpha_{c\tau}$ рассчитываются методами теории упругости (см. главу 3.1) либо определяются экспериментально. Кроме того, возможно нахождение этих величин при помощи систем конечно-элементного анализа (глава 3.3), реализуемых на компьютере. Что касается коэффициентов концентрации K_σ и K_τ, то для грубой ориентировочной оценки допустимо использовать следующие приближенные формулы:

- при отсутствии резких концентраторов напряжений для деталей с чисто обработанной поверхностью

$$K_\sigma = 1{,}2 + 0{,}2\frac{\sigma_b - 400}{1100}; \qquad (2.10.12)$$

$$K_\tau = K_\sigma.$$

- при наличии резких концентраторов

$$K_\sigma = 1{,}5 + 1{,}5\frac{\sigma_b - 400}{1100};$$

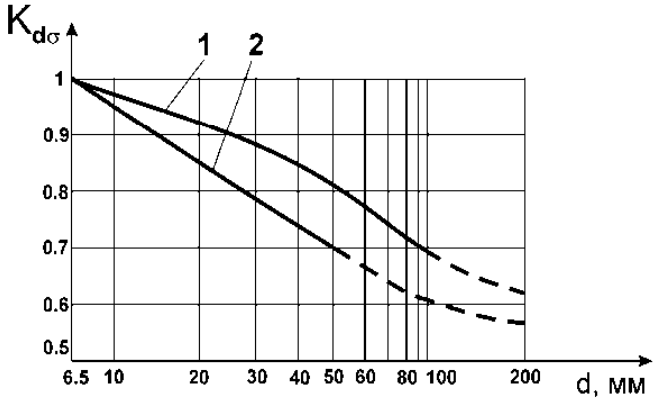
$$K_\tau = K_\sigma \ . \qquad (2.10.13)$$

2. Влияние размеров детали. С увеличением линейных размеров детали вероятность появления усталостных трещин также увеличивается, что предлагается учитывать введением масштабного коэффициента:

$$K_{d\sigma} = \frac{\sigma_{-1d}}{\sigma_{-1}}, \qquad (2.10.14)$$

где σ_{-1d} — предел выносливости образца заданного размера; σ_{-1} — предел выносливости эталонного образца диаметром $7 \div 10$ мм. Как показали многочисленные эксперименты, для работающих на изгиб геометрически подобных образцов имеют место зависимости, приведенные на рис. 2.10.8.

В тех случаях, когда достоверные сведения о значении масштабного фактора отсутствуют, рекомендуется использовать методы статистической теории подобия. Суть теории подобия применительно к усталостному разрушению состоит в следующем: твердое упругое тело представляется в виде совокупности звеньев цепи, разрушение одного из элементов которого приводит к усталостному разрушению всей цепи. При этом вероятность разрушения отдельно взятого элемента цепи не зависит от наличия других составляющих звеньев. Сформулированный таким образом принцип независимого взаимодействия отдельных элементов цепи позволяет определить вероятность усталостного неразрушения упругих тел умножением вероятностей неразрушения отдельных звеньев цепи (теорема умножения вероятностей, глава 1.1). Используя этот принцип, можно сравнить два образца, один из которых является эталонным, и посредством такого сравнения найти величину масштабного фактора требуемой детали. Более подробную информацию о теории подобия можно получить из специальной литературы (например, [19]).



1 — углеродистые стали; 2 — легированные стали

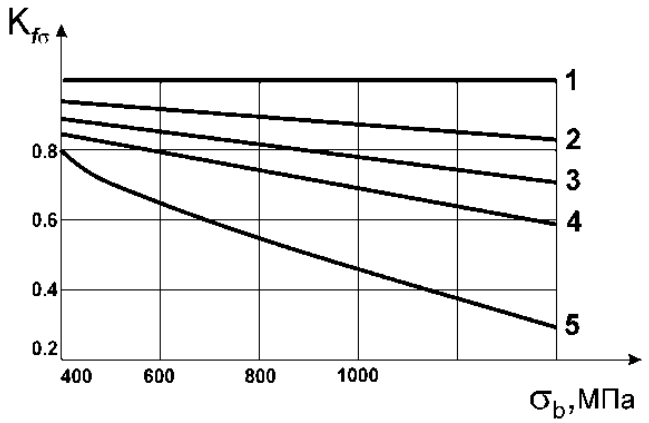
Рис. 2.10.8

3. Влияние состояния поверхности. Влияние состояния поверхности на величину предела усталостной прочности характеризуется коэффициентом качества поверхности, который численно равен отношению предела выносливости образца с фактическим состоянием поверхности к пределу выносливости геометрически подобного образца с полированной поверхностью:

$$K_{F\sigma} = \frac{\sigma'_{-1}}{\sigma_{-1}}; \quad K_{F\tau} = \frac{\tau'_{-1}}{\tau_{-1}}. \qquad (2.10.15)$$

Экспериментально установлены следующие соотношения для расчета коэффициентов качества поверхности стальных образцов ($Rz \cong 4Ra$ — высота шероховатости поверхностного слоя):

$$K_{F\sigma} = 1 - 0{,}22 \lg Rz \left(\lg \frac{\sigma_b}{20} - 1 \right), \quad Rz > 1 \text{ мкм}; \quad K_{F\sigma} = 1, \quad Rz < 1 \text{ мкм};$$



1 — полирование; 2 — шлифование; 3 — тонкое точение; 4 — грубое точение; 5 — необработанная после прокатки

Рис. 2.10.9

$$\frac{1}{K_{F\tau}} = 0.575 \frac{1}{K_{F\sigma}} + 0.425.$$

Чем прочнее материал, тем более он чувствителен к состоянию поверхности (рис. 2.10.9). В том случае, если нет достоверных сведений относительно коэффициентов K_F, при расчете следует принимать их равными единице, а приближенность выбора компенсировать соответствующим подбором коэффициентов запаса.

4. Влияние асимметрии цикла. В случае симметричного нагружения переменной нагрузкой можно определить значения коэффициентов запаса по нормальным и касательным напряжениям. Коэффициентом запаса усталостной прочности n назовем отношение предела выносливости к номинальному значению амплитудного напряжения. Таким образом, по определению для эталонного образца запас прочности по нормальным и касательным напряжениям равен

$$n_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_{am}}; \quad n_\tau = \frac{\tau_{-1}}{\tau_{am}}. \qquad (2.10.16)$$

Для детали, имеющей отличные от эталонной размеры и чистоту поверхности, а также концентраторы напряжений, соотношения (2.10.16) переписываются в виде

$$n_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{K\sigma_{am}}; \quad n_\tau = \frac{\tau_{-1}}{K\tau_{am}}. \qquad (2.10.17)$$

Здесь K — коэффициент снижения предела выносливости, равный

- для нормальных напряжений:

$$K = \left(\frac{K_\sigma}{K_{d\sigma}} + \frac{1}{K_{F\sigma}} - 1 \right) \frac{1}{K_V};$$

- для касательных напряжений

$$K = \left(\frac{K_\tau}{K_{d\tau}} + \frac{1}{K_{F\tau}} - 1 \right) \frac{1}{K_V}, \qquad (2.10.18)$$

где K_V — коэффициент упрочнения поверхности в зависимости от термической, механической и других видов обработки. Значения этого коэффициента приводятся в литературе по выносливости, например, в [19].

В общем случае нагружение асимметрично. Влияние асимметрии цикла на предел прочности при переменных режимах характеризуется диаграммой предельных амплитуд (рис. 2.10.10, кривая 1), которая позволяет определить значение предела прочности в зависимости от амплитудного и среднего напряжений. Приведенная диаграмма соответствует случаю растяжения; если речь идет о чистом сдвиге (кручении), то характер кривой не меняется, поэтому нужно везде символ σ заменить на τ. График построен таким образом, что по горизонтали отложены средние напряжения цикла σ_m, а по вертикали — амплитудные значения напряжения σ_{am}. Очевидно, что при симметричном нагружении (см. 2.10.7) максимальное значение по вертикали соответствует пределу выносливости, т. е. $OD = \sigma_{-1}$, а по горизонтали — пределу прочности, $OC = \sigma_b$.

Экспериментальная кривая предельных амплитуд, вообще говоря, имеет сложный вид, но при практическом использовании может быть приближенно заменена отрезком прямой, проведенной через точки σ_{-1} и σ_b. Такая замена не приводит к серьезным погрешностям, так как фактическое значение запаса прочности оказывается несколько больше расчетного. Упрощенная диаграмма предельных амплитуд изображена на рис. 2.10.10, линия 2. Отметим, что на этой диаграмме проведена линия границы, при переходе которой наблюдаются остаточные пластические явления (зона 3). Линия границы пластического деформирования очерчена отрезком прямой, пересекающим оси координат в точках $(\sigma_r,\ 0)$ и $(0,\ \sigma_r)$.

Очевидно, что диаграммы всех прочих циклов нагружения будут находиться внутри предельной, заданной линией 2. Обозначим через A некоторую рабочую точку цикла при произвольном асимметричном нагружении. Так как точка B соответствует предельно допустимому состоянию, то, исходя из определения, коэффициент запаса в этом случае равен

$$n = \frac{OB}{OA}. \qquad (2.10.19)$$

С учетом поправок на концентрацию напряжений, а также поверхностный и масштабный коэффициенты, координаты точки A равны: по горизонтали — среднему значению цикла σ_m, по вер-

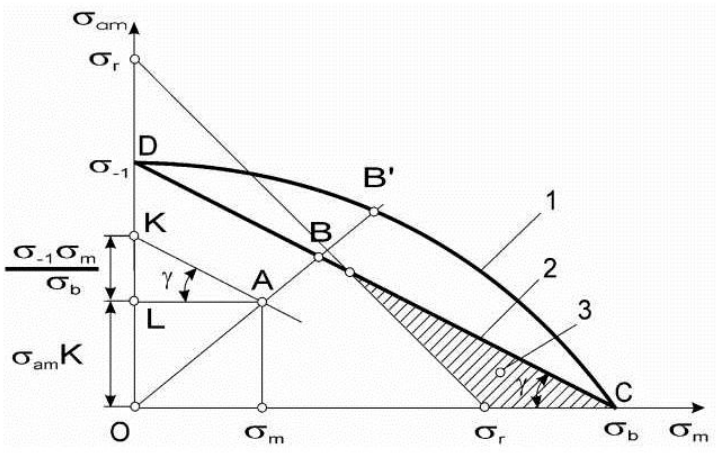


Рис. 2.10.10

тикали — значению $OL = \sigma_{am} K$. Проведем через точку A прямую, параллельную CD. Из подобия треугольников OBD и OAK следует, что $\frac{OB}{OA} = \frac{OD}{OK}$, где $OK = OL + KL$. Кроме того, из геометрических соображений очевидно соотношение $KL = \sigma_m tg\gamma$. Введем обозначения $tg\gamma = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_b} = \psi_\sigma$; $tg\gamma_1 = \frac{\tau_{-1}}{\tau_b} = \psi_\tau$. Тогда выражение (2.10.19) для определения коэффициента запаса может быть записано в виде

$$n_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{K\sigma_{am} + \psi_\sigma \sigma_m} = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_e};$$

$$n_\tau = \frac{\tau_{-1}}{K\tau_{am} + \psi_\tau \tau_m} = \frac{\tau_{-1}}{\tau_e}. \qquad (2.10.20)$$

Коэффициенты ψ_σ и ψ_τ называются коэффициентами асимметрии цикла. Их значения определяется экспериментально, а для аналитического описания рекомендуются следующие зависимости:

$$\psi_\sigma = 0{,}02 + 2 \cdot 10^{-4} \sigma_b; \qquad \psi_\tau = 0{,}01 + 10^{-4} \sigma_b.$$

Полученный результат показал, что асимметричное нагружение при расчете можно свести к симметричному. При этом величины эквивалентных напряжений σ_e и τ_e равны

$$\sigma_e = K\sigma_{am} + \psi_\sigma \sigma_m. \qquad (2.10.21)$$

$$\tau_e = K\tau_{am} + \psi_\tau \tau_m. \qquad (2.10.22)$$

Расчет статической прочности. При выполнении усталостного расчета необходимо проводить проверку статической прочности. Тогда для коэффициентов запаса имеем:

- по нормальным напряжениям:

$$n_\sigma = \frac{\sigma_r}{\sigma_{\max}} = \frac{\sigma_r}{\sigma_{am} + \sigma_m}; \qquad (2.10.23)$$

- по касательным напряжениям

$$n_\tau = \frac{\tau_r}{\tau_{\max}} = \frac{\tau_r}{\tau_{am} + \tau_m}. \qquad (2.10.24)$$

Здесь σ_r и τ_r — значения пределов текучести по нормальным и касательным напряжениям.

Задача усложняется, если имеет место случай одновременного нагружения как нормальными, так и сдвигающими напряжениями. Для выполнения этого расчета следует от совокупности двух нагружений перейти к эквивалентному растя-

жению, результатом которого будет возникновение эквивалентного напряжения σ_{ee}. Тогда

$$n = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_{ee}}. \qquad (2.10.25)$$

Для удобства расчетов запишем квадрат обратной величины коэффициента запаса, воспользовавшись гипотезой прочности по наибольшим касательным напряжениям (2.8.23):

$$\frac{1}{n^2} = \frac{\sigma_e^2 + 4\tau_e^2}{\sigma_1^2} = \frac{\sigma_e^2}{\sigma_1^2} + 4\frac{\tau_e^2}{\sigma_1^2}. \qquad (2.10.26)$$

Так как для случая чистого сдвига справедливо соотношение (2.10.9), а именно $\tau_{-1} \cong 0{,}5\sigma_{-1}$, то из (2.10.26) находим

$$\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n_\sigma^2} + \frac{1}{n_\tau^2}. \qquad (2.10.27)$$

Запишем далее выражение для расчета коэффициента запаса в общем случае произвольного нагружения. Напряженное состояние, как обычно, будем характеризовать главными напряжениями σ_1, σ_2 и σ_3. При этом среднее напряжение σ_2 не оказывает заметного влияния на процесс разрушения, а потому эквивалентное напряжение σ_{ee} согласно третьей теории прочности (2.7.23) равно

$$\sigma_{ee} = \sigma_{e1} - \sigma_{e3}, \qquad (2.10.28)$$

где σ_{e1} и σ_{e3} — наибольшее и наименьшее эквивалентные напряжения, действующие в наиболее опасной точке,

$$\sigma_{e1} = K\sigma_{am1} + \psi_\sigma\sigma_{m1};$$
$$\sigma_{e3} = K\sigma_{am3} + \psi_\sigma\sigma_{m3}. \qquad (2.10.29)$$

Условие прочности в общем виде записывается как

$$n = \frac{\sigma_{\;1}}{(\sigma_{e1} - \sigma_{e3})}. \qquad (2.10.30)$$

Следует отметить, что условие прочности (2.10.30) считается выполненным, если значение коэффициента запаса лежит в пределах $n = 1{,}5 \div 2{,}5$. Выбор значений внутри указанного интервала определяется степенью ответственности детали, для которой выполняется указанный расчет.

Напомним, что проведенное выше рассмотрение справедливо только тогда, когда число циклов N превышает базовое, $N_G < N < \infty$. Для диапазона $10^3 < N < N_G$, как следует из кривой выносливости (2.10.6), расчет ведется не по

пределу длительной прочности σ_{-1}, а по напряжению, равному $\sigma_{-1}\sqrt[m]{\frac{N_G}{N}}$, где N — фактическое число циклов нагружения, а показатель степени m для произвольных деталей вычисляется по уточненной относительно (2.10.8а) формуле

$$m = \frac{1}{K_d}\left(5 + \frac{\sigma_b}{80}\right).$$

Окончательное выражение для коэффициента запаса в указанной области имеет вид

$$n = \frac{\sigma_{-1}\sqrt[m]{\frac{N_G}{N}}}{\sigma_{ee}}. \qquad (2.10.31)$$

По формулам (2.10.29) — (2.10.30) коэффициент запаса рассчитывается и в том случае, когда внешняя нагрузка постоянна во времени.

Методика расчета усложняется, если внешняя нагрузка переменна во времени, а при каждом уровне нагружения действует определенное число циклов. Например, большой практический интерес вызывает случай блочного нагружения, который представляет собой совокупность повторяющихся блоков нагружения (рис. 2.10.11). Каждый блок состоит из нескольких ступеней нагружения, а каждая из ступеней характеризуется амплитудным напряжением σ_{ami} и числом его повторений в блоке ν_{ib}. Напомним, что число повторений амплитуд напряжений определяет число циклов нагружения.

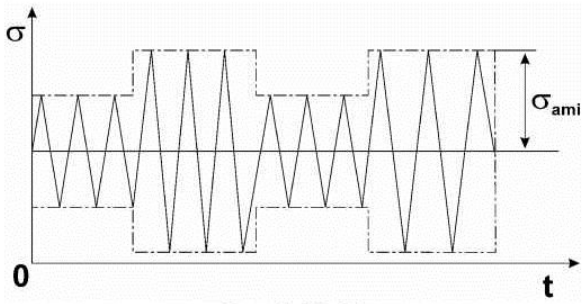


Рис. 2.10.11

Характер изменения напряжений в блоке суть асимметричный циклический процесс, подобный рассмотренному выше (см. 2.10.25). В соответствии с описанной методикой такой режим переменного нагружения сводится к эквивалентному симметричному, амплитуда которого согласно (2.10.21) равна

$$\sigma_{amei} = \sigma_{ami} + \psi_\sigma \sigma_{mi}. \qquad (2.10.32)$$

Здесь все поправочные коэффициенты, входящие в (2.10.21), приняты равными единице. Аналогично можно переписать выражение (2.10.22) для эквивалентной амплитуды по касательным напряжениям.

Для полной характеристики блочного режима необходимо также определить числа циклов нагружения на каждой из амплитуд. Все эти характеристики мож-

но извлечь либо из осциллограмм нагружения, полученных в результате прямых испытаний, либо по принятым прототипам, подобным фактическим условиям нагружения. Обработку осциллограмм обычно выполняют с помощью компьютера.

Расчет на прочность и долговечность при переменном характере изменения напряжения. Переменное во времени нагружение детали может быть описано гистограммой относительного нагружения, показанной на рис. 2.10.12. Здесь по вертикальной оси отложено значение текущего напряжения, вызванного внешними силовыми факторами, а по горизонтальной — число циклов действия этих напряжений. Такой график нагружения может быть построен для проектируемого оборудования исходя либо из характера заданного внешнего нагружения, либо из характера нагружения работающего прототипа. Иными словами, гистограмму можно получить по известному графику зависимости нагрузки от времени. Кроме того, для выполнения расчета предлагаются готовые прототипы режимов, к которым можно свести режим работы проектируемого оборудования. Эти прототипы представлены в виде графиков и приведены в литературе. Использование прототипа значительно облегчает аналитический расчет долговечности при переменном характере нагружения.

Расчет долговечности при переменном характере внешнего нагружения проводится на основе гипотезы линейного суммирования. Согласно этой гипотезе усталостное повреждение, вносимое напряжением σ_i, составляет некоторую долю, равную N_i / N_{0i}, от полного повреждения, соответствующего появлению усталостных трещин и разрушению (рис. 2.10.13). Здесь под N_i понимается фактическое число циклов нагружения при напряжении σ_i, а под N_{0i} — предельное при данном уровне напряжений число циклов нагружения, определяемое из кривой выносливости. Разрушение наступает тогда, когда выполняется условие

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{N_i}{N_{oi}} = 1, \qquad (2.10.33)$$

где k — полное число уровней напряжений. Выражение (2.10.33) представляет собой аналитическое выражение гипотезы линейного суммирования повреждений.

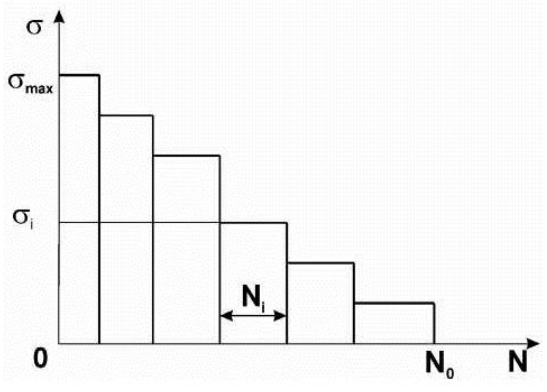


Рис. 2.10.12

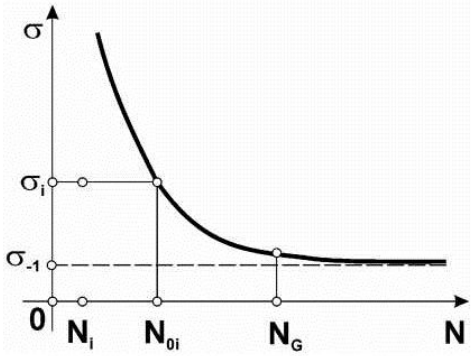


Рис. 2.10.13

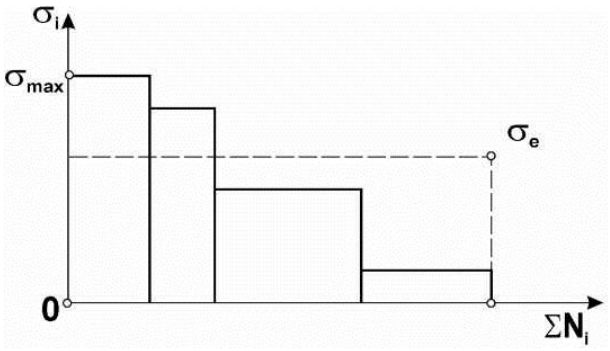


Рис. 2.10.14

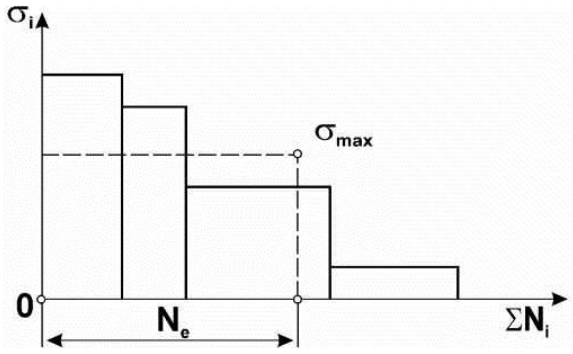


Рис. 2.10.15

Как следует из уравнения кривой выносливости (2.10.8), на криволинейном участке (при $10^3 < N_i < N_G$) это уравнение можно представить в виде

$$N_{0i} = \frac{\sigma_{-1}^m N_G}{\sigma_i^m}. \qquad (2.10.34)$$

Подставляя (2.10.34) в (2.10.33), находим

$$\sum_{i=1}^{k} N_i \sigma_i^m = \sigma_{-1}^m N_G \ . \qquad (2.10.35)$$

Суть метода расчета заключается в приведении рассматриваемого переменного режима к эквивалентному постоянному с напряжением σ_e (рис. 2.10.14) и числом циклов нагружения $N_0 = \sum_{i=1}^{k} n_i$, равным сумме чисел циклов переменного режима. Под эквивалентным понимается такой режим постоянного нагружения, который вызывает за одинаковый период времени такое же усталостное разрушение, что и рассматриваемый переменный.

Используя уравнение кривой выносливости (2.10.8), запишем

$$\sigma_{-1}^m N_G = \sigma_e^m N_0, \qquad (2.10.36)$$

откуда с учетом (2.10.35) получаем

$$\sigma_e = [\frac{1}{N_0} \sum_{i=1}^{k} N_i \sigma_i^m]^{\frac{1}{m}}. \qquad (2.10.37)$$

В некоторых случаях оказывается удобным привести переменное нагружение к постоянному с напряжением $\sigma_{\max}$, равным наибольшему значению напряжения при переменном режиме. Очевидно, что при таком варианте эквивалентного приведения число циклов до разрушения, называемое эквивалентным числом циклов N_e (рис. 2.10.15), будет меньше полного числа циклов. Эквивалентное

число циклов, по аналогии с (2.10.36), определяется из уравнения

$$\sigma_{-1}^{m} N_G = \sigma_{\max}^{m} N_e,$$

откуда, с учетом (2.10.33), получаем

$$N_e = \sum_{i=1}^{k} N_i \frac{\sigma_i^m}{\sigma_{\max}^m}. \qquad (2.10.38)$$

Выбор формы приведения переменного режима к постоянному — с эквивалентным напряжением (2.10.37) или с эквивалентным значением числа циклов (2.10.38) — зависит от характера решаемой задачи и предпочтений разработчиков конкретных методик.

Описанный метод приведения переменного режима нагружения к постоянному в полной мере относится и к случаю случайного нагружения.

Схематизация процесса усталостного разрушения при случайном изменении напряжений. Рассмотренные выше зависимости относятся к регулярным законам изменения напряжений во времени и в большой степени носят частный характер. Методика расчета при случайном нагружении (когда внешняя нагрузка переменна во времени и не может быть описана периодической функцией) отличается от расчета режима циклического нагружения. В общем случае характер изменения напряжений случаен, что, в конечном итоге, вынуждает воспользоваться методами схематизации.

Экспериментальные исследования показывают, что из всех известных методов схематизации наиболее полно отражают физическую сущность процесса разрушения *метод дождя* и *метод полных циклов*. Эти два метода приводят к близким результатам, а потому ниже кратко рассмотрим в качестве примера метод полных циклов.

Основой для расчетов в области случайных нагружений является кривая напряжений, записанная в процессе наблюдения в течение некоторого промежутка времени (рис. 2.10.16а). Процесс обработ-

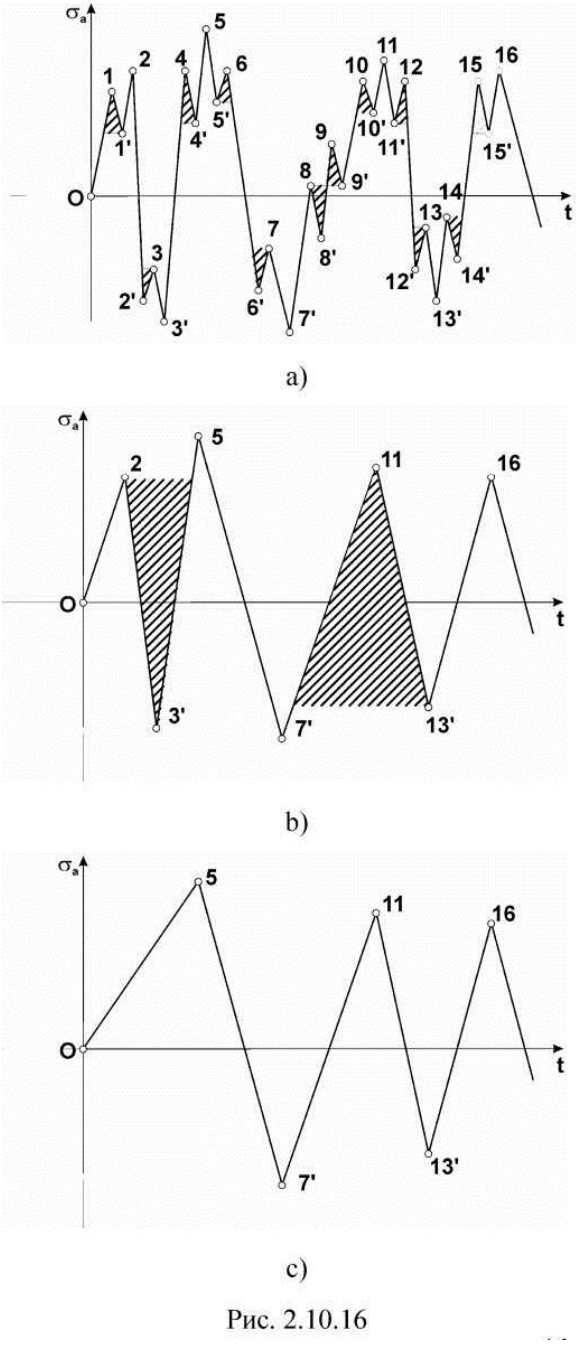


Рис. 2.10.16

ки кривой напряжений по методу полных циклов начинается с нахождения максимумов и фиксации размахов локальных высот (рис. 2.10.16a) с их последующим отбрасыванием (рис. 2.10.16b). Результаты подсчета количества циклов и соответствующих им амплитуд сохраняются и заносятся в таблицу (таблица 2.10.2). По мере увеличения высот график схематизированной кривой становится реже (рис. 2.10.16c). Кроме амплитудных значений, следует хранить и средние значения подсчитанных напряжений. Все эти данные позволяют представить кривую случайного нагружения как совокупность блочных режимов. Дальнейшая обработка блочного режима нагружения даст возможность свести его к режиму симметричного знакопеременного нагружения, которое вызывает процесс разрушения, аналогичный процессу разрушения при случайном нагружении. Эти операции приведения удобно выполнять с помощью компьютера.

Таблица 2.10.2. **Значения размахов напряжений, выделенные методом полных циклов**

Обозначение	$2\sigma_{ami}$, МПа	Обозначение	$2\sigma_{ami}$, МПа	Обозначение	$2\sigma_{ami}$, МПа
1—1'	8	9—9'	8	2—3'	48
2'—3	6	10—10'	7	11—13'	46
4—4'	10	11'—12	8,5	5—7'	58
5'—6	6,5	12—13'	9,5	16—16'	41
6'—7	9	14—14'	9		
8—8'	10	15—15'	10,5		

Глава 2.11. Машиностроительные материалы

Выбор материалов существенно влияет на себестоимость машин, механизмов и конструкций. Материалы во многом определяют массу конструкции, занимаемый ею объем и энергетические затраты при работе механического оборудования. Доля их стоимости в современном машиностроении может доходить до 75% от общей стоимости машины. Этот факт заставляет разработчиков конструкций серьезно относиться к процедуре выбора материалов и их термообработке.

Для разных условий работы и различных сред, в которых эксплуатируется оборудование, используется множество разнообразных материалов, которые наилучшим образом соответствуют тем или иным условиям эксплуатации.

Важным фактором, лежащим в основе выбора материалов и методов их обработки, является экономическая целесообразность. Для уменьшения объема механической обработки и, следовательно, снижения себестоимости производства рекомендуется использовать наборы заготовок, выполненные в форме уголков, труб, швеллеров и т. д. со стандартными поперечными сечениями.

Следует отметить также, что окончательно решение по выбору материалов и технологии изготовления следует принимать после всестороннего анализа всех показателей, которые так или иначе влияют на работоспособность конструкции.

Основные свойства материалов. Основными техническими характеристиками материалов, влияющие на работоспособность машины или конструкции, являются:

- прочность;
- упругость;
- пластичность;
- выносливость;
- твердость;
- износостойкость;
- теплостойкость.

Прочность — способность материала сопротивляться нагрузкам без разрушения. Количественной характеристикой является предел прочности σ_b, под которым понимается напряжение, приводящее к разрушению материала.

Упругость — свойство материала восстанавливать форму и размеры после снятия нагрузки. Основной количественной характеристикой упругости служит перемещение под действием единичной нагрузки, которое в свою очередь зависит от модуля упругости E и коэффициента Пуассона μ.

Пластичность — свойство материала сохранять значительные пластические деформации после снятия нагрузки. Характеризуется пределом текучести σ_t — напряжением, при котором величина остаточной пластической деформации не превышает 0,2 %.

Выносливость — способность материала сопротивляться разрушению от усталости. Количественно характеризуется пределом выносливости σ_1, равным наибольшему напряжению, которое образец выдерживает без разрушения при неограниченном числе симметричных циклов нагружения.

Твёрдость — способность материала сопротивляться внедрению индентора. Наибольшее распространение получили методы определения твердости, выраженной в единицах HB. Для получения числового значения твердости HB на металлическую поверхность устанавливают шар диаметром D, который нагружается силой F, в результате чего на плоской поверхности появляется отпечаток диаметром d, вызванный пластической деформацией этой поверхности. Очевидно, что чем выше твердость поверхности, тем меньше диаметр отпечатка. Связь диаметров D и d со значением твердости определяется следующей формулой:

$$HB = \frac{0{,}102 \cdot 2F}{\pi D\left(D - \sqrt{\left(D^2 - d^2\right)}\right)}.$$

Испытания показали, что между пределом прочности и величиной твердости существует следующая зависимость:

сталь	$\sigma_b = 0{,}34HB$;
медные сплавы	$\sigma_b = 0{,}45HB$;
алюминиевые сплавы	$\sigma_b = 0{,}35HB$.

Поскольку твердость поверхности для стали $HB \geq 450$, а для цветных металлов $HB \geq 200$, то расчет твердости этих материалов по вдавливанию шарика оказывается неудобным из-за малых размеров полученного отпечатка. Поэтому в таких случаях рекомендуется заменять шарик алмазной призмой и замерять глубину ее проникновения. Замеры глубины проникновения выполняются при нагружении начальной h_0 и рабочей h силами. Разность полученных размеров определяет твердость поверхности, выраженную в единицах HRC.

Износостойкость — способность материалов сохранять без разрушения поверхностные слои, участвующие в относительном движении при контактном взаимодействии. Износостойкость можно характеризовать скоростью износа, которая зависит от выбора материалов в контакте, величины твердости поверхности, вида смазки и используемого сорта масла. Контактирующие поверхности в таком случае, как правило, упрочняются.

Теплостойкость — способность материала сохранять свои свойства при работе в среде высоких температур.

Металлы и их атомарное представление. Наилучшими материалами при создании машин считаются металлические, а потому их следует рассмотреть более подробно.

На молекулярном уровне металлы имеют кристаллическую решетку, которая определяет порядок размещение атомов. Для чистых металлов с идеальным размещением атомов разрушение вызывается возможным относительным сдвигом слоев кристаллической решетки. Прочность таких металлов называется теоретической прочностью. Касательное напряжение, соответствующее вызванному сдвигом слоев началу пластического деформирования, как было показано ранее (глава 2.10), равно $\tau_r = G / 2\pi$. Результаты, полученные при испытаниях материалов на растяжение, показали, что теоретическое значение прочности в 100—1000 раз превышает значения технической прочности. Происходит это оттого, что в дей-

ствительности кристаллическая решетка имеет множество дефектов, которые существенно снижают прочность материала (см. главу 2.10). Кроме того, формирование кристаллической решетки металла (в процессе его получения из расплава путем охлаждения) начинается одновременно в нескольких точках, что в конечном итоге приводит к образованию поликристаллических структур. Прочность металла также снижается за счет дефектов кристаллических решеток в местах дислокаций и на границе. Чем больше скорость образования зародышей и чем меньше скорость их роста, тем меньше размер зерна и тем больше их количество. Следовательно, металл можно представить как совокупность зерен, хаотично ориентированных в пространстве (рис. 2.10.3а).

Дефекты самой кристаллической решетки можно рассматривать либо как вакансии, когда в той или иной точке кристаллической решетки отсутствует атом или группа атомов, либо как межузловые дефекты, когда внутри кристаллической решетки появляется лишний атом. Для металлов, атомы которых плотно упакованы, межузловые дефекты нехарактерны.

Разрушение представляет собой процесс зарождения и развития трещины. Под разрушением при этом понимается разделение металла на части, вызванное ростом трещины. По характеру разрушение может быть хрупким и вязким. Механизм разрушения всегда связан с зарождением и ростом трещины. Трещина возникает, как правило, в результате слияния подвижных дислокаций. Для вязкого разрушения характерна малая скорость распространения трещины, а при хрупком трещина растет мгновенно, причем процесс разрушения отличается внезапностью.

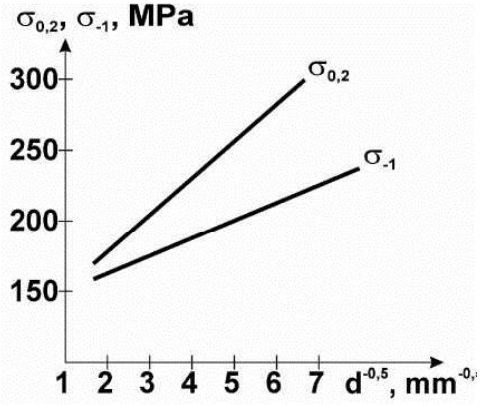


Рис. 2.11.1

Прочность материала можно повысить, изменяя химический состав и технологию обработки. Прочность растет также при уменьшении количества дефектов кристаллической решетки. Плотность дислокаций не должна превышать $10^{12} - 10^{13}$ см$^{-2}$, так как при большей плотности нагружение будет вызывать стремительный рост трещин и, следовательно, разрушение металла.

Сопротивление пластической деформации тем больше, чем меньше подвижность атомов и чем больше барьеров на пути их распространения. Существенным препятствием на пути продвижения трещины является граница зерна. По этой причине все металлы, имеющие мелкозернистую структуру, оказываются более прочными.

На рис. 2.11.1 представлен график зависимости предела текучести и предела выносливости для низкоуглеродистой стали от диаметра зерна. Видно, что такая зависимость оказывается линейной.

Железо и сплавы на его основе. *Железо* Fe — это металл сероватого цвета, атомная масса которого равна 55,85, атомный радиус — 0,127 нм, температура плавления — $1539^0 C$. В твердом состоянии железо имеет кристаллическую решетку, для которой характерно два возможных состояния, называемых полиморфными модификациями и обозначаемых, как $\alpha - Fe$ и $\gamma - Fe$. Существование этих

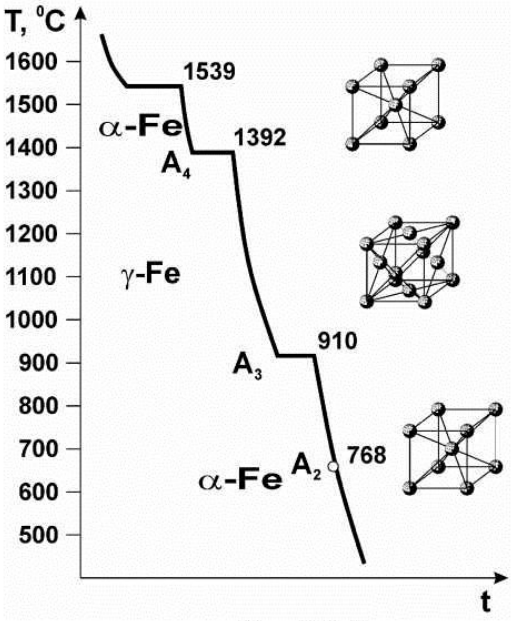


Рис. 2.11.2

модификаций зависит от температуры нагрева.

На рис. 2.11.2 наглядно показаны области существования каждой из модификаций и соответствующие им структуры кристаллической решетки для железа без наличия примесей. Для $\alpha - Fe$ характерна объемно-центрированная кубическая решетка, которая существует при температурах менее $T \le 910^0 C$ и в диапазоне $T = (1392 \div 1539)^0 C$. В диапазоне температур $T = (910 \div 1392)^0 C$ железо существует в форме $\gamma - Fe$.

Углерод является неметаллическим элементом, который растворяется в железе как в жидком, так и твердом состояниях. Чаще всего система $Fe - C$ существует в виде жидкого сплава или твердого раствора. Твердыми растворами называют такие фазы, в которых один из компонентов сохраняет кристаллическую структуру, а атомы других компонентов присутствуют в решетке первого, изменяя ее размеры. Различают твердые растворы замещения и внедрения.

Твердый раствор углерода и других примесей в $\alpha - Fe$ называется ферритом. Углерод при этом располагается в центре грани куба, в котором может поместиться сфера с радиусом, равным $0{,}29R$, где R — атомный радиус железа.

Раствор углерода и других примесей в $\gamma - Fe$ называют аустенитом. Атом углерода при этом размещается в центре куба со вписанной сферой радиусом $0{,}41R$. Аустенит характеризуется высокой пластичностью и низкой прочностью.

Наиболее распространенными сплавами на основе железа являются *сталь* и *чугун*, которые представляют собой твердые растворы (сплавы) железа Fe с углеродом C. Если содержание углерода в растворе менее $2{,}14\%$, то сплав называется сталью, а если больше $2{,}14\%$, то чугуном. Граница разделения чугуна и стали соответствует предельной растворимости углерода в аустените. Стали после затвердевания не содержат хрупкой структурной составляющей и при высоком нагреве имеют только аустенитную структуру, обладающую высокой пластичностью. По этой причине стали легко деформируются при нормальных и повышенных температурах, т. е. являются ковкими материалами. В отличие от сталей чугуны характеризуются хрупкостью, но обладают хорошими литейными свойствами, в том числе более низкой температурой плавления.

Стали. Стали, применяемые при изготовлении машин и конструкций, можно условно разделить на *углеродистые* с содержанием углерода $C < 0{,}25\%$, *среднеуглеродистые* с $C = (0{,}25 \div 0{,}6)\%$ и *высокоуглеродистые* с $C > 0{,}6\%$. Углеродистые стали являются наиболее распространенным. Их производство доходит до 80% от

общего объема производства всех сталей. Они используются, как правило, для изготовления малонагруженных деталей, металлоконструкций, всевозможных корпусных деталей и т. д.

Механические свойства сталей можно характеризовать пределом прочности σ_b и пределом текучести σ_T, значения которых в сильной степени зависят от химического состава стали и ее термообработки. Кроме того, для сталей характерны постоянные значения модуля упругости E и коэффициента Пуассона μ, которые независимо от марки можно полагать равными соответственно $E = 2{,}1 \cdot 10^5$ МПа и $\mu = 0{,}3$. С увеличением процентного содержания углерода повышаются характеристики прочности и снижается пластичность.

Кроме углерода, в состав сталей включают и другие элементы. Такие стали называются *легированными*. Они обладают большой статической прочностью, а также прочностью при переменных режимах нагружения. В качестве легирующих элементов, как правило, используются:

- хром Cr;
- кремний Si;
- никель Ni;
- ванадий V;
- алюминий Al;
- марганец Mn и другие.

Стали, в которых суммарное содержание легирующих элементов не превышает 2,5 %, называются *низколегированными*; если содержание легирующих элементов составляет $(2{,}5 \div 10)\%$ — это *легированные* стали, а если легирующих добавок больше 10% , то такие стали называют *высоколегированными*.

Коррозийно-стойкие стали обладают стойкостью против коррозии. Это большая группа высоколегированных сталей, у которых в качестве легирующего элемента чаще всего используется хром $(13 \div 25)\%$ или иногда никель.

Материалы с высокими упругими свойствами (*пружинные стали*) — это углеродистые либо легированные стали, с большим содержанием углерода, $(0{,}5 \div 1{,}1)\%$.

Чугун. *Чугун* — сплав железа Fe и углерода C (свыше 2%), содержащий легирующие элементы, которые вводятся для получения заданных свойств. Повышенное содержание углерода улучшает его литейные свойства при одновременном увеличении хрупкости. Благодаря хорошим литейным свойствам и низкой стоимости чугун используется для изготовления конструкций сложных конфигураций. Из-за относительно низкой стоимости чугун применяется для изготовления массивных деталей, например, корпусных, и различного рода станин.

Чугун можно рассматривать как сталь, пронизанную графитом, который играет роль надрезов, ослабляющих металлическую основу структуры. В этом случае механические свойства чугуна зависят от характера распределений включений графита и от их величины. Чем меньше графитовых включений и чем они мельче, тем выше прочность чугуна. Таким образом, можно сказать, что для чугуна характерно нарушение сплошности, и это обстоятельство делает его мало чувствительным ко всевозможным концентраторам.

В отличие от стали чугун не подвержен остаточному пластическому деформированию, следовательно, не имеет предела текучести. Характеристикой чугуна является только предел прочности, причем предел прочности при сжатии σ_{bc} оказывается существенно выше, чем предел прочности при растяжении σ_{bt}.

Важной механической характеристикой любого материала является модуль упругости. Для чугуна его величина может быть рассчитана по формуле $E = (4{,}5 \div 5) \cdot 100\sigma_b$, если предел прочности σ_b находится в границах $\sigma_b = (100 \div 300)$ МПа.

Для этих материалов закон прямой пропорциональной зависимости деформации от нагрузки справедлив не в полной мере, поэтому решения, полученные методами линейной теории упругости, применительно к чугуну могут иметь значительно большие погрешности, чем для других материалов.

В зависимости от химического содержания и вариантов термообработки чугун подразделяется на несколько типов. *Серый* чугун представляет собой сплав Fe, Si и C, содержащий примеси Mg, P, S. Этот тип чугуна является наиболее дешевым (что определяет его широкое применение), однако имеет малую механическую прочность. Для обеспечения возможности обработки давлением имеется разновидность *ковкого* чугуна, который обладает повышенной пластичностью.

Созданы также чугуны, имеющий повышенную по отношению к другим маркам прочность. Эти марки в качестве легирующих добавок имеют Cr, Mg и некоторые другие компоненты. Такой чугун допускает закалку поверхности и упрочнение ее наклепом.

Некоторые марки чугуна (при добавлении к ним таких легирующих элементов, как Mg, Cu, Si и т. д.) обладают антифрикционными свойствами, для которых характерно низкое значение коэффициента трения, и малой скоростью износа поверхностного слоя. Такой чугун рекомендуется использовать в качестве материала для изготовления работающих в условиях относительного скольжения деталей, трущиеся поверхности которых допускают процедуру закалки.

Медь и сплавы на ее основе. *Медь Cu* — это металл красноватого цвета плотностью 8,94 г/см^3, имеющий гранецентрированную кристаллическую решетку с периодом a = 0,31607 нм.

На основе меди получают различные сплавы, которые широко используются в качестве материалов для изготовления различных деталей. Эти сплавы обладают хорошими механическими и антикоррозийными свойствами, они износостойки, имеют низкий коэффициент трения, высокую электро- и теплопроводность. Различают две основные группы медных сплавов: *латунь* — сплав меди Cu с цинком Zn и *бронза* — сплав меди с другими элементами.

Содержание цинка в латуни достигает $(40 \div 45)\%$. Латунь пластична и обладает хорошими литейными свойствами; предел ее текучести лежит в диапазоне $\sigma_r = 250 \div 450$ МПа. Прочность латуни можно несколько повысить за счет использования обработки давлением при высокой температуре. В состав латуни часто вводят легирующие добавки (например, Al, Zn, Si, Mn, Ni, Pb), которые повышают прочность, но снижают пластичность.

По технологическим признакам латунь разделяется на две группы: предназначенная для обработки давлением и для изготовления деталей, полученных литьем.

Литейная латунь содержит большое количество легирующих добавок для улучшения литейных качеств.

Детали из латуни часто используются в судостроении, так как они обладают стойкостью к морской воде, особенно те из них, которые легированы оловом. Если латунные детали выполняются прокаткой, то затем они подвергаются отжигу для уменьшения твердости.

Для химического состава *бронзы* характерно наличие основного легирующего компонента, в качестве которого применяют:

- олово Sn;
- алюминий Al;
- железо Fe;
- кремний Si;
- хром Cr;
- бериллий Be и некоторые другие.

Сплав меди с оловом Sn обычно содержит до $(10 \div 12)\%$ олова. Если увеличить содержание олова, то сплав приобретает повышенную хрупкость. Обычно этот тип бронзы дополнительно легируют Zn, P, Pb, Ni, Fe и другими элементами. При этом цинк Zn улучшает технологические свойства сплава и снижает его стоимость. Фосфор P улучшает литейные свойства бронзы, никель Ni положительно влияет на механические характеристики и улучшает коррозийную стойкость, железо Fe повышает сопротивление коррозии.

Медь, легированная алюминием Al, представляет собой сплав с содержанием алюминия до 9%. Помимо алюминия, этот тип бронзы часто содержит дополнительные легирующие добавки, например, Fe, Ni, Mg и др. Такая бронза хорошо сопротивляется коррозии, и ее можно использовать для производства деталей, работающих в морской воде и других агрессивных средах. Кроме того, она имеет высокие механические и технологические свойства.

При легировании меди кремнием (до 3,5% Si) существенно повышаются прочность и пластичность сплава. В таких сплавах кроме основного легирующего компонента используются и другие легирующие добавки, такие как Mg и другие. Благодаря хорошим технологическим и механическим свойствам подобные бронзовые сплавы применяют для изготовления пружин, работающих в агрессивных средах.

В результате легирования меди бериллием Be, предельная растворимость которого составляет 2,7%, получается бронза, имеющая высокую прочность и пластичность. Достигаются такие механические характеристики в результате закалки и последующего старения. Эта бронза имеет высокий предел выносливости и успешно работает в агрессивных средах. Она хорошо сваривается и обрабатывается резанием, ее можно с успехом использовать для изготовления пружин, мембран, различных подвижных контактов и деталей, работающих на износ.

Медь, легированная свинцом Pb, представляет собой сплав, который после затвердевания состоит из кристаллов меди и включений свинца. Это происходит потому, что свинец не растворяется. Тем не менее такой вид бронзы обладает хорошими антифрикционными свойствами и используется как материал для антифрикционных покрытий. Поскольку эта бронза имеет низкую прочность, то ее целесообразно применять в качестве покрытия, нанесенного на металлическую поверхность, чаще всего в подшипниках скольжения.

Как бронза, так и латунь используются для изготовления трущихся сопряжений, так как обладают хорошими антифрикционными свойствами.

Алюминий и сплавы на его основе. *Алюминий Al* — это металл серебристо-белого цвета с температурой плавления $600^0 C$. Он имеет гранецентрированную кристаллическую решетку с периодом $a = 0{,}4041$ нм. Так как алюминий обладает низкой плотностью, $\rho = 2{,}7$ г/см^3, то сплавы на основе алюминия называются *легкими*. Алюминий, как и медь, имеет высокую электро- и теплопроводность. Модуль упругости $E = (7{,}0 \div 7{,}5) \cdot 10^4$ МПа.

Алюминий является коррозийно-стойким материалом, так как на его поверхности появляется пленка окислов, защищающая основной металл от коррозии. Чистый алюминий имеет низкую прочность и применяется для производства деталей, не воспринимающих силового воздействия. Он хорошо деформируется пластически, успешно сваривается, но плохо обрабатывается механически. По этой причине из алюминия изготавливают трубопроводы, резервуары, палубные надстройки речных и морских судов и т. п. Из чистого алюминия изготавливают также металлическую фольгу, токопроводящие и кабельные материалы.

На основе алюминия получают различные сплавы, которые существенно изменяют его свойства. Наибольшее распространение получили сплавы Al-Cu, Al-Si, Al-Mg, Al-Cu-Mn, Al-Cu-Mg-Si, Al-Mg-Si, Al-Zn-Mg-Si. По технологическим признакам алюминиевые сплавы подразделяются на *деформируемые*, т. е. получаемые пластическим деформированием, и *литейные*, предназначенные для получения фасонных деталей методом литья.

Литейные сплавы на базе алюминия (Al-Cu, Al-Mg, Al-Si, Al-Zn-Mg-Si) благодаря низкой плотности и хорошей технологичности широко используются в самолетостроении, судостроении, автомобилестроении, строительстве и других областях.

Наилучшими литейными свойствами обладают сплавы системы Al-Cu (*силумины*), которые применяются для литья деталей сложной формы. С целью улучшения механических характеристик силумины легируют натрием Na. Отливки алюминиевых сплавов подвергают термической обработке и процедуре старения. Сплавы Al-Mg сильно повышают коррозийную стойкость, но ухудшают литейные качества. Эти отливки рекомендуется использовать для работы в агрессивных средах и в судостроении.

Легируя сплавы такими добавками, как Ti и Ni, можно получать жаропрочные материалы, которые используются для изготовления поршней головок двигателей и других деталей, работающих в условиях высоких температур.

Наиболее известным представителем класса деформируемых сплавов является *дюралюминий* (Al-Cu-Mg), который получил распространение в авиационной технике и транспортном машиностроении. Медь Cu и магний Mg вводят в сплав для его упрочнения, а для повышения коррозийной стойкости в состав сплава добавляется марганец Mn. Кроме того, часто в состав таких сплавов входят присадки в виде Cr, Zn, Fe и Si.

Дюралюминий хорошо обрабатывается и потому широко используется в производстве листового и профильного проката. Для повышения прочности такие сплавы часто подвергаются закалке при температуре $(500-520)^0 C$ с последующим охлаждением в воде и выдержкой при нормальной температуре в течение $75 \div 100$ часов (естественное старение). Кроме того, деформируемые сплавы под-

вергаются обработкой давлением с последующей механической обработкой. Такую технологию применяют для изготовления деталей с высокой прочностью, например, дисков центробежных машин, деталей компрессоров и т. д.

Помимо вышеперечисленных, в машиностроении используется ряд других металлических сплавов, как правило, предназначенных для изготовления деталей с особыми свойствами. Например, сплав олова и свинца — *баббит* — обладает высокими антикоррозийными свойствами и применяется как материал при производстве вкладышей подшипников скольжения.

Термическая и термохимическая обработка металлических материалов.

О т ж и г — вид термообработки, устраняющий химическую и физическую неоднородности, полученные в результате предшествующей обработки. При отжиге металл нагревают до определенной температуры, затем длительно выдерживают при ней и медленно охлаждают с целью получения однородных структур. Отжиг бывает *низкотемпературным* и *высокотемпературным.* В первом случае температура нагрева не превышает температуру фазовых превращений, а во втором — выше этой температуры.

Отжиг применяется с целью снятия внутренних напряжений, возникших в результате сварки, после литья, обработки металлов давлением и т. д. В результате такой термообработки увеличивается пластичность и снижается твердость. Такая операция является необходимой для выполнения последующей операции механообработки.

З а к а л к а представляет собой процесс нагрева стали до температуры выше температуры фазовых изменений, выдержке при этой температуре и последующего охлаждения с большой скоростью. Нагрев поверхности до нужной температуры обеспечивается за счет индукционных токов высокой частоты. Изменение магнитного поля вызывает появление на поверхности детали индукционного тока, прохождение которого по поверхности способствует тепловыделению. Это, в конечном итоге, приводит к нагреву поверхностных слоев.

Закалка может быть выполнена по всему объему или по поверхности. Поверхностная закалка повышает твердость материала, его износостойкость и т. д. При таком виде закалки основная объемная часть материала остается пластичной, что благоприятным образом сказывается на конструкции в целом.

При закалке материал упрочняется, но остается хрупким. Закалка не является окончательной операцией термообработки. Чтобы уменьшить хрупкость, снять остаточные напряжения и получить требуемые механические свойства, закаленные детали подвергают *отпуску.*

О т п у с к заключается в нагреве металла до температуры ниже критической, выдержке при этой температуре и охлаждения с определенной скоростью. Отпуск бывает: низкотемпературным, когда температура нагрева $T \le 250^0 C$, среднетемпературным с $350^0 C \le T \le 500^0 C$ и высокотемпературным, $500^0 C \le T \le 680^0 C$.

Термообработка, состоящая из закалки и высокого отпуска, называется *улучшением.*

Металлы могут подвергаться не только термической, но и *термохимической* обработке (поверхностному легированию), т. е. термическому и химическому воздействию на поверхностный слой. Наиболее распространенным видом такой обработки является *цементация*, при которой поверхностный слой насыщается углеродом. При таком варианте термообработки цементирующий слой может наноситься только на отдельные участки детали. Для цементации чаще всего используют низ-

коуглеродистые легированные стали. В результате на их поверхности образуется диффузионный слой, химический состав которого сильно зависит от глубины. Это можно объяснить тем, что проникновение диффундирующего элемента в глубинные слои оказывается затрудненным. Отметим, что на цементацию поступают детали, уже прошедшие механообработку, так как после цементации возможно провести только операцию шлифования.

Нитроцементация — процесс диффузионного насыщения поверхностного слоя углеродом и азотом, протекающий при температуре $T = (840 \div 860)^0 C$.

Азотирование — термохимическая обработка, при которой поверхностный слой насыщается азотом. Азотирование сильно повышает твердость поверхности, ее износостойкость, предел выносливости и стойкость к коррозии.

Неметаллические материалы. *Композиционные материалы* представляют собой композицию из легких металлов (металлическая основа, или *матрица*) и прочных волокон (наполнитель). В качестве металлической основы используют Al, Mg, Ni и их сплавы. Металлическая матрица связывает волокна в единое целое. Волокна располагаются таким образом, что создают определенную композицию. Композиционные материалы обладают более высокой статической прочностью и прочностью при переменном режиме нагружения, чем обычные сплавы. Применение этих материалов повышает жесткость конструкции и снижает ее металлоемкость. При этом прочность композиционного материала определяется прежде всего свойствами волокон, а матрица выполняет роль связующего элемента.

Для упрочнения алюминия и магния и их сплавов применяют борные и углеродистые волокна. Для армирования титана и его сплавов применяют молибденовую проволоку, проволоку карбида кремния и т. д. Повышение жаропрочности никелевых сплавов достигается за счет использования вольфрамовой и молибденовой проволок и т. д.

Для композиционных материалов характерно наличие анизотропии свойств по объему, что в конечном итоге можно эффективно использовать за счет соответствующего расположения детали.

Композиционные материалы обладают высокой статической прочностью, малой чувствительностью к концентраторам напряжений и в результате повышенный предел усталостной прочности.

Кроме металлической, иногда используют полимерную либо керамическую основы.

Керамика — поликристаллический материал на основе соединений неметаллов. Если такой материал смешивается с металлами, то в результате получаются *металлокерамические* материалы, которые изготовляются методами порошковой металлургии. Такое сочетание позволяет создавать материалы, имеющие высокие термическую прочность, износостойкость, коррозийную стойкость и стойкость к агрессивным химическим средам.

Технология изготовления металлокерамических изделий включает получение порошков металлов (а также их смесей с неметаллическими порошками), прессование и последующее спекание в пресс-формах. Полученные таким образом детали не требуют дальнейшей механической обработки.

Заметим, что металлокерамические материалы могут получаться пористыми, причем пористость достигает $(10 \div 30)\%$. Такие материалы, имеющие низкий коэффициент трения, который для контакта с металлом лежит в диапазоне

$f = (0{,}05 \div 0{,}09)$, целесообразно использовать в качестве фильтров и антифрикционных покрытий, а также вкладышей подшипников.

Металлокерамические материалы используются также и в других случаях, где их применение оправдано благодаря описанным выше свойствам.

Пластические массы (пластмассы) — материалы на основе синтетических или природных высокомолекулярных смол (полимеров). Пластмасса может целиком состоять из смолы или представлять собой композиционный материал из полимерной основы (матрицы) и наполнителя, или из связующего и армирующих волокон (стекло, углерод и т. д.). Пластмассы бывают термопластические и термореактивные. Термопластические пластмассы могут быть использованы повторно. Они имеют значительно меньшую прочность и жесткость, применяются для изготовления малонагруженных деталей и благодаря хорошим антифрикционным свойствам используются как антифрикционные материалы.

При нагреве пластмассы способны размягчаться и становятся пластичными. В таком состоянии им придают необходимую форму, которую они сохраняют при нормальной температуре.

Пластмассы имеют малую плотность, низкую теплопроводность, высокий коэффициент линейного расширения (в $10 \div 30$ раз больше, чем у стали), хорошие электроизоляционные свойства, высокую химическую стойкость, фрикционные и антифрикционные свойства.

К числу недостатков пластмасс можно отнести невысокую теплостойкость, низкий модуль упругости и склонность некоторых пластмасс к старению.

Резина — материал, получаемый вулканизацией смеси натурального либо синтетического каучука с серой и другими добавками. Резина отличается от других материалов высокими эластическими свойствами. Она обладает также высокой износостойкостью, хорошими диэлектрическими свойствами и тем, что способна сопротивляться многим агрессивным средам. Резина может выдерживать большие деформациям, которые, в свою очередь, полностью обратимы. Модуль упругости для резины лежит в пределах $(1 \div 10)$ МПа, что в тысячи и десятки тысяч раз меньше, чем для других материалов. Высокая эластичность и определяет область применения деталей из резины. Резина используется для изготовления шин, упругих муфт, амортизаторов, различного рода упругих элементов высокой податливости, различного рода уплотнений и т. п.

Серьезным недостатком резиновых деталей является низкая прочность. Для повышения прочности резину армируют текстильными материалами либо стальными элементами.

Глава 2.12. Критерий расчета машин, механизмов и конструкций

Процедура проектирования механической конструкции предусматривает определение основных геометрических размеров, кинематических, силовых и энергетических параметров, а также выбор материалов и т. д. По расчетным размерам в соответствии с правилами конструирования модель конструкции вычерчивается в целом и поэлементно, после чего отдельные ее детали могут быть подвергнуты дополнительному анализу с целью изменения и уточнения их характеристик.

Следует отметить, что процесс конструирования должен основываться на возможностях технологии. При таком подходе можно значительно снизить себестоимость проектируемого оборудования, особенно в случае применения автоматизированных систем сквозного проектирования типа CAE\CAD\CAM.

В дальнейшем каждая из деталей изготавливается, что существенно упрощается за счет использования станков с ЧПУ при автоматической подготовке управляющих программ. Изготовление заканчивается сборкой и комплексом производственных испытаний.

Совершенство конструкции, ее надежность, а также механические, энергетические, прочностные и другие характеристики закладываются на этапе конструирования, таким образом, от принятия правильных конструкторских решений во многом зависит качество работы и конкурентоспособность создаваемого механического оборудования. Этот факт заставляет использовать при выполнении проекта новейшие достижения практики конструирования, современные компьютерные средства и, конечно, знания, опыт и интуицию исполнителя.

Современное механическое оборудование состоит из нескольких десятков, сотен, а иногда и тысяч отдельных деталей. Каждая из них работает в определенных условиях внешнего нагружения, при определенном температурном режиме, определенным образом взаимодействует с другими деталями. Выполнять все необходимые расчеты такого большого числа деталей экономически не оправдано, а потому в качестве объекта всестороннего исследования выбирают наиболее нагруженные детали, которые являются самыми опасными с точки зрения выхода из строя как самих этих деталей, так и конструкции в целом.

Переходя к подробному описанию методов расчета конкретных деталей, прежде всего следует указать основные причины выхода их из строя.

Основные причины нарушения работоспособности. Выходные характеристики механического оборудования задаются в виде набора условий и ограничений, которым это оборудование должно удовлетворять. Такие условия и определяют критерии, по которым будет выполнен расчет проектируемой конструкции. Под критерием понимается условие, невыполнение которого приводит к выходу из строя оборудования либо к получению выходных параметров, отличных от предусмотренных заданием на проектирование.

Как указывалось ранее, все необходимые вычисления проводятся для моделей, работающих в заданных условиях. Очевидно, что достоверность прогнозируемого результата зависит от степени адекватности модели реально изготовленной конструкции и правильности выбора критериев расчета.

Критерии, по которым выполняется расчет, многообразны, но среди этого многообразия следует выделить группу главных, описание которых приводится ниже.

• Обязательным условием работоспособности оборудования при статическом нагружении является его **прочность** (по пределу прочности) либо **отсутствие пластических деформаций** (по пределу текучести). Расчет ***статической прочности*** сводится к определению коэффициентов запаса. Подробно условие статической прочности описано выше (главы 2.2—2.8). Здесь только еще раз отметим, что для проверки прочности необходимо выполнить расчет напряженного состояния конструкции, результаты которого можно представить в форме полей либо эпюр напряжений. Анализ напряженного состояния рассматриваемого изделия позволяет выявить те сечения или точки, в которых действуют наибольшие напряжения. Последующее сравнение полученных напряжений с известным из эксперимента **допускаемым** (предельным) **напряжением** для данного материала даст возможность судить о прочности детали

• В случае переменного характера внешнего нагружения необходимо выполнить проверку ***усталостной прочности,*** которая предполагает расчет вероятности разрушения за время работы оборудования. Для проверки прочности при переменной нагрузке необходимо знать напряженное состояние исследуемого объекта, закон изменения внешней нагрузки и полное число циклов нагружения. Подробно расчеты этого типа описаны в главе 2.10.

• В отдельных случаях выход из строя оборудования может быть вызван малой ***жесткостью*** деталей. Для проверки этого условия необходимо иметь информацию относительно *деформированного состояния* элементов конструкции. Основываясь на этих данных, геометрические размеры деталей выбирают таким образом, чтобы условие жесткости было выполненным.

• Разрушение может произойти в случае ***потери устойчивости***. Такие явления имеют место, если линейно протяженные элементы конструкции испытывают напряжение сжатия. Расчет на устойчивость сводится при этом к определению коэффициента запаса устойчивости (под которым понимается отношение критической сжимающей нагрузки к фактической силе, приложенной к телу), о чем подробно написано в главе 2.9.

• Если детали и узлы работают в условиях высоких температур, то они испытывают тепловое расширение. При этом вследствие ***тепловых деформаций***, как правило, снижается коэффициент полезного действия механизма, повышаются потери и даже возникает опасность заклинивания элементов, находящихся в относительном движении. В отдельных случаях тепловые процессы могут привести, например, к испарению жидкости, а также к необратимым химическим процессам в масляной пленке и т. д. Если при эксплуатации машины велика вероятность подобных последствий, то обязательным является определение рабочей температуры, которая не должна превышать предельных значений для данного материала.

• Причиной разрушения конструкции может быть действие ***динамических нагрузок***, величины которых зависят от частот собственных колебаний механической системы и частоты вынуждающей силы. Расчеты динамических характеристик механических систем необходимо выполнять для получения полной и достоверной картины их напряженного и деформированного состояний. Если исходные характеристики механической системы таковы, что в процессе ее эксплуатации внешние колебания значительно усиливаются, то их следует изменить.

• ***Кинематические проблемы*** при проектировании машин и механизмов, законы движения и расчет траекторий подвижных звеньев и т. д. зависят от вида меха-

низма. Для расчета каждого типа механизмов разработаны соответствующие аналитические и численные методы. Кроме того, при решении кинематических задач целесообразно использовать компьютерные программы, которые позволяют выполнить весь набор необходимых вычислений для механизмов произвольной структуры.

- Геометрические расчеты, как правило, зависят от конкретных объектов и тех задач, которые необходимо решать.

Отметим, что расчеты напряженно-деформированного состояния, устойчивости, а также динамические расчеты и расчеты температурных полей можно выполнить гораздо эффективнее, применяя современные средства компьютерного моделирования. Кроме того, разработаны компьютерные программы и для прогнозирования долговечности деталей, работающих при переменном характере внешнего нагружения. Они менее точные, чем аналитические методы, но ошибки, которые при таком расчете неизбежно появляются, можно скомпенсировать соответствующим выбором коэффициента запаса.

Трение и износ поверхностных слоев деталей при их относительном движении. Одной из важных причин выхода из строя машин можно назвать *трение* и вызываемый им *износ*. На этой проблеме ввиду ее важности следует остановиться подробнее.

При относительном перемещении тел, находящихся в контакте, имеет место трение. Под трением понимается сопротивление относительному перемещению контактирующих поверхностей. Трение сопровождается выделением (рассеянием) энергии. Коэффициентом трения называется отношение силы трения к нормальной силе в контакте.

Сила трения, возникающая в процессе относительного движения, препятствует ему. Кроме того, она может вызывать разрушение поверхности. Процесс разрушения поверхности, вызванный трением, называется износом. Негативные явления, связанные с трением и износом, можно существенно уменьшить выбором подходящих материалов и использованием смазки.

Износ можно характеризовать, например, отношением объема материала, удаленного с поверхности в результате износа, к работе силы трения. Такая величина называется интенсивностью изнашивания. Процесс изнашивания поверхности в сильной степени зависит от величины силы трения в контакте и, в частности, от коэффициента трения.

По физической природе различают следующие виды износа поверхности:

- ***Абразивный износ*** представляет собой механическое разрушение трущихся поверхностей, возникающее за счет режущего действия твердых частиц. Такой износ характерен для открытых участков механизмов и машин, работающих в среде, содержащей абразивные частицы (например, в горном, дорожном, строительном, сельскохозяйственном и другом подобном оборудовании).
- ***Адгезионный износ*** возникает в результате действия межповерхностных сил молекулярного сцепления. Под адгезией понимается слипание соприкасающихся поверхностей твердых либо жидких тел. Это наиболее распространенная форма износа. Поскольку процедура слипания происходит на молекулярном уровне, то исследования механизмов износа и возникающих при этом закономерностей представляет собой серьезную проблему.
- ***Износ, вызванный усталостным разрушением***, происходит в процессе взаимного касания двух или нескольких тел в результате их относительного движе-

ния. При таком варианте нагружения возникают переменные во времени местные контактные напряжения. Циклический характер этих напряжений увеличивает подвижность усталостных трещин, что приводит к укрупнению последних в поверхностных слоях. При определенных размерах трещина вызывает откол части металла с поверхности. Процесс разрушения поверхности в результате усталостных явлений называется выкрашиванием.

Как показали экспериментальные исследования, зарождение трещин начинается в точках, где касательные напряжения достигают наибольшей величины. Установлена также связь между наибольшим напряжением в контакте σ_H и числом циклов N до начала процесса разрушения. По виду эта связь соответствует обычной усталостной зависимости, а именно $\sigma_H^m N = const$.

Базовое число циклов является функцией твердости поверхности, $N_{G} = kHB^3$, где k — константа материала. Для сталей и сплавов высокой твердости, а также многих полимерных материалов, предел усталостной прочности не обнаружен.

- ***Изнашивание при заедании***. Такой тип износа поверхности, который по сути представляет собой процесс схватывания, глубинного вырывания материала и переноса его с одной трущейся поверхности на другую, является наиболее опасным. Изнашивание этого вида носит мгновенный характер и приводит к полному выходу узла трения из строя. Процесс протекания такого разрушения зависит от напряженно — деформированного состояния системы, кинематики относительного движения, состояния смазки, температуры в контакте и некоторых иных причин.

Перечисленные виды износа являются для механики машин наиболее значимыми, хотя их можно дополнить и другими видами, имеющими иную природу.

В заключение заметим, что процесс разрушения поверхности в результате трения представляется явлением сложным и на сегодняшний день не до конца изученным. К сожалению, надежных расчетных методов оценки величины износа до сих пор не создано. В настоящее время разработаны методики косвенной его оценки, которые рекомендуется использовать в том случае, когда критерием расчета является износ.

Раздел 3 ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Глава 3.1. Общий случай расчета напряженно-деформированного состояния в точке. Полная система уравнений теории упругости

Три группы основных уравнений. Рассмотренные ранее частные случаи определения напряжений (глава 2.7) и деформаций (глава 2.6) следует дополнить решением задач теории упругости в общем виде. Теорией упругости называется раздел механики сплошной среды, который занимается изучением поведения упругих твердых тел при их нагружении. При этом деформируемая среда считается однородной и изотропной, т. е. ее упругие свойства одинаковы во всех направлениях. Кроме того, предполагается, что среда деформируется линейно (для материала среды выполняется закон Гука), причем перемещения и деформации достаточно малы.

В общем случае расчет напряженно-деформированного состояния в точке (т. е. расчет *на прочность* и *жесткость*) можно провести с помощью системы фундаментальных уравнений теории упругости. Получение точного аналитического решения этих уравнений оказывается весьма сложной процедурой, поэтому аналитические методы имеют ограниченное применение. Единственным выходом из такого положения является использование приближенных численных методов, реализация которых возможна с помощью современной вычислительной техники. Решая фундаментальные уравнения теории упругости с помощью численных методов, можно выполнить все необходимые вычисления для корректного описания напряженно-деформированного состояния бесконечно большого числа возможных вариантов конструкций при произвольном нагружении и закреплении (см. далее главу 3.3). С этой целью разрабатывается специализированное программное обеспечение, позволяющее решать комплекс этих и смежных с ними задач.

Перейдем теперь к непосредственному выводу уравнений, являющихся основанием для анализа напряженно-деформированного состояния в точке численными методами. Эти уравнения можно разделить на три группы.

Первая группа, или *статические уравнения*, описывает равновесие выделенного в окрестности некоторой точки тела элементарного параллелепипеда. Вторая группа уравнений, или *обобщенный закон Гука*, выражает зависимость между напряжениями и деформациями элемента. Поскольку в этих уравнениях учитываются физико-механические свойства материала, их называют *физическими*. Наконец, уравнения третьей группы связывает деформации элемента тела с перемещениями его точек вследствие действия приложенной нагрузки — это *геометрические уравнения*.

Уравнения равновесия элемента объема. Рассмотрим некоторое тело, нагруженное произвольной системой сил (рис. 2.7.1). Для анализа напряженно-деформированного состояния тела в окрестности произвольно выбранной точки A вырежем элемент объема, имеющий форму параллелепипеда со сторонами dx, dy и dz. По граням этого выделенного элемента в общем случае трехосного нагруже-

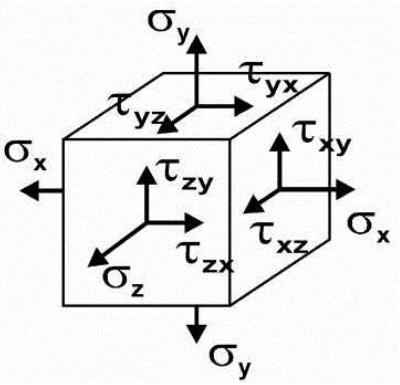


Рис. 3.1.1

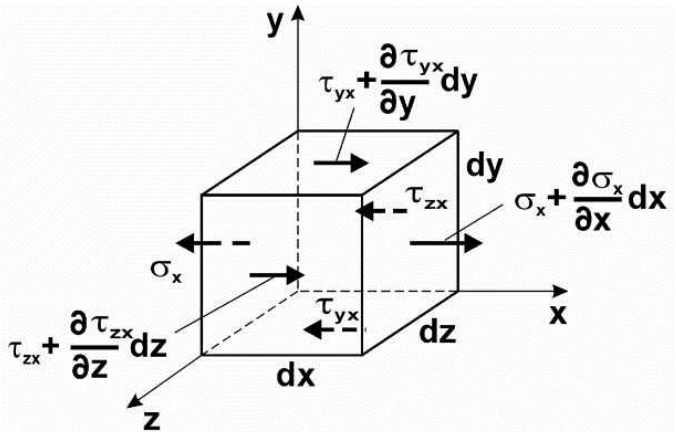


Рис. 3.1.2

ния действуют нормальные и касательные напряжения (рис. 3.1.1), которые можно представить в форме *тензора напряжений* $[\sigma]$ следующего вида:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}. \qquad (3.1.1)$$

Напомним, что первый индекс в обозначениях напряжений указывает площадку, на которой действует напряжение, а второй — его направление; поскольку в обозначениях нормальных напряжений фигурируют два одинаковых индекса, обычно один из них опускают.

Согласно закону парности касательных напряжений (2.4.14), имеют место равенства

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}; \qquad \tau_{xz} = \tau_{zx}; \qquad \tau_{yz} = \tau_{zy}. \qquad (3.1.2)$$

Поскольку, как следует из (3.1.2), матрица напряжений (3.1.1) симметрична, в механике вводят вектор-столбец напряжений $\vec{\sigma}$, который записывается как

$$\vec{\sigma}^T = \begin{bmatrix} \sigma_x & \sigma_y & \sigma_z & \tau_{xy} & \tau_{zx} & \tau_{yz} \end{bmatrix}. \qquad (3.1.3)$$

Здесь и далее верхний индекс "T" означает транспонирование вектора-столбца, что позволяет для сокращения записывать его в строку, а не в столбец.

Кроме напряжений, приложенным к граням, в общем случае на выделенный элемент объема могут действовать массовые силы, компоненты которых в проекции на координатные оси обозначим как X, Y и Z. Примерами массовых сил могут служить сила тяжести, центробежные нагрузки, а также некоторые другие силы, которые равномерно распределены в объеме рассматриваемого тела.

Ясно, что после приложения внешней нагрузки выделенный элемент объема находится в равновесии. Аналитически условие равновесия можно получить, спроецировав все силовые факторы на оси координат. Выполним операцию про-

сцирования, например, на ось x. С этой целью на рис. 3.1.2 изображены только те силовые факторы, которые направлены вдоль этой оси. Тогда имеем

$$\left(\sigma_x+\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}dx\right)dydz-\sigma_x dydz+\left(\tau_{yx}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}dy\right)dxdz-\tau_{zx}dxdz+$$
$$+\left(\tau_{zx}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}dz\right)dxdy-\tau_{yx}dxdy+Xdxdydz=0. \qquad (3.1.4)$$

Вычисляя аналогично (3.1.4) суммы проекций сил на оси y и z, после приведения подобных членов и деления на $dV=dxdydz$ окончательно получаем систему *дифференциальных уравнений равновесия Навье*, а именно

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}+X=0\\ \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}+Y=0\\ \frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}+Z=0\end{aligned}\right\}. \qquad (3.1.5)$$

Уравнения равновесия (3.1.5) удобно записать в матричной форме,

$$[A]\vec{\sigma}+\vec{g}=0, \qquad (3.1.6)$$

где элементы матрицы $[A]$ представляют собой операторы дифференцирования,

$$[A]=\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} & 0\\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial z}\\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y}\end{bmatrix}, \qquad (3.1.7)$$

а матрица-столбец $\vec{g}$ состоит из компонент массовых сил: $\vec{g}^T=[X\quad Y\quad Z]$.

Сформулируем теперь условия на поверхности тела как граничные условия для дифференциальных уравнений (3.1.5). Они выражают равновесие между поверхностной нагрузкой и напряжениями в произвольной точке поверхности тела. Пусть на произвольно ориентированную площадку dA в трехмерном пространстве действует некоторая внешняя поверхностная нагрузка $\vec{P}$ (рис. 3.1.3а), $\vec{P}^T=[p_x\quad p_y\quad p_z]$, где p_x, p_y и p_z — проекции на координатные оси вектора полной внешней поверхностной нагрузки $\vec{P}$. Напряжения σ_x, σ_y и σ_z определяются из уравнений равновесия тетраэдра $ODBC$. Массовые силы в большинстве случаев оказываются малыми, и их наличием можно пренебречь.

Ориентация рассматриваемой площадки описывается значениями направляющих косинусов, т. е. косинусов углов между направлением вектора нормали $\vec{n}$ к площадке и соответствующими ортами декартовой системы координат (рис.3.1.3b),

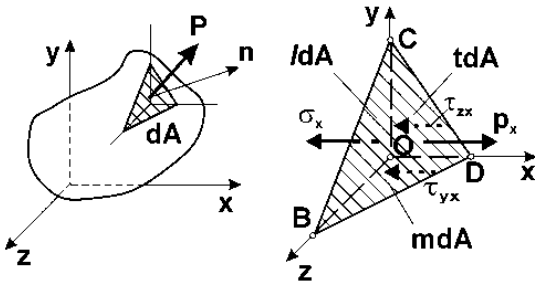
$$l = \cos\left(\vec{i}, \hat{\ } \vec{n}\right);\ m = \cos\left(\vec{j}, \hat{\ } \vec{n}\right);\quad t = \cos\left(\vec{k}, \hat{\ } \vec{n}\right);\ l^2 + m^2 + t^2 = 1. \qquad (3.1.8)$$

Составим сумму проекций всех сил, приложенных к граням тетраэдра, на ось Ox (на рис. 3.1.3b показаны только те напряжения, которые дают проекции на эту ось):

$$p_x dA - \sigma_x l dA - \tau_{yx} m dA - \tau_{zx} t dA = 0,$$

откуда

$$\sigma_x l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} t = p_x.$$



a) b)

Рис. 3.1.3

Аналогично, проецируя все действующие на тетраэдр силы на оси Oy и Oz, находим выражения для p_y и p_z. В результате получаем следующие формулы для составляющих полной поверхностной нагрузки:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} t &= p_x \\ \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{zy} t &= p_y \\ \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z t &= p_z \end{aligned}\right\}. \qquad (3.1.9)$$

В сокращенной записи условия на поверхности (3.1.19) представляются в виде

$$[L]\vec{\sigma} = \vec{P};\ [L] = \begin{bmatrix} l & 0 & 0 & m & t & 0 \\ 0 & m & 0 & l & 0 & t \\ 0 & 0 & t & 0 & l & m \end{bmatrix}. \qquad (3.1.10)$$

Закон Гука. Для случая объемного напряженного состояния линейно-упругих изотропных тел справедлив обобщенный закон Гука (2.7.8), который в матричном виде выглядит как

$$\vec{\varepsilon} = [E]^{-1}\vec{\sigma};\quad \vec{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix};$$

$$[E]^{-1}=\begin{bmatrix} 1/E & -\mu/E & -\mu/E & 0 & 0 & 0 \\ -\mu/E & 1/E & -\mu/E & 0 & 0 & 0 \\ -\mu/E & -\mu/E & 1/E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G \end{bmatrix}. \qquad (3.1.11)$$

Здесь модули упругости E и G связаны между собой соотношением (2.4.11); матрица упругой податливости $[E]^{-1}$ является обратной по отношению к матрице модулей упругости (или матрице жесткости) $[E]$, которая в свою очередь равна

$$[E]=\frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)}\begin{bmatrix} (1-\mu) & \mu & \mu & 0 & 0 & 0 \\ \mu & (1-\mu) & \mu & 0 & 0 & 0 \\ \mu & \mu & (1-\mu) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\mu)}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\mu)}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\mu)}{2} \end{bmatrix}$$

Уравнения (3.1.11), называемые *законом Гука в прямой форме*, дают возможность вычислить деформации, если известны напряжения. В ходе решения задач теории упругости часто возникает необходимость в обратных соотношениях, когда напряжения выражены через деформации. Для этого надо разрешить уравнения (3.1.11) относительно напряжений. Сделав это, получим

$$\vec{\sigma}=[E]\vec{\varepsilon},$$

или

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)}\left[(1-\mu)\varepsilon_x+\mu(\varepsilon_y+\varepsilon_z)\right] \\ \sigma_y &= \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)}\left[(1-\mu)\varepsilon_y+\mu(\varepsilon_x+\varepsilon_z)\right] \\ \sigma_z &= \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)}\left[(1-\mu)\varepsilon_z+\mu(\varepsilon_x+\varepsilon_y)\right] \\ \tau_{xy} &= G\gamma_{xy};\quad \tau_{yz}=G\gamma_{yz};\quad \tau_{zx}=G\gamma_{zx} \end{aligned}\right\}. \qquad (3.1.12)$$

Равенства (3.1.12) выражают обратную форму закона Гука.

Поля упругих перемещений точек элемента при нагружении. Внешние нагрузки, приложенные к телу, вызывают деформирование этого тела и перемещение составляющих его точек в пространстве (рис. 2.1.3). Определим соотношения, связывающие *абсолютные перемещения* точек тела с их *относительными смещениями*, или *деформациями*.

Представим трехмерную задачу как совокупность плоских проекционных — такой подход позволяет существенно упростить картину без ограничения общности. На рис. 3.1.4 изображено положение некоторого элемента плоскости XOY до приложения нагрузки и после. Примем за начало отсчета деформаций точку A с координатами (x_A, y_A), а конечное положение этой точки обозначим через A_1, так что компоненты линейного перемещения точки A по направлениям координатных осей равны u и v. Будем считать, что эти компоненты являются малыми величинами, меняющимися непрерывно по объему тела; деформациями, связанными с искривлением ребер выделенного элемента, пренебрегаем. Если тело подвергается деформации, то в условиях принятых допущений при переходе от точки A к соседней точке B, расположенной на оси x, изменяется только абсцисса на величину dx, так что перемещения точки B отличаются от перемещений точки A на величины частных приращений $\Delta_x u$ и $\Delta_x v$, которые можно приближенно заменить их линейными частями:

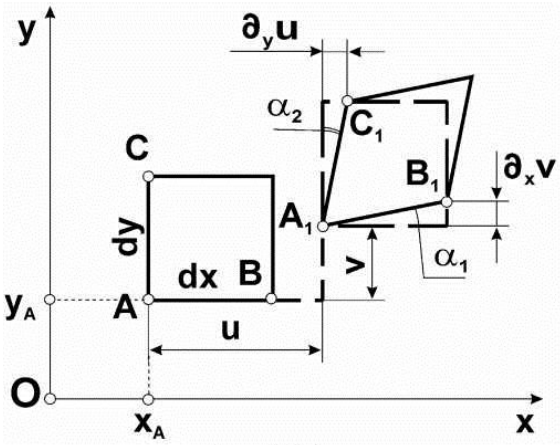


Рис. 3.1.4

$$\partial_x u = \frac{\partial u}{\partial x} dx; \quad \partial_x v = \frac{\partial v}{\partial x} dx.$$

Тогда перемещения точки B с точностью до величин первого порядка малости по dx имеют вид

$$u + \frac{\partial u}{\partial x} dx; \quad v + \frac{\partial v}{\partial x} dx.$$

Таким образом, абсолютное увеличение длины ребра AB, вызванное деформацией, равно $\frac{\partial u}{\partial x} dx$, а относительное удлинение в точке A в направлении x (т. е. линейная *деформация*) составляет $\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$. Аналогично можно рассмотреть перемещения точки C (равные $u + \frac{\partial u}{\partial y} dy; \quad v + \frac{\partial v}{\partial y} dy$) и линейную деформацию в направлении оси y, равную $\varepsilon_y = \frac{\partial u}{\partial y}$.

Угловая деформация выделенного элемента, в соответствии с (2.1.5), определяется как уменьшение первоначально прямого угла $\angle CAB$. И рисунка (3.1.4) видно, что это уменьшение равно сумме углов поворотов ребер α_1 и α_2. Поскольку углы малы, то

$$\alpha_1 \approx tg\alpha_1 = \frac{\partial_x v}{dx} = \frac{\partial v}{\partial x}; \quad \alpha_2 \approx tg\alpha_1 = \frac{\partial_y u}{dy} = \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Следовательно, для угловой деформации γ_{xy} получаем

$$\gamma_{xy} = tg\alpha_1 + tg\alpha_2 = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Для общего трехмерного случая выражения, связывающие абсолютные и относительные перемещения, имеют вид

$$\left.\begin{aligned} &\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}; \\ &\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}; \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}; \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \end{aligned}\right\}. \qquad (3.1.13)$$

Соотношения (3.1.13) называются *геометрическими уравнениями Коши*. В матричной форме они записывается как

$$\vec{\varepsilon} = [A]^T \vec{u}. \qquad (3.1.14)$$

Здесь $[A]^T$ получена транспонированием матрицы $[A]$, введенной в (3.1.7), $\vec{u}$ — вектор-столбец перемещений, $\vec{u}^T = [u \quad v \quad w]$, а вектор-столбец деформаций $\vec{\varepsilon}$ определяется (3.1.11).

Иногда вместо (3.1.13) удобнее использовать так называемые *уравнения сплошности (неразрывности)*, или *уравнения совместности деформаций*, которые представляют собой иную форму записи геометрических уравнений. Согласно уравнениям сплошности, при деформациях сохраняются первоначальные геометрические связи между соседними точками тела. Это обстоятельство подчеркивает отсутствие разрывов связей при упругих перемещениях.

Для вывода уравнений сплошности исключим из уравнений Коши (3.1.13) перемещения u, v и w. Продифференцируем в (3.1.13) первое уравнение по y, а второе — по x, и сложим результаты. Получим

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial}{\partial x \partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right). \qquad (3.1.15)$$

Сравнивая (3.1.15) и (3.1.13), замечаем, что выражение, стоящее в скобках в правой части (3.1.15), равно угловой деформации γ_{xy}, поэтому имеем

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}. \qquad (3.1.16)$$

В результате подобных операций можно записать и другие аналогичные (3.1.16) соотношения первой группы *условий совместности деформаций Сен-Венана*:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial x^2}&=\frac{\partial^2\gamma_{xy}}{\partial x\partial y}\\ \frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_z}{\partial y^2}&=\frac{\partial^2\gamma_{yz}}{\partial y\partial z}\\ \frac{\partial^2\varepsilon_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial z^2}&=\frac{\partial^2\gamma_{zx}}{\partial z\partial x}\end{aligned}\right\}. \qquad (3.1.17)$$

Выражения (3.1.17) устанавливают связь между компонентами линейных деформаций в проекционных плоскостях. Угловые деформации в проекционных плоскостях также связаны между собой. Для выявления этих связей преобразуем в (3.1.13) компоненты угловых деформаций по следующему правилу: дифференцируем γ_{xy} по z, γ_{zx} — по y, а γ_{yz} — по x. Сложение первых двух результатов дифференцирования и последующее вычитание третьего дает

$$\frac{\partial\gamma_{xy}}{\partial z}+\frac{\partial\gamma_{zx}}{\partial y}-\frac{\partial\gamma_{yz}}{\partial x}=2\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}. \qquad (3.1.18)$$

Еще раз дифференцируя обе части равенства (3.1.18) по x и принимая во внимание, что согласно (3.1.13) верно равенство $\frac{\partial u}{\partial x}=\varepsilon_x$, запишем

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\gamma_{xy}}{\partial z}+\frac{\partial\gamma_{zx}}{\partial y}-\frac{\partial\gamma_{yz}}{\partial x}\right)=2\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y\partial z}. \qquad (3.1.19)$$

По аналогии с (3.1.19) можно определить и остальные соотношения, совокупность которых описывает связи между компонентами деформаций в разных плоскостях:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\gamma_{xy}}{\partial z}+\frac{\partial\gamma_{zx}}{\partial y}-\frac{\partial\gamma_{yz}}{\partial x}\right)&=2\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y\partial z}\\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\gamma_{yz}}{\partial x}+\frac{\partial\gamma_{xy}}{\partial z}-\frac{\partial\gamma_{zx}}{\partial y}\right)&=2\frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial z\partial x}\\ \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\gamma_{zx}}{\partial y}+\frac{\partial\gamma_{yz}}{\partial x}-\frac{\partial\gamma_{xy}}{\partial z}\right)&=2\frac{\partial^2\varepsilon_z}{\partial x\partial y}\end{aligned}\right\}. \qquad (3.1.20)$$

Если уравнения сплошности (3.1.20) выполняются, то это указывает на отсутствие разрывов упругого тела, что является непременным условием существования прочности упругих тел.

Полная систему уравнений теории упругости. Итак, полную систему уравнений теории упругости составляют: *уравнения равновесия Навье* (3.1.5) — (3.1.6), *закон Гука в прямой* (3.1.11) и *обратной* (3.1.12) формах, а также *геометрические уравнения Коши* (3.1.13) или эквивалентные им *уравнения совместности деформаций Сен-Венана* (3.1.20). Заметим, что эта система почти не содержит факторов, определяющих напряженно-деформированное состояние тела, как то: форма и размеры тела, способы его нагружения и закрепления и т. д.

Таким образом, полная система уравнений теории упругости устанавливает лишь общие закономерности, присущие поведению твердого упругого тела под действием внешнего нагружения. Решение же каждой конкретной задачи невозможно без задания некоторых дополнительных (т. н. *граничных*) условий, определяющих конкретные режимы нагружения и закрепления тела определенной формы и размеров.

Энергетические уравнения. В случае объемного деформирования энергия U_0, накопленная в единице объема, как следует из (2.7.13), равна

$$U_0 = \frac{dU}{dxdydz} = \frac{1}{2}(\sigma_x\varepsilon_x + \sigma_y\varepsilon_y + \sigma_z\varepsilon_z + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{yz}\gamma_{yz} + \tau_{zx}\gamma_{zx}),$$

или

$$U_0 = \frac{1}{2}\vec{\sigma}^T\vec{\varepsilon}\,. \qquad (3.1.21)$$

Здесь $\vec{\sigma}^T$ — матрица-строка, транспонированная по отношению к (3.1.2). Выражение (3.1.21) называется *формулой Клапейрона*.

Потенциальная энергия деформации всего объема U определяется интегрированием (3.1.21) по объему V:

$$U = \iiint\limits_V U_0 dV = \iiint\limits_V \frac{1}{2}\vec{\sigma}^T\vec{\varepsilon}\;dV\,. \qquad (3.1.22)$$

Работа внутренних напряжений вызвана внешними силовыми факторами, которые приложены к поверхности рассматриваемого тела. Пусть на поверхности тела действуют внешние распределенные нагрузки $\vec{P}$ и массовые силы $\vec{g}$. Внешние силы в отличие от внутренних в процессе деформирования считаются *неизменными*, поэтому при вычислении потенциальной энергии системы W, ответственной за совершение работы внешними силовыми факторами, множитель $1/2$ будет отсутствовать:

$$W = -\iint\limits_A (P_x u + P_y v + P_z w)dA - \iiint\limits_V (Xu + Yv + Zw)dV\,. \qquad (3.1.23)$$

Полная потенциальная энергия системы равна сумме потенциальной энергии деформаций (3.1.22) и работе внешних сил (3.1.23), так что в матричной форме имеем

$$\Pi = U + W = \iiint\limits_V \frac{1}{2}\vec{\sigma}^T\vec{\varepsilon}\;dV - \iint\limits_A p^T\vec{u}dA - \iiint\limits_V \vec{g}^T\vec{u}dV\,. \qquad (3.1.24)$$

Плоское нагружение. Практический интерес представляет случай плоского нагружения. *Двухосным*, или *плоским*, называется такое напряженное состояние тела, при котором во всех его точках одно из напряжений (например, σ_z) равно нулю. При этом оказывается, что во всех поперечных сечениях тела

$$\sigma_z = 0; \quad \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0,$$

а напряжения σ_z, $\tau_{xy} = \tau_{yx} = \tau$ изменяются в зависимости от z в соответствии с законом распределения внешнего нагружения.

Такое напряженное состояние приблизительно осуществляется в тонких пластинах, подвергающихся действию сил, не вызывающих изгиб, т. е. лежащих в срединной плоскости пластины.

Если плоское напряженное состояние возникло под действием равномерно распределенной по длине нагрузки, то все отличные от нуля напряжения не будут зависеть от переменной z. Тогда основные уравнения теории упругости для плоского состояния получаются из соответствующих уравнений для объемной задачи путем исключения из них производных по координате z.

Уравнения равновесия (3.1.5) приобретают вид

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} + X = 0 \\ \frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y = 0 \end{aligned}\right\}. \tag{3.1.25}$$

Уравнения равновесия плоского сечения (статические граничные условия) (3.1.9) преобразуются как

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x l + \tau m = p_x \\ \tau l + \sigma_y m = p_y \end{aligned}\right\}. \tag{3.1.27}$$

Система геометрических уравнений Коши (3.1.13) записывается в виде

$$\left.\begin{aligned} &\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}; \\ &\varepsilon_z = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0. \end{aligned}\right\}. \tag{3.1.28}$$

Из шести условий совместности деформаций Сен-Венана остается только одно уравнение вида (3.1.16), а именно

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}.$$

Наконец, закон Гука для изотропного материала, имеющий в прямой форме вид (2.7.7), или

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \mu\sigma_y)\\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}(\sigma_y - \mu\sigma_x)\\ \varepsilon_z &= -\frac{\mu}{E}(\sigma_x + \sigma_y)\\ \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G}.\end{aligned}\right\},$$

в обратной записывается как

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{E}{(1-\mu^2)}(\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y)\\ \sigma_y &= \frac{E}{(1-\mu^2)}(\varepsilon_y + \mu\varepsilon_x)\\ \tau &= G\gamma_{xy} = \frac{E}{2(1+\mu)}\gamma_{xy}\end{aligned}\right\}. \qquad (3.1.29)$$

Уравнение сплошности (3.1.16) с учетом (2.7.7) может быть переписано в терминах напряжений, а именно

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}(\sigma_x - \mu\sigma_y) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\sigma_y - \mu\sigma_x) = 2(1+\mu)\frac{\partial^2\tau}{\partial x\partial y}. \qquad (3.1.30)$$

Считая объемные силы X и Y постоянными, продифференцируем первое уравнение системы (3.1.25) по x, а второе — по y, и сложим их почленно. Имеем

$$\frac{\partial^2\tau}{\partial x\partial y} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\sigma_y}{\partial y^2}\right). \qquad (3.1.31)$$

Сравнивая (3.1.30) и (3.1.31), получаем уравнение неразрывности деформаций, выраженное в напряжениях — *уравнение Леви*:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\sigma_x + \sigma_y) = 0, \qquad (3.1.32)$$

или

$$\nabla^2(\sigma_x + \sigma_y) = 0. \qquad (3.1.33)$$

Здесь через ∇^2 обозначен гармонический оператор Лапласа.

Таким образом, решение плоской задачи теории упругости в напряжениях сводится к интегрированию системы трех дифференциальных уравнений: двух уравнений равновесия (3.1.25) и уравнения совместности деформаций (3.1.32) или (3.1.33). Однако эту систему также можно упростить, сведя ее к одному уравнению,

если ввести в рассмотрение так называемую функцию Эйри $\varphi(x,y)$. Величины напряжений связаны с функцией Эйри соотношениями

$$\sigma_x = \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}; \quad \sigma_y = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}; \quad \tau = -\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} - yX - xY\,. \tag{3.1.34}$$

Для проверки корректности введения функции напряжений φ и ее зависимости от напряжений подставим (3.1.34) в уравнения равновесия (3.1.25). Нетрудно убедиться, что такая подстановка при условии постоянства объемных сил X и Y дает тождество для любой функции φ:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}\right) - X + X = 0 \\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}\right) - Y + Y = 0 \end{aligned}\right\}.$$

Таким образом можно получить множество решений уравнений равновесия (3.1.25). Действительным решением задачи будет то из них, которое одновременно удовлетворяет условию совместности деформаций (3.1.32). Подставляя (3.1.34) в (3.1.32), получаем

$$\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4\varphi}{\partial y^4} = 0\,. \tag{3.1.35}$$

или

$$\nabla^2\nabla^2\varphi = 0\,. \tag{3.1.36}$$

Выражение (3.1.36), или, в развернутом виде, (3.1.35), называемое *бигармоническим уравнением*, широко используется в теории упругости для описания напряженного состояния. Это уравнение является исключительно важным, ведь в результате плоская задача теории упругости свелась к решению единственного уравнения (3.1.35), дополненного в каждом конкретном случае соответствующими статическими граничными условиями на поверхности тела типа (3.1.27). После определения функции φ переход к самим напряжениям выполняется по формулам (3.1.34) с помощью дифференцирования.

Заметим, что если объемные нагрузки отсутствуют, то выражения (3.1.34) упрощаются:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}; \quad \sigma_y = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}; \quad \tau = -\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}. \tag{3.1.37}$$

Статические граничные условия (3.1.27) выражаются через функцию напряжения φ, если в (3.1.27) подставить соотношения (3.1.37):

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}l - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}m = p_x \\ -\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}l + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}m = p_y \end{aligned}\right\}. \tag{3.1.38}$$

Глава 3.2. Напряжения и деформации на контакте двух тел

Напряженно-деформированное состояние в условиях контакта тел изучается в специальных разделах теории упругости. Задача расчета такого состояния получила название *контактной задачи теории упругости*. Следует отметить, что полное аналитическое решение контактной задачи теории упругости очень громоздко и подробно изложено в [24]. В настоящей главе эта задача излагается в сокращенной форме с целью получения читателем общего представления о методике ее решения.

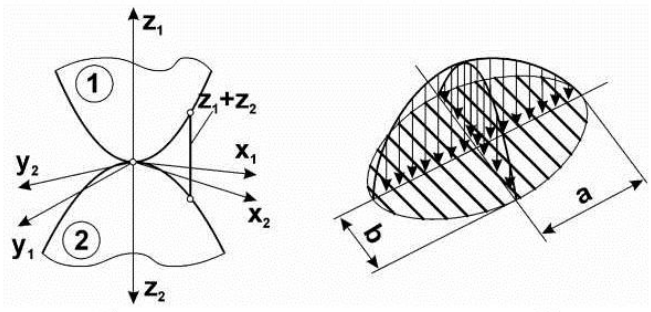
Первоначальное решение контактной задачи было предложено Герцем для двух возможных вариантов начального контакта: точечного и линейного. Современные методы расчета напряженно-деформированного состояния в задачах контакта деталей, и прежде всего численные, иногда позволяют получить даже более точные решения, но это ни в коей мере не умаляет интерес к задачам Герца, поскольку он продиктован прежде всего возможностью получения *аналитических зависимостей*. Строго говоря, решения Герца не являются в чистом виде аналитическими, так как они приводят к интегралам, которые не выражаются через элементарные функции (для вычисления таких интегралов составлены таблицы). Тем не менее эти зависимости, хотя и приближенные, лежат в основе ряда важных инженерных методик, реализованных и проверенных в практике проектирования.

В основе теории Герца лежит ряд допущений:

- материалы контактирующих тел однородны и изотропны;
- нагрузка, действующая в точке контакта, направлена по прямой, соединяющей центры кривизны контактирующих тел;
- пластические деформации в контакте отсутствуют;
- размеры зоны контакта малы по сравнению с размерами контактирующих тел;
- тела, участвующие в контакте, имеют абсолютно гладкие поверхности, без шероховатого слоя и погрешностей формы.

Результат решения задачи Герца принципиально зависит от вида начального контакта. Рассмотрим последовательно два возможных контакта — точечный и линейный.

Случай начального контакта в точке. На рис. 3.2.1a показано контактное взаимодействие двух тел 1 и 2, ограниченных криволинейными поверхностями $z_1 = f_1(x_1, y_1)$ и $z_2 = f_2(x_2, y_2)$, в случае, когда начальный контакт осуществляется в точке. Если характер этого взаимодействия таков, что распределение давления в зоне контакта представляется в форме эллипсоида, то под действием внешней нагрузки границы точечного контакта расширяются и в конечном итоге принимают форму эллипса с полуосями a и b (рис. 3.2.1b).



a) b)

Рис. 3.2.1

Очевидно, что для комплексного расчета контактного взаимодействия необходимо определить величины a и b, а также найти наибольшее давление в контакте.

Рассмотрим в этой связи напряженно-деформированное состояние полупространства Ω, нагруженного давлением σ_{Hr} (рис. 3.2.2). При приложении нагрузки в некоторой точке этого полупространства с координатами (ξ,η) окрестные участки перемещаются.

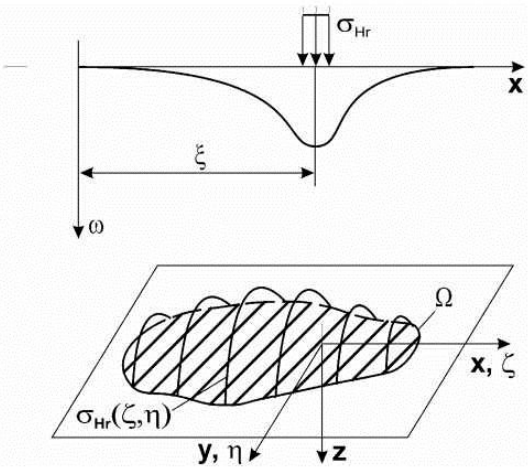


Рис. 3.2.2

Введем обозначение $E' = \dfrac{E}{\left(1-\mu^2\right)}$. Величина перемещения точки с координатами $\left(x,\ y\right)$ в соответствии с теорией упругости равна

$$\omega(x,y) = \frac{1}{\pi E'} \int_{\Omega} \frac{\sigma_{Hr}(\xi,\eta)d\xi\, d\eta}{\sqrt{(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}}. \qquad (3.2.1)$$

Давление в зоне контакта, как было указано выше, распределено по эллиптическому закону (рис. 3.2.2b),

$$\sigma_{Hr} = \sigma_H \sqrt{1-(\xi/a)^2-(\eta/b)^2}\,, \qquad (3.2.2)$$

где σ_H — наибольшее контактное давление, соответствующее точке $\xi = 0,\ \eta = 0$. Тогда поле перемещений можно рассчитать интегрированием выражения (3.2.1) после подстановки в него закона изменения текущих напряжений (3.2.2). В результате получаем

$$\omega(x,y) = \frac{\sigma_H}{aE'}\left[abK - \frac{b}{a}Mx^2 - \frac{a}{b}(K-M)y^2\right], \qquad (3.2.3)$$

где

$$K = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}};\ e = \sqrt{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2};\ M = \frac{1}{e}(K-L);\ L = \int_0^{\pi/2}\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}\,d\varphi.$$

Если в контакте находятся два тела известной кривизны, можно показать, что координаты z_j ($j = 1,2$ — номер тела в контакте) точек поверхностей контактирующих тел удовлетворяют уравнению

$$z_j = \frac{x_j^2}{2\rho_{j1}} + \frac{y_j^2}{2\rho_{j2}}. \qquad (3.2.4)$$

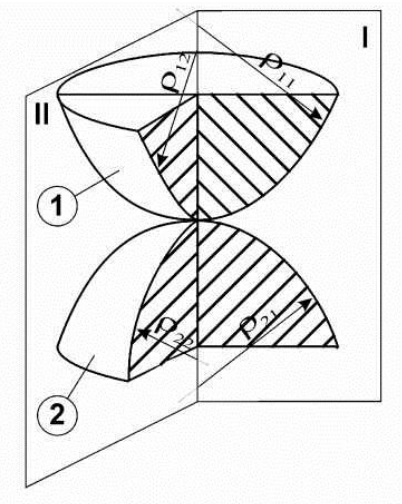


Рис. 3.2.3

Здесь ρ_{j1} и ρ_{j2} — радиусы кривизны поверхностей контактирующих тел, причем первый индекс соответствует номеру тела в контакте, второй — номеру радиуса кривизны в двух взаимно перпендикулярный плоскостях (рис. 3.2.3).

Будем считать, что уравнения поверхностей (3.2.4) задаются в одной и той же декартовой системе координат XOY. Понимая под δ расстояние, на которое сближаются центры контактирующих тел, запишем соотношение, выражающее равенство сумм текущих координат произвольной точки поверхности до и после приложения нагрузки:

$$z_1 + z_2 = \delta - (\omega_1 + \omega_2). \qquad (3.2.5)$$

Точки $z_1 + z_2 > \delta$ не попадают в зону контакта и потому не являются предметом данного рассмотрения. Очевидно также и то, что семейство кривых равных расстояний, для которых выполняется равенство $z_1 + z_2 = const$, есть семейство подобных эллипсов вида

$$\frac{x^2}{2\rho_{11}} + \frac{y^2}{2\rho_{12}} + \frac{x^2}{2\rho_{21}} + \frac{y^2}{2\rho_{22}} = const \equiv Ax^2 + By^2, \qquad (3.2.6)$$

где ρ_{ij} $(i, j = 1,2)$ — радиусы кривизны поверхностей контактирующих тел (рис. 3.2.3), а параметры A и B подлежат определению. Для этого подставим в (3.2.5) выражения (3.2.3) и (3.2.6), что дает

$$\delta - \left(Ax^2 + By^2\right) = \frac{2\sigma_H b}{E''}\left[K - M\frac{x^2}{a^2} - (K - M)\frac{y^2}{b^2}\right], \qquad (3.2.7)$$

где $E'' = \dfrac{2E_1'E_2'}{\left(E_1' + E_2'\right)}$. Приравнивая в правой и левой частях (3.2.7) коэффициенты при одинаковых степенях x и y, получаем для определения A, B и δ систему трех уравнений:

$$\left.\begin{aligned} \delta &= \frac{2\sigma_H bK}{E''} \\ A &= \frac{2\sigma_H bM}{E''a^2} \\ B &= \frac{2\sigma_H (K - M)}{E''b} \end{aligned}\right\}. \qquad (3.2.8)$$

Кроме того, система (3.2.8) должна быть дополнена уравнением равновесия, которое в принятых обозначениях записывается в виде

$$F = \sigma_H \iint_{\Omega} \sqrt{1-(\xi/a)^2-(\eta/b)^2}\, d\xi d\eta \,. \qquad (3.2.9)$$

где F — полная нормальная сила в контакте. Вычисляя интегралы в (3.2.9) и решая его относительно наибольшего контактного давления σ_H (при $\xi = 0,\ \eta = 0$), получаем

$$\sigma_H = \frac{3}{2} \cdot \frac{F}{\pi a b} \,. \qquad (3.2.10)$$

Для записи остальных параметров, характеризующих контактное взаимодействие, введем следующие обозначения: $k_{ij} = 1/\rho_{ij}$ — главная кривизна соприкасающихся тел в начальной точке касания (кривизна считается положительной, если ее центр находится в точке, расположенной внутри рассматриваемой детали, и отрицательной в противном случае); $C_M = \dfrac{1-\mu_1^2}{E_1} + \dfrac{1-\mu_2^2}{E_2}$ — параметр материалов контактирующих деталей. Тогда имеем

$$a = n_a \cdot \sqrt[3]{\frac{3}{2} \cdot \frac{C_M}{\sum\limits_{i,j} k_{ij}} F}\,; \qquad b = n_b \cdot \sqrt[3]{\frac{3}{2} \cdot \frac{C_M}{\sum\limits_{i,j} k_{ij}} F}\,;$$

$$\delta = \frac{1}{2} n_\delta \cdot \sqrt[3]{\left[\frac{9}{4} C_M^2 F^2 \sum_{i,j} k_{ij}\right]} \,. \qquad (3.2.11)$$

Здесь $\sum\limits_{i,j} k_{ij} = k_{11} + k_{12} + k_{21} + k_{22}$; n_a, n_b и n_δ — величины, определяемые геометрией контактирующих поверхностей, значения которых (табл. 3.2.1) зависят от некоторого параметра θ. В том случае, когда центры кривизны контактирующих тел лежат в одной плоскости, этот параметр равен

$$\theta = \frac{\theta_2 - \theta_1}{\theta_2 + \theta_1}; \qquad \theta_1 = \frac{1}{2}(k_{11} + k_{21}); \qquad \theta_2 = \frac{1}{2}(k_{12} + k_{22}) \,.$$

Подставляя a и b из (3.2.11) в (3.2.10), для наибольшего давления σ_H получаем

$$\sigma_H = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\pi n_a n_b} \sqrt[3]{\left[\frac{2\sum\limits_{i,j} k_{ij}}{3C_M}\right]^2} F^{\frac{1}{3}} \,. \qquad (3.2.12)$$

Таблица 3.2.1. **Параметры контактного взаимодействия**

θ	n_a	n_b	n_S	θ	n_a	n_b	n_S
0,01923	1,013	0,9873	0,9999	0,7673	2,141	0,5665	0,8168
0,06087	1,042	0,9606	0,9992	0,8166	2,381	0,5325	0,7775
0,1075	1,076	0,9318	0,9974	0,8441	2,557	0,5114	0,7509
0,1602	1,117	0,9005	0,9942	0,8741	2,805	0,4858	0,7163
0,2207	1,168	0,8660	0,9889	0,9077	3,199	0,4524	0,6675
0,2913	1,233	0,8271	0,9804	0,9150	3,311	0,4442	0,6549
0,3755	1,322	0,7822	0,9667	0,9225	3,441	0,4352	0,6409
0,4795	1,456	0,7278	0,9432	0,9303	3,594	0,4253	0,6251
0,5036	1,491	0,7152	0,9366	0,9383	3,781	0,4142	0,6071
0,5291	1,532	0,7019	0,9290	0,9467	4,014	0,4014	0,5860
0,5560	1,578	0,6876	0,9203	0,9556	4,320	0,3864	0,5608
0,5848	1,631	0,6723	0,9102	0,9649	4,750	0,3680	0,5292
0,6155	1,693	0,6557	0,8983	0,9749	5,432	0,3436	0,4864
0,6486	1,768	0,6374	0,8841	0,9861	6,837	0,3058	0,4186
0,6845	1,861	0,6171	0,8668	0,9923	8,609	0,2722	0,3579
0,7238	1,979	0,5938	0,8451				

Из (3.2.12) видно, что в центре площадки контакта имеет место всестороннее объемное сжатие. Создаваемые при этом главные напряжения (для случая, когда контактирующие цилиндры изготовлены из одинаковых материалов, т. е. $E_1 = E_2 = E$ и $\mu_1 = \mu_2 = \mu$) равны

$$\sigma_x = -\sigma_{II}\frac{2\mu+\beta}{1+\beta}; \qquad \sigma_y = -\sigma_{II}\frac{1+2\mu\beta}{1+\beta}; \qquad \sigma_z = -\sigma_{II}, \quad (3.2.13)$$

где $\beta = b/a$.

В качестве примера рассмотрим точечный контакт двух шаров радиусами r_1 и r_2. При этом эллиптическая площадка распределения давления становится круговой, а формулы (3.2.10) приобретают вид

$$a = b = 0{,}9086\sqrt[3]{\frac{C_M r_1 r_2}{r_1+r_2}F}^{\frac{1}{3}}; \ \delta = 0{,}8255\sqrt[3]{\frac{C_M^2(r_1+r_2)}{r_1 r_2}F}^{\frac{2}{3}}. \quad (3.2.14)$$

Наибольшее давление в контакте равно

$$\sigma_{II} = 0{,}5784\sqrt[3]{\left[\frac{r_1+r_2}{C_M r_1 r_2}\right]^2}F^{\frac{1}{3}}. \quad (3.2.15)$$

Заметим, что если при контакте один из шариков находится внутри другого, то вместо суммы $r_1 + r_2$ следует брать разность $|r_1 - r_2|$.

В частном случае контакта сферической и плоской поверхностей один из радиусов, например r_2, обращается в бесконечность, $r_2 \to \infty$, а другой $r_1 = r$. Тогда формулы (3.2.14) — (3.2.15) видоизменяются как

$$a = b = 0{,}9086\sqrt[3]{C_M r F^1}; \quad \delta = 0{,}8255\sqrt[3]{\frac{C_M^2}{r}F^{\frac{2}{3}}}; \quad \sigma_H = 0{,}5784\sqrt[3]{\left[\frac{r}{C_M r^2}\right]^2 F^{\frac{1}{3}}}. \quad (3.2.16)$$

Случай линейного контакта. Случай линейного контакта двух цилиндров рассматривается в предположении, что один из радиусов кривизны каждой из контактирующих поверхностей стремится к бесконечности, например, $\rho_{11} \to \infty$, $\rho_{21} \to \infty$. Обозначим оставшиеся радиусы кривизны как $\rho_{21} = \rho_1$, $\rho_{22} = \rho_2$, тогда $a \to \infty$. Далее предположим, что в этом случае распределение нормального давления подчиняется не эллипсоидальному закону, а имеет вид

$$\sigma_r = \frac{\sigma_H}{b}\sqrt{(b^2 - y^2)}. \quad (3.2.17)$$

Тогда величина наибольшего удельного давления, определяемая интегрирования уравнения равновесия, равна

$$\sigma_H = \frac{2F}{\pi b l}, \quad (3.2.18)$$

где l — длина контактной линии, а b — полуширина площадки контакта, равная

$$b = \sqrt{\frac{4}{\pi}\left[\frac{FC_M}{l}\frac{\rho_1\rho_2}{\rho_2 \pm \rho_1}\right]}. \quad (3.2.19)$$

Подстановка (3.2.19) в (3.2.18) приводит к следующему значению максимального удельного давления на площадке:

$$\sigma_H = \sqrt{\frac{1}{\pi}\left[\frac{F}{lC_M}\frac{\rho_2 \pm \rho_1}{\rho_1\rho_2}\right]}. \quad (3.2.20)$$

В (3.2.19) и (3.2.20) знак "–" принимается в случае сжатия, если цилиндр радиуса ρ_1 контактирует с цилиндрической впадиной радиуса $\rho_2 > \rho_1$ (т. е. для внутреннего контакта). В остальных случаях следует брать знак "+".

При контакте цилиндра с плоской поверхностью полагаем $\rho_2 \to \infty$, $\rho_1 = \rho$, тогда из (3.2.19) и (3.2.20) следует, что

$$b = 1{,}128\sqrt{\left[\frac{FC_M\rho}{l}\right]}; \qquad \sigma_H = 0{,}5642\sqrt{\left[\frac{F}{\rho l C_M}\right]}. \quad (3.2.21)$$

Заметим, что все приведенные выше формулы получены при условии пренебрежения собственными объемными деформациями контактирующих тел. Учет этого вида деформаций приведет к некоторому изменению картины распределения контактных напряжений, особенно на краях. Реальную картину напряженного состояния можно рассчитать методом конечных элементов.

Актуальной проблемой для практики является задача расчета перемещений в контакте двух цилиндров с параллельными осями. В этом случае имеем

$$\delta = \frac{2F}{\pi l}\left\{\frac{(1-\mu_1^2)}{E_1}\left(\ln\frac{2\rho_1}{b}+0{,}407\right)+\frac{(1-\mu_2^2)}{E_2}\left(\ln\frac{2\rho_2}{b}+0{,}407\right)\right\}. \quad (3.2.22)$$

Если контактирующие цилиндры изготовлены из одинаковых материалов, для которых $E_1 = E_2 = E$ и $\mu_1 = \mu_2 = \mu$, то формула (3.2.22) несколько упрощается:

$$\delta = \frac{2F}{\pi l}\cdot\frac{(1-\mu^2)}{E}\left(\ln\frac{4\rho_1\rho_2}{b^2}+0{,}815\right). \quad (3.2.23)$$

Напряжения, которые возникают внутри участвующих в контакте деталей, можно описать аналитическими функциями, но для практического использования достаточно рассмотреть лишь одну точку, а именно ту, в которой давление достигает максимальной величины. В этой точке напряжения на поверхности контакта равны

$$\sigma_y = \sigma_z = -\sigma_H; \quad \sigma_x = -2\mu\sigma_H. \quad (3.2.24)$$

Согласно гипотезе прочности для максимальных касательных напряжений (см. главу 2.7), разрушение детали наступает вследствие возникновения напряжения, равного или превышающего наибольшее напряжение сдвига, которое, как показали вычисления, имеет место на глубине $z = 0{,}78b$ и равно $\tau_{\max} = 0{,}3\sigma_H$.

В заключение отметим, что рассмотренные выше задачи контактного взаимодействия тел имеют частный характер. Для комплексного анализа напряженного и деформированного состояний в контакте необходимо использовать известные численные методы.

Глава 3.3. Приближенные методы решения линейных задач теории упругости

Выше уже неоднократно упоминалось, что точное аналитическое решение возможно только для очень ограниченного круга задач теории упругости. Поэтому для инженерной практики огромное значение имеют приближенные методы. Важность этих методов особенно возрастает в связи с активным внедрением в теорию и практику проектирования вычислительной техники и новейших информационных технологий.

В данной главе мы рассмотрим только два метода, имеющие наибольшее применение для решения прикладных инженерных задач: *метод конечных элементов (МКЭ)* и *метод конечных разностей (МКР)*.

Характерной особенностью МКЭ, относящегося к так называемым *прямым методам*, является то, что процедуры отыскания числовых полей неизвестных функций (таких как перемещения, напряжения, силы) строятся на основе вариационных принципов механики упругого тела без непосредственного использования дифференциальных уравнений. Заметим, что в настоящее время МКЭ является самым эффективным прямым методом приближенного решения прикладных задач механики.

Метод конечных разностей — это метод приближенного решения краевых задач для дифференциальных уравнений.

Метод конечных элементов (МКЭ). В основе этого метода лежит представление объекта исследования в виде набора некоторых простых с геометрической точки зрения фигур, называемых *конечными элементами*, взаимодействующих между собой только в узлах. Расположенные определенным образом (в зависимости от конструкции объекта) и закрепленные в соответствии с граничными условиями конечные элементы, форма которых определяется особенностями моделируемого объекта, позволяют описать все многообразие механических конструкций и деталей.

Например, плоскую ферменную конструкцию можно смоделировать набором плоских стержневых фигур, рамную — набором объемных стержневых элементов, различного рода пластины и оболочки — множеством плоских треугольников или прямоугольников. Геометрически объемные тела удобно представлять в виде совокупности элементарных пирамид, параллелепипедов и призм, и т. д. На рис. 3.3.1 показан пример разбиения пластины на конечные элементы — треугольники.

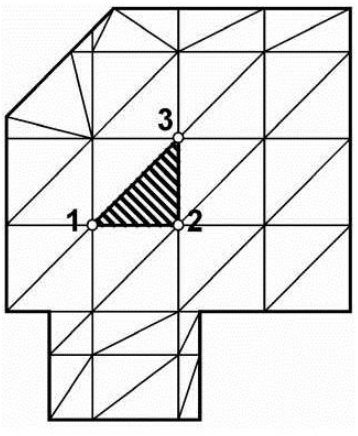


Рис. 3.3.1

Такое представление рассматриваемого объекта позволяет решать задачи расчета напряженного и деформированного состояний тела, устойчивости и динамики, нахождения частот и амплитуд собственных и вынужденных колебаний. Кроме того, МКЭ можно с успехом использовать для решения задач стационарной и нестационарной теплопроводности, расчета полей статического электричества и скоростей безвихревого течения жидкости, и т. д.

Практическое использование этого метода во многом зависит от уровня развития компьютерной техники и качества программного обеспечения, реализующего этот метод. Программное обеспечение для решения за-

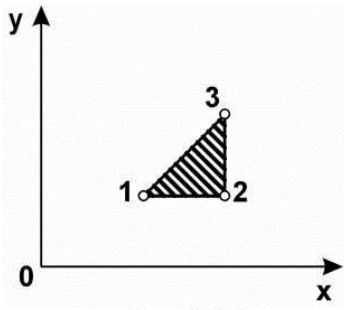


Рис. 3.3.2

дач методом МКЭ должно включать в себя следующие элементы: редактор разбиения на конечные элементы, ядро, непосредственно обеспечивающее решение, и визуализатор для демонстрации полученных результатов.

Следует отметить, что МКЭ — это самостоятельный раздел механики сплошной среды, который динамично развивается и совершенствуется. Для подробного ознакомления с ним можно воспользоваться специальной литературой. Здесь же будут рассмотрены лишь физические основы этого метода на примере решения плоской задачи теории упругости — расчета напряженного состояния тонкой пластины произвольной формы, в качестве конечного элемента которой выступает плоский элемент треугольной геометрической формы.

Рассмотрим конечный элемент, координаты узлов которого равны (x_1, y_1), (x_2, y_2) и (x_3, y_3) (рис. 3.3.2). После приложения внешней нагрузки тело деформируется, и каждая внутренняя точка этого элемента с координатами (x, y) занимает новое положение, перемещаясь в направлении координатных осей x и y на расстояния $u(x, y)$ и $v(x, y)$ соответственно, причем в пределах одного конечного элемента эти перемещения представляются в виде линейных функций координат:

$$\left.\begin{aligned} u(x,y) &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \\ v(x,y) &= \alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y \end{aligned}\right\}, \tag{3.3.1}$$

или, в матричной форме,

$$\vec{u}(x,y) = \left[L(x,y)\right]\vec{\alpha}, \tag{3.3.2}$$

где

$$\vec{u}(x,y) = \begin{bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{bmatrix}; \quad \left[L(x,y)\right] = \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix};$$

$$\vec{\alpha} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 & \alpha_6 \end{bmatrix}.$$

Необходимо отметить, что задание перемещений в виде линейных функций (3.3.1) обеспечивает сшивку этих функций на границах соседних элементов. Действительно, равенство перемещений в узлах означает их совпадение везде вдоль границы элемента.

Подставляя в (3.3.2) координат узловых точек, получаем

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{bmatrix},$$

или

$$\vec{u} = \left[L(xy)\right]\vec{\alpha}\,, \tag{3.3.3}$$

где $\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 & u_3 & v_3 \end{bmatrix}^T$.

В системе уравнений (3.3.3) в качестве неизвестных можно рассматривать постоянные коэффициенты α_i. Разрешая (3.3.3) относительно α_i с помощью формул Крамера, имеем

$$\alpha_1 = \frac{\begin{vmatrix} u_1 & x_1 & y_1 \\ u_2 & x_2 & y_2 \\ u_3 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}}{2\Delta}; \quad \alpha_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & u_1 & y_1 \\ 1 & u_2 & y_2 \\ 1 & u_3 & y_3 \end{vmatrix}}{2\Delta}; \quad \alpha_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & x_1 & u_1 \\ 1 & x_2 & u_2 \\ 1 & x_3 & u_3 \end{vmatrix}}{2\Delta};$$

$$\alpha_4 = \frac{\begin{vmatrix} v_1 & x_1 & y_1 \\ v_2 & x_2 & y_2 \\ v_3 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}}{2\Delta}; \quad \alpha_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & v_1 & y_1 \\ 1 & v_2 & y_2 \\ 1 & v_3 & y_3 \end{vmatrix}}{2\Delta}; \quad \alpha_6 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & x_1 & v_1 \\ 1 & x_2 & v_2 \\ 1 & x_3 & v_3 \end{vmatrix}}{2\Delta}. \tag{3.3.4}$$

Здесь Δ — определитель матрицы системы, равный площади конечного элемента:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}.$$

Заметим, что тот же самый результат (3.3.4) получается и другим способом: поскольку определитель матрицы отличен от нуля, то единственное решение системы (3.3.3) есть произведение обращенной матрицы системы и вектора $\vec{u}$.

Подстановка (3.3.4) в (3.3.3) приводит к выражению для определения поля перемещений внутри данного конечного элемента:

$$\vec{u}(x,y) = \frac{1}{2\Delta}\left[\left(a_1 + b_1 x + c_1 y\right)u_1 + \left(a_2 + b_2 x + c_2 y\right)u_2 + \left(a_3 + b_3 x + c_3 y\right)u_3\right], \tag{3.3.5}$$

где $a_1 = x_2 y_3 - x_3 y_2$; $b_1 = y_2 - y_3$; $c_1 = x_3 - x_2$, а остальные коэффициенты находятся путем циклической перестановки индексов 2 и 3. В матричной форме (3.3.5) переписывается как

$$\vec{u}(x,y) = \sum_{i=1}^{3} \psi_i(x,y)u_i\,. \tag{3.3.6}$$

Функция ψ_i, имеющая вид

$$\psi_i = \frac{1}{2\Delta}\left(a_i + b_i x + c_i y\right), \tag{3.3.7}$$

называется *функцией формы*.

Компоненты вектора-столбца $\vec{\varepsilon}$ относительной деформации связаны с перемещениями соотношениями (3.1.28),

$$\vec{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x} \end{bmatrix}.$$

С другой стороны, используя (3.3.6) и (3.3.7), можно написать

$$\vec{\varepsilon}(x, y) = \sum_{i=1}^{3} [\beta_i]\, \vec{u} = [\beta] \cdot \vec{u}\,, \tag{3.3.8}$$

где $\vec{u}$ — вектор узловых перемещений, $[\beta_i] = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \psi_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial \psi_i}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \psi_i}{\partial y} & \dfrac{\partial \psi_i}{\partial x} \end{bmatrix}$, $i = 1,2,3$;

$$[\beta] = \{[\beta_1][\beta_2][\beta_3]\}; \quad [\beta] = \frac{1}{2\Delta} \cdot \begin{bmatrix} b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3 \\ c_1 & b_1 & c_2 & b_2 & c_3 & b_3 \end{bmatrix}.$$

Перемещения связаны с соответствующими напряжениями законом Гука, который для случая плоского нагружения записывается в виде

$$\vec{\sigma} = [E]\vec{\varepsilon}\,, \tag{3.3.9}$$

где

$$[E] = \frac{E}{1-\mu^2} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1-\mu}{2} \end{bmatrix}.$$

Уравнение (3.3.9) с учетом (3.3.6) принимает следующий вид

$$\vec{\sigma} = [E][\beta] \cdot \vec{u}\,. \tag{3.3.10}$$

Воспользуемся выражением для потенциальной энергии деформации элемен-

тарного объема (2.7.13). Тогда эта энергия, с учетом (3.3.10), определится из очевидного уравнения

$$U = \frac{1}{2}\vec{\sigma}^T \vec{\varepsilon}\ \Delta V = \frac{1}{2}\vec{u}^T [E]\cdot[\beta]^T[\beta]\cdot\vec{u}\Delta V . \qquad (3.3.11)$$

Выражение для объема в уравнении (3.3.11) представляет собой, в случае плоской задачи, произведение площади конечного элемента на его толщину.

Энергия деформации элемента объема может быть рассчитана иначе — как работа внешних сил. В качестве внешней нагрузки на элемент объема можно принять реакции, приложенные к граням этого элемента, тогда

$$U = \frac{1}{2}\vec{u}^T [E]\cdot[\beta]^T[\beta]\cdot\vec{u}\Delta V = \frac{1}{2}\vec{u}^T \vec{R}, \qquad (3.3.12)$$

откуда

$$\vec{R} = [K]\cdot\vec{u}, \qquad (3.3.13)$$

где

$$[K] = [E]\cdot[\beta]^T[\beta]\cdot\vec{u}\Delta V . \qquad (3.3.14)$$

Уравнение (3.3.13) представляет собой обычное уравнение равновесия, а матрица $[K]$ является квадратной размерности 6×6. Она называется *матрицей жесткости* конечного элемента,

$$[K] = \frac{E\delta}{4(1-\mu^2)A}\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & K_{15} & K_{16} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} & K_{26} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} & K_{35} & K_{36} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} & K_{45} & K_{46} \\ K_{51} & K_{52} & K_{53} & K_{54} & K_{55} & K_{56} \\ K_{61} & K_{62} & K_{63} & K_{64} & K_{65} & K_{66} \end{bmatrix}.$$

Элементы этой матрицы получаются решением матричного уравнения (3.3.14):

$$K_{11} = y_{23}^2 + \frac{1-\mu}{2}x_{32}^2; \qquad K_{12} = K_{21} = \frac{1+\mu}{2}x_{32}y_{23};$$

$$K_{13} = K_{31} = y_{23}y_{31} + \frac{1+\mu}{2}x_{32}y_{13}; \qquad K_{14} = K_{41} = \mu y_{23}x_{31} + \frac{1-\mu}{2}x_{32}y_{31};$$

$$K_{15} = K_{51} = y_{12}y_{23} + \frac{1-\mu}{2}x_{32}x_{21}; \qquad K_{16} = \mu y_{23}x_{21} + \frac{1-\mu}{2}x_{32}y_{12};$$

$$K_{22} = x_{32}^2 + \frac{1-\mu}{2}y_{23}^2; \qquad K_{23} = K_{32} = \mu y_{32}x_{31} + \frac{1-\mu}{2}x_{13}y_{23};$$

$$K_{24} = K_{42} = x_{13}x_{32} + \frac{1-\mu}{2} y_{23}y_{31}; \quad K_{25} = K_{52} = \mu x_{32}y_{12} + \frac{1-\mu}{2} x_{21}y_{23};$$

$$K_{26} = K_{62} = x_{32}x_{21} + \frac{1-\mu}{2} y_{12}y_{23}; \qquad K_{33} = y_{31}^2 + \frac{1-\mu}{2} x_{13}^2;$$

$$K_{34} = K_{43} = \frac{1+\mu}{2} x_{13}y_{31}; \qquad K_{35} = K_{53} = y_{31}y_{12} + \frac{1-\mu}{2} x_{21}x_{13};$$

$$K_{36} = K_{63} = \mu x_{21}y_{31} + \frac{1-\mu}{2} x_{13}y_{12}; \qquad K_{44} = x_{13}^2 + \frac{1-\mu}{2} y_{31}^2;$$

$$K_{45} = K_{54} = \mu x_{13}y_{12} + \frac{1-\mu}{2} x_{21}y_{31}; \qquad K_{46} = K_{64} = x_{21}x_{13} + \frac{1-\mu}{2} y_{31}y_{12};$$

$$K_{55} = y_{12}^2 + \frac{1-\mu}{2} x_{21}^2; \qquad K_{56} = K_{65} = \frac{1+\mu}{2} x_{21}y_{12};$$

$$K_{66} = x_{21}^2 + \frac{1-\mu}{2} y_{12}^2.$$

Глобальная матрица жесткости может быть найдена поэлементным суммированием матриц жесткости отдельных элементов и имеет размерность $2N \times 2N$, где N — общее количество узлов разбиения.

Левую часть уравнения равновесия (3.3.13) составляет вектор силовых факторов $\vec{R}$, компоненты которого в количестве $2N$ равны силам, действующим в узлах. Учет распределенной нагрузки производится равномерным ее распределением по узлам, расположенным на границе.

Расчет методом конечных элементов можно продемонстрировать на следующем примере. Пусть квадратная пластина размером 100×100 мм и толщиной 1 мм, жестко защемленная одной из сторон, нагружена консольно сосредоточенной силой $F = 1000$ Н. Следует определить напряженно-деформированное состояние этой пластины.

Для простоты пластина разбивается на два конечных треугольных конечных элемента, которым присвоены номера 0 и 1. Такому варианту разбиения соответствуют четыре узловые точки (рис. 3.3.3). Конечному элементу 0 присвоены следующие обозначения узловых точек — 0, 3, 2; элементу 1 — 0, 1, 3.

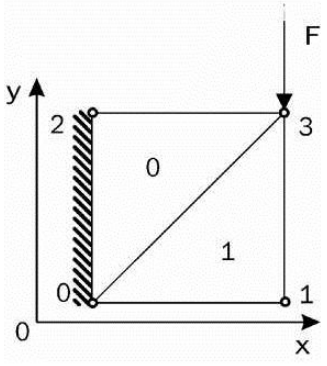


Рис. 3.3.3

Введем глобальную систему координат XY. Для выполнения расчета напряженно-деформированного состояния необходимо записать глобальную матрицу жесткости, сформировав вначале матрицы жесткости составляющих ее конечных элементов. Для этого составим матрицы жесткости для каждого элемента и найдем суммарную матрицу. Глобальная матрица жесткости строится в глобальных индексах.

При составлении примем модуль Юнга $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, коэффициент Пуассона $\mu = 0{,}3$.

$$K_0^{loc} = \left[\begin{array}{cc|cc|cc} 38461{,}5 & 0 & 0 & -38461{,}5 & -38461{,}5 & 38461 \\ 0 & 109890 & -32967 & 0 & 32967 & -109890 \\ \hline 0 & -32967 & 109890 & 0 & -109890 & 32967 \\ -38461{,}5 & 0 & 0 & 38461{,}5 & 38461{,}5 & -38461{,}5 \\ \hline -38461{,}5 & 32967 & -109890 & 38461{,}5 & 148352 & -71428{,}6 \\ 38461{,}5 & -109890 & 32967 & -38461{,}5 & -71428{,}6 & 148352 \end{array}\right]$$

Эта же матрица, записанная в глобальных индексах, имеет вид

$$K_0^{gl} = \left[\begin{array}{cc|cc|cc|cc} 38461{,}5 & 0 & 0 & 0 & -38461{,}5 & -38461{,}5 & 0 & -38461{,}5 \\ 0 & 109890 & 0 & 0 & 32967 & -109890 & -32967 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -38461{,}5 & 32967 & 0 & 0 & 148352 & -71428{,}6 & -109890 & 38461{,}5 \\ 38461{,}5 & -109890 & 0 & 0 & -71428.6 & 148352 & 32967 & -38461{,}5 \\ \hline 0 & -32967 & 0 & 0 & -109890 & 32967 & 109890 & 0 \\ -38461{,}5 & 0 & 0 & 0 & 38461{,}5 & -38461{,}5 & 0 & 38461{,}5 \end{array}\right]$$

Матрица жесткости второго треугольника в локальных индексах

$$K_1^{loc} = \left[\begin{array}{cc|cc|cc} 109890 & 0 & -109890 & 32967 & 0 & -32967 \\ 0 & 38461{,}5 & 38461{,}5 & -38461{,}5 & -38461{,}5 & 0 \\ \hline -109890 & 38461{,}5 & 148352 & -71428{,}6 & -38461{,}5 & 32967 \\ 32967 & -38461{,}5 & -71428{,}6 & 148352 & 38461{,}5 & -109890 \\ \hline 0 & -38461{,}5 & -38461{,}5 & 38461{,}5 & 38461{,}5 & 0 \\ 32967 & 0 & 32967 & -109890 & 0 & 109890 \end{array}\right]$$

Матрица жесткости второго треугольника в глобальных индексах

$$K_1^{gl} = \left[\begin{array}{cc|cc|cc|cc} 109890 & 0 & -109890 & 32967 & 0 & 0 & 0 & -32967 \\ 0 & 38461{,}5 & 38461{,}5 & -38461{,}5 & 0 & 0 & -38461{,}5 & 0 \\ \hline -109890 & 38461{,}5 & 148352 & -71428{,}6 & 0 & 0 & -38461{,}5 & 32967 \\ 32967 & -38461{,}5 & -71428{,}6 & 148352 & 0 & 0 & 38461{,}5 & -109890 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -38461{,}5 & -38461{,}5 & 38461{,}5 & 0 & 0 & 38461{,}5 & 0 \\ 32967 & 0 & 32967 & -109890 & 0 & 0 & 0 & 109890 \end{array}\right]$$

Окончательная глобальная матрица жесткости

$$K^{gl} = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 148351 & 0 & -109890 & 32967 & -38461 & 38461 & 0 & 71428 \\ 0 & 148351 & 38461 & -38461 & 32967 & -109890 & -71428 & 0 \\ \hline -109890 & 38461 & 148351 & -71428 & 0 & 0 & -38461 & 32967 \\ 32967 & -38461 & -71428 & 148351 & 0 & 0 & 38461 & -109890 \\ \hline -38461 & 32967 & 0 & 0 & 148351 & -71428 & -109890 & 38461 \\ 38461 & -109890 & 0 & 0 & -71428 & 148351 & 32967 & -38461 \\ \hline 0 & -71428 & -38461 & 38461 & -109890 & 32967 & 148351 & 0 \\ -71428 & 0 & 32967 & -109890 & 38461 & -38461 & 0 & 148351 \end{array}\right]$$

Глобальная матрица получилась суммированием матриц для каждого элемента, в нашем случае $K^{gl} = K_1^{gl} + K_2^{gl}$.

Построим вектор $\vec{F}$ внешних нагрузок, приложенных к узлам. Так как сила приложена к узлу с индексом 3, то $\vec{F} = \left[0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -1000\right]^T$. Далее необходимо учесть закрепление левой стороны пластины. Это означает, что перемещения точек с индексами 1 и 2 равны нулю, поэтому перемещения, соответствующие этим узлам, следует исключить из системы.

Решив систему линейных уравнений (3.3.13), получим вектор узловых перемещений:

$$\overline{u} = \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.0024 \\ -0.0146 \\ 0 \\ 0 \\ 0.0032 \\ -0.0170 \end{bmatrix}.$$

Узловые перемещения связаны с деформациями конечного элемента через матрицу деформаций $\varepsilon = \left[\beta\right] \cdot \vec{u}$. Отсюда находятся деформации элементов:

$$\overline{\varepsilon}_0 = \begin{bmatrix} 3.15 \cdot 10^{-5} \\ 0 \\ -0.0017 \end{bmatrix}; \quad \overline{\varepsilon}_1 = \begin{bmatrix} -2.42 \cdot 10^{-5} \\ -2.42 \cdot 10^{-5} \\ -9.00 \cdot 10^{-5} \end{bmatrix}.$$

Далее находим для каждого элемента напряжения. Напряжения связаны с деформациями законом Гука (3.3.9). Подставляя полученные деформации, получим искомые напряжения

$$\bar{\sigma}_0 = \begin{bmatrix} 6.92 \\ 2.08 \\ -6\cdot 10^{-5} \end{bmatrix}; \quad \bar{\sigma}_1 = \begin{bmatrix} -6.92 \\ -6.92 \\ -3\cdot 10^{-5} \end{bmatrix}.$$

Метод конечных разностей. Вводные замечания. Идея *метода конечных разностей*, или, как его еще называют, *метода сеток*, состоит в замене основных дифференциальных уравнений рассматриваемой задачи уравнениями в конечных разностях. При этом задача сводится к решению системы алгебраических, а не дифференциальных, уравнений.

Для реализации этой идеи на область рассматриваемого тела — ось стержня или балки, площадь пластины, поверхность оболочки и т. д. — наносится сетка линий, точки пересечений которых называются *узлами*. В случае стержня или балки сетка будет одномерной, а узлы располагаются на оси этих элементов. Неизвестными считаются значения разыскиваемых функций (относительно которых справедливы дифференциальные уравнения механики деформируемого твердого тела (3.1.5), (3.1.11) или (3.1.12), а также (3.1.13) или (3.1.20)) в узлах сетки. Производные, входящие в эти дифференциальные уравнения, аппроксимируются приближенными алгебраическими формулами, которые называются *конечно-разностными*. В конечно-разностных формулах производные функций выражаются через узловые ординаты этих функций (конечно-разностные операторы производных). Конечно-разностные операторы затем подставляются в дифференциальное уравнение, которое должно выполняться в каждом узле сетки. Граничные условия, содержащие производные, также формулируются в терминах конечно-разностных операторов. В итоге замена производных конечно-разностными операторами приводит к *системе линейных алгебраических уравнений* относительно узловых ординат искомых функций, решение которых позволяет определить числовые поля этих функций: распределение напряжений в теле и изменения его размеров и формы. Разумеется, решение подобных систем возможно только с помощью вычислительной техники.

Рассмотрим построение конечно-разностных операторов для производных на примере непрерывной одномерной функции $f = f(x)$ (рис. 3.3.4а). Участок $[ab]$, на котором ищется решение, разобьем на n равных интервалов (в общем случае разбиение может быть и неравномерным). Расстояние $\Delta x = h$ между двумя соседними узлами называется *шагом сетки*.

Как известно, если функция f непрерывна вместе со своими производными на некотором интервале $[x_0,\ x_0 + h]$, то она в точке $x = x_0 + h$ может быть разложена в ряд Тейлора:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{1}{2!}f''(x_0)h^2 + \cdots. \qquad (3.3.15)$$

Рассмотрим три соседних узла с номерами $i-1, i, i+1$. Положим $x_0 = x_i$ и применим разложение (3.3.15) к узлам $i+1$ и $i-1$:

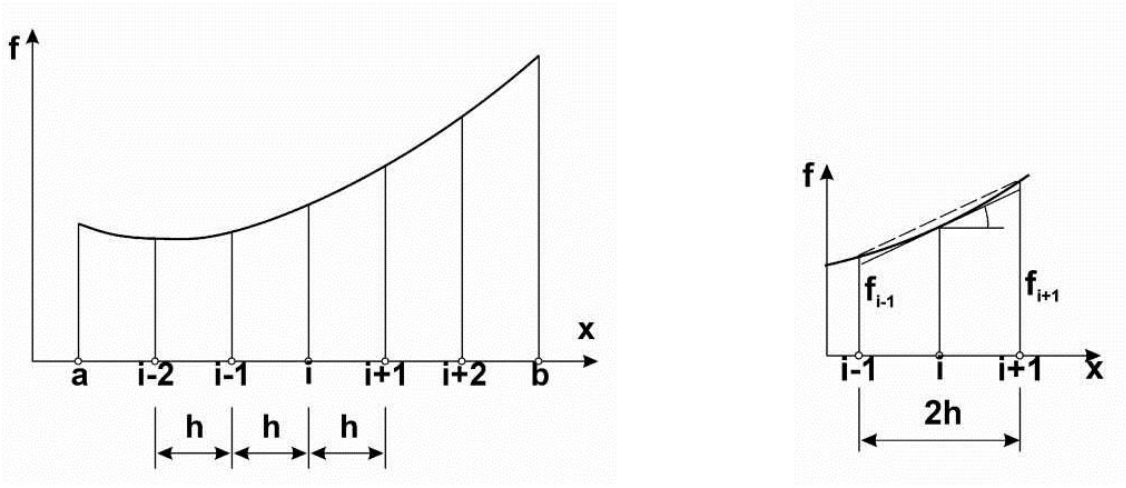
$$\left.\begin{aligned} f_{i+1} &= f_i + f_i' h + \frac{1}{2!} f_i'' h^2 + \frac{1}{3!} f_i''' h^3 + \cdots; \\ f_{i-1} &= f_i - f_i' h + \frac{1}{2!} f_i'' h^2 - \frac{1}{3!} f_i''' h^3 + \cdots. \end{aligned}\right\} \qquad (3.3.16)$$

Количество членов ряда (3.3.16) зависит от степени точности, с которой вычисляются приближенные значения производных. Так, если ограничиться тремя членами, то это будет соответствовать замене истинной кривой $f(x)$ квадратной параболой, проведенной через ординаты f_{i-1}, f_i и f_{i+1}. При удержании в формуле Тейлора большего числа членов можно получить более точные выражения для производных. Однако здесь следует придерживаться разумного подхода: чем большее число членов содержит ряд (3.3.16), тем более громоздкие выражения получаются для конечно-разностных операторов производных, и в конечном итоге можно получить весьма небольшой выигрыш в точности при значительном увеличении времени вычислений.

Итак, ограничимся тремя первыми членами ряда (3.3.16). Тогда, последовательно вычитая и складывая строки (3.3.16), находим первую и вторую производные функции $f(x)$ в i-ой точке,

$$f_i' = \frac{-f_{i-1} + f_{i+1}}{2h}; \; f_i'' = \frac{f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1}}{h^2}. \qquad (3.3.17)$$

Первая из формул (3.3.17) наглядно выражает суть сделанных приближений: первая производная f_i' вычисляется как отношение разности соседних ординат к отрезку $2h$, т. е. тангенс угла наклона касательной в i-ой точке приближенно заменяется тангенсом угла наклона секущей (рис. 3.3.4b).



a) b)

Рис. 3.3.4

Третью производную f_i''' можно вычислить двумя способами: как первую производную от второй производной, $f_i'''=\frac{d}{dx}(f'')_i$, или вторую производную от первой, $f_i'''=\frac{d^2}{dx^2}(f')_i$. Например, согласно первому способу

$$f_i'''=\frac{d}{dx}(f'')_i=\frac{-f_{i-1}''+f_{i-1}''}{2h},$$

или, с учетом (3.3.17),

$$f_i'''=\frac{-(f_{i-2}-2f_{i-1}+f_i)+(f_i-2f_{i-1}+f_{i-2})}{2h\cdot h^2}=\frac{-f_{i-2}+2f_{i-1}-2f_{i-1}+f_{i-2}}{2h^3}. \quad (3.3.18)$$

Точно такой же результат (3.3.18) получается и при использовании второго способа вычисления f_i'''.

Аналогично получается оператор для четвертой производной

$$f_i^{IV}=\frac{f_{i-2}-4f_{i-1}+6f_i-4f_{i-1}+f_{i-2}}{h^4}. \quad (3.3.19)$$

Операторы (3.3.17) — (3.3.19) симметричны относительно их центра, поэтому соответствующие им формулы называются *центральными конечными разностями*. Можно также получить соотношения, выражающие производную в i-ой точке только через правые или только через левые ординаты, однако в дальнейшем будем пользоваться центральными разностями.

Применения МКР к решению плоской задачи теории упругости. Основные уравнения плоской задачи теории упругости, выраженные через введенную в главе 3.1 функцию напряжения, имеют вид:

бигармоническое уравнение (3.1.35)

$$\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4\varphi}{\partial y^4}=0; \quad (3.3.20)$$

формулы для вычисления напряжений (3.1.37)

$$\sigma_x=\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2};\qquad \sigma_y=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2};\quad \tau=-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}; \quad (3.3.21)$$

граничные условия (3.1.38)

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}l-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}m&=p_x\\ -\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}l+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}m&=p_y\end{aligned}\right\}. \quad (3.3.22)$$

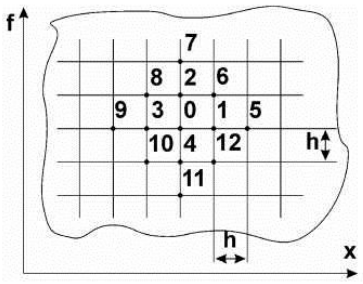


Рис. 3.3.5

В случае плоской задачи теории упругости функция напряжений $\varphi = \varphi(x, y)$ зависит от двух переменных, а потому через конечные разности нужно выразить частные производные.

Исследуемую плоскую область разбиваем сеткой на ячейки с размерами $\Delta x, \Delta y$. Если сетка квадратная, то $\Delta x = \Delta y = h$.

На рис. 3.3.5 показана сетка из 13-ти пронумерованных точек. На основании (3.3.17) и с учетом нумерации точек сетки для точки 0 имеем

$$\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right)_0 = \frac{\varphi_3 - 2\varphi_0 + \varphi_1}{h^2}; \quad \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right)_0 = \frac{\varphi_4 - 2\varphi_0 + \varphi_2}{h^2}. \tag{3.3.23}$$

Складывая равенства (3.3.23), получим конечно-разностную формулу для гармонического оператора Лапласа в точке 0:

$$\left(\nabla^2\varphi\right)_0 = \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right)_0 = \frac{\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 - 4\varphi_0}{h^2}. \tag{3.3.24}$$

Бигармонический оператор с учетом (3.3.24) можно записать в виде

$$\left(\nabla^2\nabla^2\varphi\right)_0 = \left(\nabla^2\chi\varphi\right)_0 = \frac{\chi_1 + \chi_2 + \chi_3 + \chi_4 - 4\chi_0}{h^2},$$

где

$$\chi_i = \left(\nabla^2\varphi\right)_i, \; i = 1,2,3,4,0.$$

Последовательно применив к этим точкам гармонический оператор (3.3.24), получим

$$\nabla^4\varphi = \left(\nabla^2\nabla^2\varphi\right)_0 =$$
$$= \frac{20\varphi_0 - (\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4) + 2(\varphi_6 + \varphi_8 + \varphi_{10} + \varphi_{12}) + \varphi_5 + \varphi_7 + \varphi_9 + \varphi_{11}}{h^4}. \tag{3.3.25}$$

Бигармонический оператор можно получить иначе, а именно непосредственно вычисляя с помощью (3.3.17) — (3.3.19) входящие в (3.3.20) производные:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) = \frac{\varphi_6 - \varphi_8 + \varphi_{10} - \varphi_{12}}{4h^2};$$

$$\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^4} = \frac{\varphi_5 - 4\varphi_1 + 6\varphi_0 - 4\varphi_3 + \varphi_9}{h^4};$$

$$\frac{\partial^4\varphi}{\partial y^4} = \frac{\varphi_7 - 4\varphi_2 + 6\varphi_0 - 4\varphi_4 + \varphi_{11}}{h^4}; \tag{3.3.26}$$

$$\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^2\partial y^2}=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right)=\frac{\varphi_6+\varphi_8+\varphi_{10}+\varphi_{12}-2\varphi_1-2\varphi_2-2\varphi_3-2\varphi_4+4\varphi_0}{h^4}.$$

Подстановка (3.3.26) в (3.3.20) дает бигармонический оператор (3.3.25).

Итак, бигармоническое уравнение (3.3.20) в конечных разностях имеет вид

$$\nabla^4\varphi=\frac{20\varphi_0-(\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3+\varphi_4)+2(\varphi_6+\varphi_8+\varphi_{10}+\varphi_{12})+\varphi_5+\varphi_7+\varphi_9+\varphi_{11}}{h^4}=0. \quad (3.3.27)$$

Алгебраические уравнения вида (3.3.27) составляются для каждой точки сетки внутри контура области. При этом в уравнения войдут значения функции φ как в узлах контура, так и в так называемых *законтурных* точках на расстоянии одного шага (законтурные точки вовлекаются в рассмотрение при составлении конечно-разностных уравнений для точек, лежащих на контуре данного тела). На рис. 3.3.6a показана сетка с законтурными точками для прямоугольной области; внеконтурная сетка дана пунктиром. В законтурных точках функция напряжений φ вычисляется через ее значения в соседних внутриконтурных узлах и значения первой производной по рассматриваемому направлению в контурном узле (рис. 3.3.6b),

$$\varphi_C=\varphi_A+2h\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_B;$$

$$\varphi_E=\varphi_A+2h\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_B. \quad (3.3.28)$$

В узлах величины φ определяются с помощью граничных условий (3.3.22). Проинтегрируем уравнения (3.3.22). Учитывая, что $l=\cos\alpha=\frac{dy}{ds}$, $m=\sin\alpha=-\frac{dx}{ds}$, перепишем (3.3.22) в виде

$$\left.\begin{aligned}\frac{dy}{ds}\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{dx}{ds}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}&=\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)=p_x\\ -\frac{dx}{ds}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}-\frac{dy}{ds}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}&=-\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)=p_y\end{aligned}\right\}. \quad (3.3.29)$$



a) b)

Рис 3.3.6

После интегрирования (3.3.29) получим

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\int p_y ds; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \int p_x ds \ . \tag{3.3.30}$$

Далее запишем выражение для производной функции φ по направлению s

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{dy}{ds}, \tag{3.3.31}$$

которое после интегрирования по частям с учетом (3.3.30) дает

$$\varphi = y\int p_x ds - x\int p_y ds + \int (xp_y - yp_x)ds + C_1 x + C_2 y + C_3 . \tag{3.3.32}$$

Выражение (3.3.32) вследствие проведенного интегрирования содержит линейную функцию $C_1 x + C_2 y + C_3$. Поскольку компоненты напряжений представляются вторыми производными от функции напряжений φ, эта линейная функция не повлияет на распределение напряжений, и постоянные C_1, C_2 и C_3 можно выбрать произвольно.

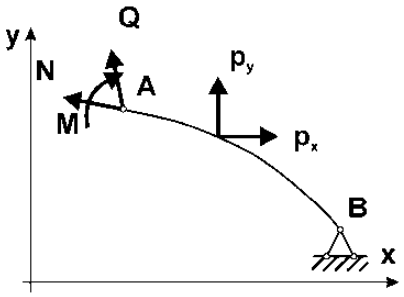


Рис. 3.3.7

С целью облегчения вычисления значений φ и ее производных в точках контура допустимо использовать *рамную аналогию*. Рассмотрим раму, по очертаниям совпадающую с контуром пластины и нагруженную такой же внешней нагрузкой. Интерпретируя участок контура области AB (рис. 3.3.7) как участок рамы, на основании (3.3.32) устанавливаем, что величина φ эквивалентна изгибающему моменту M в поперечном сечении рамы с точностью до линейной функции, которую можно отбросить. Производная от функции φ по нормали $\vec{n}$ к контуру дает нормальную силу N в раме равна

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dn} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dn} = -l\int p_y ds + m\int p_x ds = N \ .$$

Тогда граничные условия (3.3.32) переписываются в виде

$$\varphi(x_c) = M(x_c); \quad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right)\Big|_{x=x_c} = N(x_c), \tag{3.3.33}$$

где точки x_c принадлежат контуру рассматриваемого плоского тела. Равенства (3.3.33) показывают, что на контуре пластины значения функции φ находятся как ординаты изгибающих моментов M_c в условной раме, очертание которой совпадает с контуром пластины, а производные этой функции — как ординаты нормальной силы N_c.

Таким образом, значения функции φ во всех законтурных и контурных узлах находятся из граничных условий (3.3.32) или (3.3.33). Следовательно, в пластине, покрытой сеткой, неизвестными будут только ординаты во внутренних узлах этой сетки. Для этих узлов записываются исходные дифференциальные уравнения (3.3.20), которые затем преобразуются как (3.3.25), что в результате дает систему линейных алгебраических уравнений относительно указанных ординат.

После решения этой системы получаем числовое поле φ в узлах сетки, от которых надо перейти к числовым полям напряжений (3.3.21):

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{\varphi_2 - 2\varphi_0 + \varphi_4}{h^2} \\ \sigma_y &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{\varphi_1 - 2\varphi_0 + \varphi_3}{h^2} \\ \tau &= -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = -\frac{\varphi_6 - \varphi_8 + \varphi_{10} - \varphi_{12}}{4h^2} \end{aligned}\right\}. \qquad (3.3.34)$$

Заметим, что приведенный здесь оператор для τ дает значение касательного напряжения в узле сетки; если же вместо шага h принять $h/2$, то получим напряжение τ в средней точке ячейки, которое может интерпретироваться как среднее касательное напряжение в этой ячейке.

Глава 3.4. Теория механических колебаний

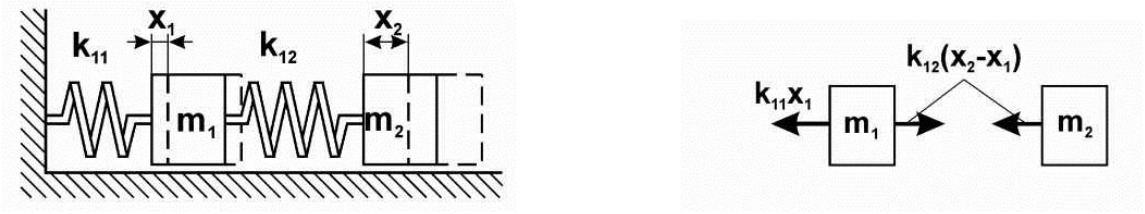
Знание основ теории механических колебаний необходимо инженерам, работающим в различных областях машино-, авиа- и судостроения, промышленного и транспортного строительства и т. д. Колебательные процессы, протекающие в разного рода технических устройствах, оказывают огромное, часто даже решающее, влияние на условия эксплуатации конструкций, их прочность и долговечность, а также здоровье работающих с подобной техникой людей. Причем надо отметить, что механические колебания могут как причинить большой вред, так и принести значительную пользу. Несмотря на специфику связанных с колебаниями практических задач, решаемых каждой из названных областей, все они объединены общими принципами и методами, составляющими суть теории колебаний. Дело в том, что совершенно разные по физической природе колебательные процессы описываются одинаковыми по форме уравнениями. Специфика каждой конкретной задачи фиксируется входящими в эти уравнения константами, зависящими от физической природы изучаемого явления.

В настоящей главе рассматривается теория малых линейных механических колебаний, имеющая наибольшее применение в технике. Вначале исследуются свободные колебания, т. е. колебания автономных систем, происходящие под действием *восстанавливающих* и, в общем случае, *диссипативных* сил около состояния равновесия (напомним, что *восстанавливающими* называются силы, возникающие при отклонении системы от положения равновесия и направленные таким образом, чтобы вернуть систему в это положение; в роли восстанавливающих выступают, как правило, появляющиеся при деформировании упругие силы, а также сила тяжести и сила Архимеда). Затем — вынужденные колебания, вызываемые и поддерживаемые так называемыми *вынуждающими силами*, зависящими от времени и не зависящими от характера движения системы.

3.4.1. Свободные колебания линейных систем с несколькими степенями свободы.

Свободные колебания в чистом виде встречаются в механических системах не слишком часто. Тем не менее их изучение очень важно, так как именно характеристики свободных колебаний, такие как собственные частоты и собственные формы, полностью определяют индивидуальные физические и динамические свойства механической системы и имеют важнейшее значение при анализе вынужденных колебаний.

Дифференциальное уравнение колебательного движения. Существует несколько способов составления дифференциальных уравнений колебательного движения. Наиболее общим из них является метод *уравнений Лагранжа* [4, 29]. Однако, как это часто бывает с общими методами, во многих задачах о колебаниях его применение неоправданно громоздко, и удобнее пользоваться более непосредственными приемами. Рассмотрим один из таких способов, называемый *прямым методом* записи уравнения движения (существует также и *обратный метод*, но здесь он рассматриваться не будет). Согласно этому методу, составляющие систему тела трактуются как свободные материальные точки (или твердые тела), находящиеся под действием восстанавливающих сил, выражаемых через обобщенные координа-



a) b)

Рис. 3.4.1

ты. Для этих материальных точек (твердых тел) и записываются дифференциальные уравнения движения.

Основное дифференциальное уравнение свободных колебаний консервативных упругих линейных систем с несколькими степенями свободы, составленное прямым способом, рассмотрим на примере системы, состоящей из двух грузов с массами m_1 и m_2, соединенных двумя упругими пружинами с жесткостями k_{11} и k_{12} (рис. 3.4.1a). Эта система обладает двумя степенями свободы. При движении грузов происходит деформирование упругих элементов системы. Если грузы перемещаются на расстояния x_1 и x_2 от положения равновесия, в котором пружины не деформированы, то удлинения пружин в процессе движения равны $\Delta l_1 = x_1,\ \Delta l_2 = x_2 - x_1$. Деформации пружин вызваны возникновением реактивных сил упругости R_1 и R_2, определяемых удлинениями Δl_1 и Δl_2 (рис. 3.4.1b):

$$R_1 = k_{11}x_1; \qquad R_2 = k_{12}\left(x_2 - x_1\right). \tag{3.4.1}$$

Дифференциальные уравнения движения грузов в соответствии со вторым законом Ньютона имеют вид

$$\left.\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1 &= -R_1 + R_2 \\ m_2\ddot{x}_2 \frac{d^2x_2}{dt^2} &= -R_2 \end{aligned}\right\}. \tag{3.4.2}$$

Здесь, как обычно, точкой обозначается производная по времени, т. е. $\dot{x} = \frac{dx}{dt}; \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$ и т. д. Подставляя в (3.4.2) выражение для реакций со стороны упругих элементов (3.4.1), получаем

$$\left.\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1 &= -k_{11}x_1 + k_{12}\left(x_2 - x_1\right) \\ m_2\ddot{x}_2 &= -k_{12}\left(x_2 - x_1\right) \end{aligned}\right\}. \tag{3.4.3}$$

Как видно из формулы (3.4.3), на осадку пружины влияет перемещение соседнего участка. Если перейти к локальной системе координат, то в общем виде деформационное состояние системы с s степенями свободы можно характеризовать обобщенной координатой q_j, $j = 1,2,...,s$ — номер координаты. В качестве обобщенных координат могут выступать, например, линейные перемещения при поступательном движении или угловые перемещения при вращательном. Для статической упругой линейной системы общего вида справедливо следующее фун-

даментальное соотношение, связывающее обобщенные координаты q_j (статические перемещения) с обобщенными силами F_k:

$$q_j = \sum_{k=1}^{s} \delta_{jk} F_k , \quad j = 1,2,...,s , \tag{3.4.4}$$

где δ_{jk} — статический коэффициент влияния для перемещений, равный значению j-ой обобщенной координаты, соответствующему действию статически приложенной k-ой обобщенной единичной силы. Коэффициент δ_{jk} определяет перемещение или конфигурацию равновесного положения системы, когда к ней приложена только одна единичная сила $F_k = 1$. Можно сказать и так: j — это номер текущей массы колебательной системы, а k — номер соседней массы, влияющей на деформационное состояние текущей. Коэффициенты влияния удовлетворяют условию симметрии,

$$\delta_{jk} = \delta_{jk} ,$$

выражающему *принцип взаимности перемещений*.

Введя в рассмотрение матрицу-столбец (вектор) обобщенных координат $\vec{q}$, матрицу-столбец обобщенных сил $\vec{F}$ и симметричную матрицу коэффициентов влияния для перемещений $[\delta]$,

$$\vec{q} = \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \cdots \\ q_s \end{Bmatrix}; \quad \vec{F} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \cdots \\ F_s \end{Bmatrix}; \quad [\delta] = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \cdots & \delta_{1s} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \cdots & \delta_{2s} \\ & \cdots & & \\ \delta_{s1} & \delta_{s2} & \cdots & \delta_{ss} \end{bmatrix}, \tag{3.4.5}$$

перепишем (3.4.4) в матричной форме, а именно

$$\vec{q} = [\delta]\vec{F} . \tag{3.4.6}$$

Разрешим уравнение (3.4.6) относительно вектора $\vec{F}$. Для этого умножим обе его части слева на симметричную матрицу $[c] = [\delta]^{-1}$, обратную к $[\delta]$,

$$[c] = [\delta]^{-1} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1s} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2s} \\ & \cdots & & \\ c_{s1} & c_{s2} & \cdots & c_{ss} \end{bmatrix}.$$

Получим

$$\vec{F} = [c]\vec{q} . \tag{3.4.7}$$

Матрица $[c]$ называется матрицей единичных реакций или матрицей жесткости. Физический смысл ее элементов c_{jk}, называемых статическими коэффициентами жесткости, следующий. Предположим, что на все точки рассматриваемой системы наложены некоторые дополнительные связи, обращающие в нуль все обобщенные перемещения, кроме k-го, причем равного единице, $q_k = 1$. Тогда $c_{jk} = F_j$, т. е. элемент c_{jk} представляет собой реакцию j-ой дополнительной силы, соответствующую k-му единичному перемещению. Коэффициенты жесткости, так же как и коэффициенты влияния, симметричны, $c_{jk} = c_{kj}$, что является следствием *принципа взаимности сил*.

Матрица — столбец обобщенных сил $\vec{F}$, в свою очередь, в соответствии со вторым законом Ньютона имеет вид

$$\vec{F} = [a]\ddot{\vec{q}}, \tag{3.4.8}$$

где $[a]$ — симметричная матрица инерционных коэффициентов,

$$[a] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2s} \\ & \cdots & & \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{ss} \end{bmatrix}. \tag{3.4.9}$$

Важно отметить, что при составлении системы уравнений по прямому способу $a_{ij} = 0$ при $i \neq j$, т. е. матрица инерционных коэффициентов становится диагональной.

Соотношения (3.4.7) и (3.4.8) позволяют записать дифференциальное уравнение движения статической упругой линейной системы общего вида в форме

$$[a]\ddot{\vec{q}} + [c]\vec{q} = 0, \tag{3.4.10}$$

или

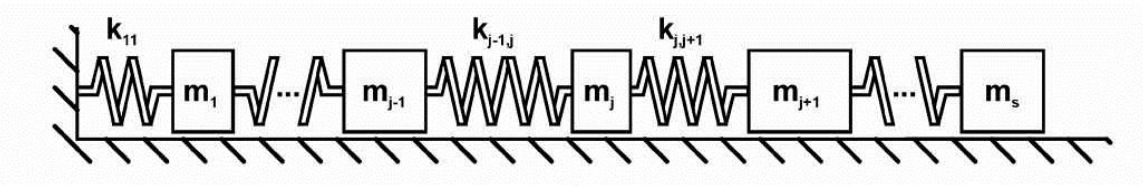
$$\sum_{k=1}^{s} \left(a_{jk}\ddot{q}_k + c_{jk}q_k \right) = 0, \quad j = 1,2,\ldots,s. \tag{3.4.11}$$

Для прямого способа вместо (3.4.11) вследствие диагональности матрицы $[a]$ имеем

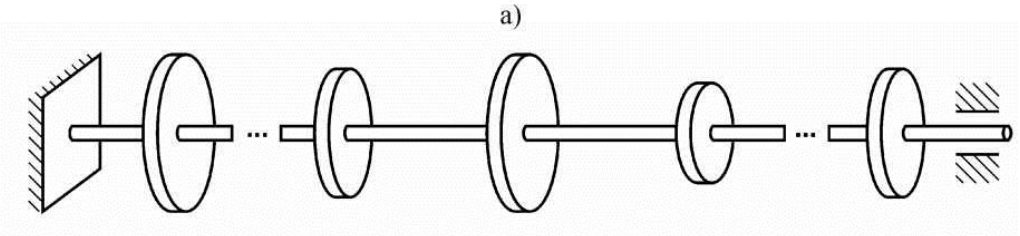
$$a_j\ddot{q}_j + \sum_{k=1}^{s} c_{jk}q_k = 0, \quad j = 1,2,\ldots,s. \tag{3.4.12}$$

Уравнения (3.4.10) представляют собой систему дифференциальных уравнений движения, которая в развернутом виде записывается как

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}\ddot{q}_1 + c_{11}q_1 + a_{12}\ddot{q}_2 + c_{12}q_2 + \cdots + a_{1s}\ddot{q}_s + c_{1s}q_s = 0 \\ a_{21}\ddot{q}_1 + c_{21}q_1 + a_{22}\ddot{q}_2 + c_{22}q_2 + \cdots + a_{2s}\ddot{q}_s + c_{2s}q_s = 0 \\ \cdots \\ a_{s1}\ddot{q}_1 + c_{s1}q_1 + a_{s2}\ddot{q}_2 + c_{s2}q_2 + \cdots + a_{ss}\ddot{q}_s + c_{ss}q_s = 0 \end{array}\right\}.$$



a)



b)

Рис. 3.4.2

По физической природе выражение $[a]\ddot{\vec{q}}$ представляет собой динамическую часть общего усилия, действующего на элемент динамической системы, а $[c]\vec{q}$ характеризует упругие свойства этой системы. Вид коэффициентов a_{ij} и c_{ij} зависит от конкретной задачи и способа записи дифференциального уравнения. Например, упомянутый выше прямой способ особенно удобен при изучении колебаний систем цепной структуры, если упругие силы легко выражаются через перемещения двух соседних тел.

Простейший пример колебательной механической системы с линейными перемещениями масс m_i приведен на рис. 3.4.2a. Механическая система, для которой характерно наличие угловых перемещений, изображена на рис. 3.4.2b. Перемещения, аналогичные схеме “b”, вызываются закручиванием валов — такие колебания называются *крутильными*. Если в качестве обобщенной координаты q_j рассматривать горизонтальное перемещение j-го груза в схеме на рис. 3.4.2a или угловое перемещение j-го диска в схеме на рис. 3.4.2b, то сумма упругих сил, действующих на груз (или упругих моментов, действующих на диск), равна

$$F_j = -k_{j-1,j}\left(q_j - q_{j-1}\right) + k_{j,j+1}\left(q_{j+1} - q_j\right),$$

где $k_{j-1,j}$ — жесткость упругой связи, расположенной между $j-1$-м и j-м грузами (дисками); $k_{j,j+1}$ — жесткость упругой связи, расположенной между j-м и $j+1$-м грузами (дисками). Матрица инерционных коэффициентов $[a]$ видоизменяется для схемы “a” в диагональную матрицу масс $[m]$:

$$[m] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & m_2 & \cdots & 0 \\ & \cdot\ \cdot\ \cdot & & \\ 0 & 0 & \cdots & m_s \end{bmatrix},$$

а для схемы "b" — в диагональную матрицу моментов инерции диска $[I]$:

$$[I]=\begin{bmatrix} I_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & I_2 & \cdots & 0 \\ & \cdot\ \cdot\ \cdot & & \\ 0 & 0 & \cdots & I_s \end{bmatrix}. \qquad (3.4.13)$$

Дифференциальное уравнение движения (3.4.12) приобретает форму:

схема "a" $\quad m_j\ddot{q}_j = -k_{j-1,j}\left(q_j - q_{j-1}\right)+k_{j,j+1}\left(q_{j-1} - q_j\right)$;

схема "b" $\quad I_j\ddot{q}_j = -k_{j-1,j}\left(q_j - q_{j-1}\right)+k_{j,j+1}\left(q_{j+1} - q_j\right)$. $\qquad (3.4.14)$

Решение системы дифференциальных уравнений движения; главные колебания и собственные частоты. Предположим, что обобщенные координаты выбраны таким образом, что они вместе с определяемыми ими перемещениями системы изменяются по одному и тому же гармоническому закону, с одной и той же частотой ω. Система в этом случае совершает гармонические колебания, причем все ее точки одновременно достигают положений наибольшего отклонения и одновременно проходят через положения равновесия. Такие колебания называются ***главными***. Предположение о том, что все материальные точки системы совершают колебания одной и той же частоты при различных амплитудах, основано на следующем очевидном обстоятельстве: только частота является неотъемлемым свойством системы, тогда как амплитуда зависит от того, как именно эта система приведена в движение внешней причиной.

Система с s степенями свободы в общем случае может совершать s независимых гармонических колебаний, каждому из которых соответствует определенное значение частоты ω_i. Следовательно, колебательный процесс (при условии малости колебаний около положения устойчивого равновесия) в соответствии с принципом суперпозиции представляет собой *линейное наложение s главных гармонических колебаний.*

Итак, частное решение системы дифференциальных уравнений (3.4.11) будем искать в виде

$$q_j = A_j \sin\left(\omega\ t+\varphi\right),\quad j=1,2,\ldots,s, \qquad (3.4.15)$$

где A_j — амплитуда j-го колебания; ω — частота, общая для всех координат q_j.

Подставляя (3.4.15) в (3.4.11), получаем систему s алгебраических уравнений с неизвестными A_j и ω:

$$\left.\begin{aligned} \left(c_{11}-\omega^2 a_{11}\right)A_1+\left(c_{12}-\omega^2 a_{12}\right)A_2+\ldots+\left(c_{1s}-\omega^2 a_{1s}\right)A_s=0 \\ \left(c_{21}-\omega^2 a_{21}\right)A_1+\left(c_{22}-\omega^2 a_{22}\right)A_2+\ldots+\left(c_{2s}-\omega^2 a_{2s}\right)A_s=0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \left(c_{s1}-\omega^2 a_{s1}\right)A_1+\left(c_{s2}-\omega^2 a_{s2}\right)A_2+\ldots+\left(c_{ss}-\omega^2 a_{ss}\right)A_s=0 \end{aligned}\right\}. \qquad (3.4.16)$$

Система (3.4.16) однородна относительно неизвестных амплитуд $A_1, A_2, \ldots, A_s$, следовательно, для того чтобы она имела нетривиальное (отличное от нуля) решение, ее определитель должен равняться нулю:

$$\begin{vmatrix} c_{11}-\omega^2 a_{11} & c_{12}-\omega^2 a_{12} & \cdots & c_{1s}-\omega^2 a_{1s} \\ c_{21}-\omega^2 a_{21} & c_{22}-\omega^2 a_{22} & \cdots & c_{2s}-\omega^2 a_{2s} \\ & \cdots & & \\ c_{s1}-\omega^2 a_{s1} & c_{s2}-\omega^2 a_{s2} & \cdots & c_{ss}-\omega^2 a_{ss} \end{vmatrix} = 0 . \qquad (3.4.17)$$

Раскрыв определитель (3.4.17), получаем алгебраическое уравнение s-ой степени относительно ω^2, которое носит название *частотного* или *характеристического* (иногда в литературе можно встретить и термин *вековое уравнение*). Его корни, называемые ***собственными частотами***, определяются только свойствами системы и не зависят от способа приведения этой системы в колебательное движение. Если система совершает малые колебания около состояния устойчивого равновесия (т. е. потенциальная энергия системы положительна), то, как следует из теорем алгебры [14], характеристическое уравнение имеет ровно s корней, причем все они вещественны, положительны и в общем случае различны.

Для уравнений в прямой форме (т. е. типа (3.4.12)) характеристическое уравнение (3.4.17) упрощается: оно приобретает диагональный вид, причем по главной диагонали располагаются члены с квадратами собственных частот,

$$\begin{vmatrix} c_{11}-\omega^2 a_1 & c_{12} & \cdots & c_{1s} \\ c_{21} & c_{22}-\omega^2 a_2 & \cdots & c_{2s} \\ & \cdots & & \\ c_{s1} & c_{s2} & \cdots & c_{ss}-\omega^2 a_s \end{vmatrix} = 0 . \qquad (3.4.18)$$

Запишем, например, характеристическое уравнение для системы, изображенной на рис. 3.4.1, положив $q_1 = x_1$, $q_2 = x_2$. Подставив в (3.4.3) решение (3.4.15), получим

$$\left.\begin{array}{rcl} \left(k_{11}+k_{12}-m_1\omega^2\right)A_1 & - & k_{12}A_2 = 0 \\ -k_{12}A_1 & + & \left(k_{12}-m_2\omega^2\right)A_2 = 0 \end{array}\right\}. \qquad (3.4.19)$$

Тогда характеристическое уравнение записывается как

$$\begin{vmatrix} (k_{11}+k_{12})-m_1\omega^2 & -k_{12} \\ -k_{12} & k_{12}-m_2\omega^2 \end{vmatrix} = 0 ,$$

или

$$m_1 m_2 \omega^4 - \left\{m_1 k_{12} + m_2\left(k_{11}+k_{12}\right)\right\}\omega^2 + \left(k_{11}+k_{12}\right)k_{12} - k_{12}^2 , \qquad (3.4.20)$$

и имеет два положительных корня ω_1^2 и ω_2^2. Для того чтобы (3.4.20) согласовывалось с (3.4.18), нужно положить $a_1 = m_1$; $a_2 = m_2$; $c_{11} = k_{11} + k_{12}$; $c_{22} = k_{12}$; $c_{12} = -k_{12}$.

Таким образом, матрица жесткости $[c]$ и матрица инерционных коэффициентов $[a]$ для рассматриваемого примера имеют вид

$$[c]=\begin{bmatrix} k_{11}+k_{12} & -k_{12} \\ -k_{12} & k_{12} \end{bmatrix};\ [a]=\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}.$$

Собственные формы. Как было показано выше, в результате решения характеристического уравнения (3.4.1) определяется *спектр собственных частот* рассматриваемой системы, $\omega_1 < \omega_2 < \ldots < \omega_s$ (корни принято располагать в порядке возрастания). Зная собственные частоты, можно перейти к решению уравнений (3.4.16). Подставив в (3.4.16) одно из найденных значений квадрата частоты, например ω_i^2, получим систему s линейных однородных уравнений относительно амплитуд $A_{1i}, A_{2i}, \ldots, A_{si}$ (здесь первый индекс обозначает номер координаты, а второй — номер собственной частоты). Из общих свойств однородных систем линейных алгебраических уравнений [6, 14] следует, что ранг матрицы полученной системы равен $s-1$ (так как равные корни по предположению отсутствуют). Это означает, что из s уравнений системы независимыми являются только $s-1$. Поскольку $s-1$ уравнений связывают между собой s амплитуд, все амплитуды можно выразить через какую-либо одну, например, через первую, значение которой произвольно:

$$\lambda_{1i}=const;\quad \lambda_{2i}=\frac{A_{2i}}{A_{1i}};\quad \lambda_{3i}=\frac{A_{3i}}{A_{1i}};\ \ldots,\ \lambda_{si}=\frac{A_{si}}{A_{1i}}. \qquad (3.4.21)$$

Совокупность соотношений (3.4.21) позволяет находить, таким образом, не сами амплитуды A_{ji} рассматриваемой i-ой гармоники, а их относительные значения λ_{ji}, определенные с точностью до произвольного множителя, т. е. описывает конфигурацию системы в процессе свободных колебаний с i-ой собственной частотой. Такие конфигурации, число которых равно числу степеней свободы системы, характеризующие свойства самой системы и не зависящие от начальных условий, называются ***собственными формами***. Каждому корню характеристического уравнения (3.4.17) соответствует своя собственная форма (3.4.21). Поскольку коэффициенты собственных форм λ_{ji} вычисляются с точностью до произвольного множителя, можно один из коэффициентов положить равным какому-либо числу, например единице, а можно выбрать его таким образом, чтобы сумма квадратов амплитуд рассматриваемой формы равнялась единице (в этом случае форма называется *нормированной*). Если принять $\lambda_{1i}=1$, то *общее решение* уравнения (3.4.11), представляющее собой сумму частных, имеет вид

$$q_j=\sum_{i=1}^{s}\lambda_{ji}A_{1i}\sin(\omega_i t+\varphi_i),\ i,j=1,2,\ldots,s,\ \lambda_{1i}=1. \qquad (3.4.22)$$

Решение (3.4.22) содержит $2s$ произвольных постоянных (s амплитуд A_{1i} и s начальных фаз φ_i), которые находятся из начальных условий. В качестве началь-

ных условий, как правило, используются значения обобщенных координат q_i и обобщенных скоростей $\dot{q}_i$ в момент времени $t = 0$:

$$\left.\begin{aligned} q_j(0) &= \sum_{i\ 1}^{s} \lambda_{ji} A_{1i} \sin\varphi_i \\ \dot{q}_j(0) &= \sum_{i\ 1}^{s} \lambda_{ji} A_{1i} \omega_i \cos\varphi_i \end{aligned}\right\}, \quad j = 1,2,\ldots,s\,. \tag{3.4.23}$$

Собственные формы обладают важным свойством *ортогональности*: если A_{rn} и A_{rm} — системы амплитуд, соответствующие n-ой и m-ой произвольным собственным формам, то они связаны соотношением

$$\sum_{r\ 1}^{s} A_{rn} \sum_{j\ 1}^{s} a_{jr} A_{jm} = 0\,. \tag{3.4.24}$$

В том случае, когда $a_{jr} = 0, \quad j \neq r$, т. е. для прямых уравнений, (3.4.24) приобретает более простой вид,

$$\sum_{r\ 1}^{s} a_r A_{rm} A_{rn} = 0\,. \tag{3.4.25}$$

Доказательство свойства ортогональности выходит за рамки настоящей книги.

Введенное выше понятие собственных форм позволяет сформулировать важное утверждение: *любую форму колебаний можно разложить по собственным формам некоторой системы с s степенями свободы.* Это означает, что любую заданную мгновенную совокупность s обобщенных координат $B_1, B_2, \ldots, B_s$ можно представить линейными комбинациями вида

$$B_j = \sum_{i\ 1}^{s} \mu_i A_{ji}\,, \qquad j = 1,2,\ldots,s\,. \tag{3.4.26}$$

Справедливость этого утверждения следует непосредственно из первых s уравнений (3.4.23), которые только обозначениями отличаются от (3.4.26), и теоремы существования общего интеграла системы дифференциальных уравнений [34]. Коэффициенты μ_i вычисляются с помощью свойства ортогональности (3.4.24) или (3.4.25).

В качестве примера найдем собственные частоты и собственные формы для системы, изображенной на рис. 3.4.1, приняв для простоты $k_{11} = k_{12} = k$; $m_1 = m_2 = m$. Тогда дифференциальные уравнения (3.4.19) преобразуются как

$$\left.\begin{aligned} \left(2k - m\omega^2\right)A_1 \quad &- \quad kA_2 = 0 \\ -kA_1 \quad &+ \quad \left(k - m\omega^2\right)A_2 = 0 \end{aligned}\right\}, \tag{3.4.27}$$

а характеристическое уравнение (3.4.20) —

$$\begin{vmatrix} 2k - m\omega^2 & -k \\ -k & k - m\omega^2 \end{vmatrix} = 0,$$

откуда

$$k^4 - 3\frac{k}{m}\omega^2 + \frac{k^2}{m^2} = 0. \qquad (3.4.28)$$

Решением биквадратного уравнения (3.4.28) являются числа $\omega_{1,2}^2 = \frac{k}{2m}\left(3 \pm \sqrt{5}\right)$, или приближенно

$$\omega_1^2 = 0{,}38\frac{k}{m}; \quad \omega_2^2 = 2{,}62\frac{k}{m}. \qquad (3.4.29)$$

Приняв $\lambda_{11} = \lambda_{12} = 1$, остальные коэффициенты собственных форм определим с помощью любого из уравнений (3.4.27):

$$\lambda_{21} = \frac{2k - m\omega_1^2}{k} = 1{,}62; \ \lambda_{22} = \frac{2k - m\omega_2^2}{k} = -0{,}62. \qquad (3.2.30)$$

Собственные формы приведены на рис. 3.4.3.

В заключение запишем полученные выше соотношения в матричной форме. Решение уравнения (3.4.10) будем искать в виде

$$\vec{q} = \vec{A}\sin\left(\omega t + \varphi\right), \qquad (3.4.31)$$

где $\vec{A}$ — матрица-столбец амплитуд, так что $\vec{A}^T = \left[A_1 \ A_2 \ \ldots \ A_s\right]$ — матрица, транспонированная по отношению к $\vec{A}$. Подставляя (3.4.31) в (3.4.10), получаем матричное уравнение

$$-[a]\vec{A}\omega^2 + [c]\vec{A} = 0,$$

или

$$\left([c] - [a]\omega^2\right)\vec{A} = 0. \qquad (3.4.32)$$

Матрица-столбец $\vec{A}$ отлична от нуля, если выполняется условие

$$\det\left([c] - [a]\omega^2\right) = 0, \qquad (3.4.33)$$

которое полностью совпадает с характеристическим уравнением (3.4.17). Умножим (3.4.32) слева на $[a]^{-1}$ и перенесем один из членов через знак равенства. Получим

$$[a]^{-1}[c]\vec{A} = \omega^2\vec{A}. \qquad (3.4.34)$$

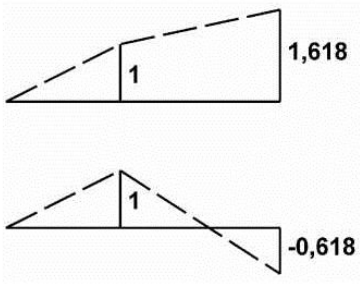


Рис. 3.4.3

Из теории матриц известно, что ω^2 является собственным числом матрицы $-[a]^{-1}[c]$, а вектор $\vec{A}$ — ее собственным вектором.

Свободные колебания с сопротивлением. Остановимся кратко на рассмотрении колебаний при условии действия сил сопротивления. Предположим, что действующие на механическую систему силы сопротивления являются линейными функциями обобщенных скоростей — во многих задачах механики это допущение оправдано. Тогда дифференциальные уравнения движения (3.4.10) принимают вид

$$[a]\ddot{\vec{q}} + [b]\dot{\vec{q}} + [c]\vec{q} = 0, \tag{3.4.35}$$

или

$$\sum_{k=1}^{s}\left(a_{jk}\ddot{q}_k + b_{jk}\dot{q}_k + c_{jk}q_k\right) = 0, \quad j = 1,2,\ldots,s, \tag{3.4.36}$$

где $[b]$ — *матрица демпфирования*, равная

$$[b] = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2s} \\ & \cdots & & \\ b_{s1} & b_{s2} & \cdots & b_{ss} \end{bmatrix}. \tag{3.4.37}$$

Решение системы (3.4.36) ищем в виде

$$q_j = A_j \exp(pt), \tag{3.4.38}$$

причем в общем случае p принадлежит ко множеству комплексных чисел, т. е. $p = \alpha + i\beta$. Подстановка (3.4.38) в (3.4.36) приводит к однородной системе алгебраических уравнений относительно амплитуд A_j:

$$\left([a]p^2 + [b]p + [c]\right)\vec{A} = 0. \tag{3.4.39}$$

Далее, как обычно, для обеспечения существования нетривиального решения приравниваем нулю определитель системы (3.4.39), что дает характеристическое уравнение

$$\det\left([a]p^2 + [b]p + [c]\right) = 0. \tag{3.4.40}$$

Можно доказать, что если все элементы матрицы демпфирования (3.4.37) положительны, то вещественные части всех корней характеристического уравнения (3.4.40) отрицательны. Каждому вещественному отрицательному корню $p = -\omega^2$ (в том числе и вещественной части комплексного корня) соответствует частное решение вида

$$q_j = A_j \exp\left(-\omega^2 t\right) \tag{3.4.41}$$

с вещественным значением A_j. Такие координаты со временем убывают, асимптотически приближаясь к нулевым значениям. Если все корни (3.4.40) вещественны и отрицательны, то система будет асимптотически приближаться к положению равновесия, совершая монотонное затухающее движение неколебательного характера — *апериодическое движение*. Такое движение характерно для систем с сильным трением. Если среди корней уравнения (3.4.40) находятся комплексно сопряженные вида $p = \alpha + i\beta$, $p' = \alpha - i\beta$, $\alpha > 0$, то им отвечает затухающее колебательное движение

$$q_j = \left(B_j \cos \beta t + C_j \sin \beta t\right) \cdot \exp\left(-\alpha t\right). \qquad (3.4.42)$$

Общее решение системы (3.4.36) является результатом линейного наложения частных решений (3.4.41) и (3.4.42).

3.4.2. Вынужденные колебания.

Как указывалось выше, *вынужденные колебания* обуславливаются действием *внешних возмущений*. Если система воспринимает действие внешнего возмущения, то дифференциальные уравнения движения перестают быть однородными. В качестве внешнего возмущения могут выступать силы, приложенные к сосредоточенным массам системы, или кинематические параметры, приложенные к некоторой части системы. В любом случае, независимо от конкретной физической природы, возмущение является явной функцией времени.

Рассмотрим движение линейной колебательной системы без затухания с s степенями свободы под действием внешних сил. Обозначим через $Q_1, Q_2, \ldots, Q_s$ обобщенные вынуждающие силы, соответствующие обобщенным координатам $q_1, q_2, \ldots, q_s$, причем $Q_j = Q_j(t)$, $j = 1,2,\ldots,s$. Тогда в общем случае уравнения движения с учетом (3.4.11) будут выглядеть как

$$\sum_{k\ 1}^{s} \left(a_{jk}\ddot{q}_k + c_{jk}q_k\right) = Q_j,\ j = 1,2,\ldots,s, \qquad (3.4.43)$$

а в прямой форме —

$$a_j\ddot{q}_j + \sum_{k=1}^{s} c_{jk}q_k = Q_j,\ j = 1,2,\ldots,s. \qquad (3.4.44)$$

Решение систем (3.4.43) и (3.4.44) целиком определяется видом вынуждающей силы. Общим для любого решения является то обстоятельство, что вследствие неучтенного, но неизбежного сопротивления те колебания, которые происходят с собственной частотой, постепенно затухают. По прошествии некоторого времени в системе будут присутствовать только движения, совершаемые с частотой вынуждающей силы — так называемые *установившиеся вынужденные колебания*.

Гармонические вынуждающие силы. Предположим, что обобщенные вынуждающие силы изменяются по гармоническому закону

$$Q_j = F_j \sin\left(\Omega t + \psi\right),\ j = 1,2,\ldots,s, \qquad (3.4.45)$$

т. е. имеют одинаковые частоты и начальные фазы, но различные амплитуды. Будем рассматривать *установившееся* движение. Тогда частное решение (3.4.43) с правой частью вида (3.4.45) имеет вид

$$q_j = A_j \sin(\Omega t + \psi), \ j = 1,2,\ldots,s. \qquad (3.4.46)$$

Подставляя (3.4.46) в дифференциальные уравнения (3.4.43), получим систему s алгебраических уравнений для определения амплитуд A_j:

$$\sum_{k=1}^{s}\left(-\Omega^2 a_{jk} + c_{jk}\right)A_k = F_j, \ j = 1,2,\ldots,s, \qquad (3.4.47)$$

а подстановка в (3.4.44) даст

$$-\Omega^2 a_j A_j + \sum_{k\ 1}^{s} c_{jk} A_k = F_j, \ j = 1,2,\ldots,s. \qquad (3.4.48)$$

Заметим, что точно такие же результаты получаются, если гармонический закон изменения обобщенных сил и частных решений представлять в виде $\exp(i\Omega t)$, а не $\sin(\Omega t + \psi)$.

Наиболее просто системы (3.4.47) — (3.4.48) решаются непосредственно алгебраическими методами, а именно: с помощью формул Крамера (если их определители отличны от нуля), методом Гаусса или любым другим известным в теории линейных алгебраических систем методом. Однако физически более наглядным является другой способ, заключающийся в разложении искомых амплитуд по собственным формам соответствующей однородной задачи. Приведем здесь без вывода частное решение системы (3.4.48), записанное в виде разложения по *нормированным* собственным формам:

$$q_j = \sum_{i\ 1}^{s} \frac{B_i u_{ji}}{\omega_i^2 - \Omega^2} \sin(\Omega t + \psi), \ j = 1,2,\ldots,s, \qquad (3.4.49)$$

где $B_i = \sum_{k\ 1}^{s} F_k u_{ki}$, $i = 1,2,\ldots,s$; u_{ji} — нормированные амплитуды i-ой собственной формы, $j = 1,2,\ldots,s$.

Выражение (3.4.49) позволяет сделать несколько выводов относительно характера колебаний в зависимости от соотношения между собственными частотами системы и частотой вынуждающей силы. Так, если частота Ω вынуждающей силы совпадает с одной из собственных частот системы, например ω_i, соответствующий член разложения (3.4.49) с течением времени неограниченно возрастает — наблюдается явление *резонанса*. Частота возмущающей силы называется в этом случае *критической*. Возможен и противоположный случай, когда при определенных значениях Ω достигается отсутствие колебаний, соответствующих выбранной координате, т. к. их амплитуды обращаются в нуль. Такое явление называется *антирезонансом*. Если частота возмущающей силы близка к одной из собственных частот системы, то отвечающий ей член в разложении (3.4.49) значительно превышает

все остальные. Конфигурация системы при этом почти совпадает с соответствующей собственной формой, а сами колебания почти точно воспроизводят форму одного из собственных главных колебаний.

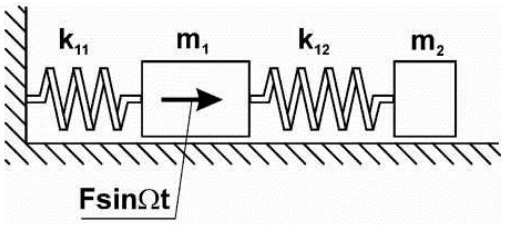


Рис. 3.4.4

В качестве примера рассмотрим колебательную систему с двумя степенями свободы, на одну из масс которой действует гармоническая вынуждающая сила $F\sin\Omega t$ (рис. 3.4.4). Как и ранее, за обобщенные координаты примем отклонения грузов от положения равновесия, $q_1 = x_1$, $q_2 = x_2$. Дифференциальные уравнения движения рассматриваемой системы имеют вид

$$\left.\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1 + (k_{11} + k_{12})x_1 - k_{12}x_2 &= F\sin\Omega t \\ m_2\ddot{x}_2 - k_{12}x_1 + k_{12}x_2 &= 0 \end{aligned}\right\}. \qquad (3.4.50)$$

Подставляя в (3.4.50) частное решение (3.4.46), получаем следующую систему алгебраических уравнений для определения амплитуд A_1 и A_2:

$$\left.\begin{aligned} \left(k_{11} + k_{12} - m_1\Omega^2\right)A_1 \quad - \quad & k_{12}A_2 = F \\ -k_{12}A_1 \quad + \quad & \left(k_{12} - m_2\Omega^2\right)A_2 = 0 \end{aligned}\right\}. \qquad (3.4.51)$$

Определитель D системы (3.4.51) равен

$$D = \begin{vmatrix} (k_{11} + k_{12}) - m_1\Omega^2 & -k_{12} \\ -k_{12} & k_{12} - m_2\Omega^2 \end{vmatrix}. \qquad (3.4.52)$$

Если определитель D из (3.4.52) отличен от нуля, решение (3.4.51) можно найти по формулам Крамера:

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= \frac{F(k_{12} - m_2\Omega^2)}{\left(k_{11} + k_{12} - m_1\Omega^2\right)\left(k_{12} - m_2\Omega^2\right) - k_{12}^2} \\ A_2 &= -\frac{Fk_{12}}{\left(k_{11} + k_{12} - m_1\Omega^2\right)\left(k_{12} - m_2\Omega^2\right) - k_{12}^2} \end{aligned}\right\}. \qquad (3.4.53)$$

Из (3.4.53) следует, что резонанс в рассматриваемой системе наступает при условии

$$\left(k_{11} + k_{12} - m_1\Omega^2\right)\left(k_{12} - m_2\Omega^2\right) - k_{12}^2 = 0, \qquad (3.4.54)$$

которое определяет два резонансных значения частоты возмущающей силы, равных собственным частотам ω_1 и ω_2 системы. Антирезонанс наступает при условии

$$k_{12} - m_2\Omega^2 = 0, \qquad (3.4.55)$$

откуда частота антирезонанса $\Omega^{*2} = \dfrac{k_{12}}{m_2}$. При этой частоте колебания, соответствующие первой координате, полностью отсутствуют, а максимальное значение второй координаты согласно (3.4.53) равно $A_2 = \dfrac{F}{k_{12}}$. Полученный результат иллюстрирует принципиальную возможность подавления нежелательных колебаний. Рассмотренный пример можно трактовать следующим образом: введением в систему специально подобранной дополнительной массы m_2, такой что $m_2 = \dfrac{k_{12}}{\Omega}$, удалось устранить колебания основной части системы — массы m_1.

Произвольные вынуждающие силы.

а) действие произвольной вынуждающей силы на линейную систему с одной степенью свободы. Дифференциальное уравнение задачи о вынужденных колебаниях линейной системы с одной степенью свободы согласно (3.4.43) имеет вид

$$a\ddot{q} + cq = Q(t),$$

или

$$\ddot{q} + \omega^2 q = \frac{Q(t)}{a}, \qquad (3.4.56)$$

где $\omega^2 = \dfrac{c}{a}$ — квадрат собственной частоты системы.

Как известно из теории линейных дифференциальных уравнений, общее решение уравнения (3.4.56) есть *сумма общего решения соответствующего однородного уравнения* (т. е. уравнения с нулевой правой частью) *и некоторого частного решения уравнения* (3.4.56). Общее решение однородного уравнения

$$\ddot{q} + \omega^2 q = 0$$

имеет вид

$$q = A\sin(\omega t + \varphi), \qquad (3.4.57)$$

где постоянные амплитуда A и начальная фаза φ определяются из начальных условий. Если начальные условия таковы, что $q(0) = q_0$ и $\dot{q}(0) = \dot{q}_0$, то

$$A = \sqrt{\left(\frac{\dot{q}_0}{\omega}\right)^2 + q_0^2}\ ;\ \varphi = arctg\frac{\omega\ q_0}{\dot{q}_0}. \qquad (3.4.58)$$

Частное решение (3.4.56) может быть получено классическим способом, а именно известным *методом вариации произвольных постоянных*. Но на практике этот метод не нашел большого применения. Дело в том, что аналитически задачу вынужденных колебаний системы удается решить только для чрезвычайно узкого круга систем с несколькими степенями свободы, а для численного реше-

ния гораздо удобнее другие методы, например, *операционный* [2, с. 272]. Суть этого метода заключается в следующем: зная решение уравнения (3.4.56) при какой-то одной *известной* правой части, можно отыскать его решение при *любой* другой правой части с помощью интегрирования. Применим этот метод к рассматриваемой задаче.

Пусть в некоторый момент времени $t = \tau$ к системе приложен мгновенный обобщенный импульс A_0, так что $q(\tau) = 0; \quad \dot{q}(\tau) = \frac{A_0}{a}$. Тогда решение уравнения (3.4.56) при $t > \tau$ согласно (3.4.56) и (3.4.57) имеет вид

$$q = A_0 R(t, \tau); \quad R(t, \tau) = \frac{\sin \omega(t - \tau)}{a\omega}. \tag{3.4.59}$$

Функция $R(t, \tau)$, описывающая движение, вызванное действием единичного импульса, называется импульсной реакцией системы или функцией отклика.

Если теперь перейти к произвольной вынуждающей силе, рассматривая ее как бесконечную последовательность элементарных импульсов, т. е. положив $A_0 = Q(\tau)d\tau$, и просуммировать влияние всех этих импульсов, при *нулевых начальных условиях* получим

$$q = \frac{1}{a\omega}\int_0^t q(\tau)\sin\omega(t - \tau)d\tau. \tag{3.4.60}$$

Интеграл типа (3.4.60) называется *интегралом Дюамеля*.

b) действие произвольной вынуждающей силы на линейную систему с s степенями свободы. Если действующие на многомассовую колебательную систему вынуждающие силы изменяются не по гармоническому закону, то в общем случае решение задачи о движении такой системы удобнее всего проводить *методом разложения по собственным формам колебаний*.

Считаем, что предварительно найдены собственные частоты ω_i и коэффициенты собственных форм λ_{ri}. Разложим вектор перемещений q_r по собственным формам колебаний λ_{ri}, представляя его в виде суммы

$$q_r = \sum_{i=1}^{s} \lambda_{ri}\eta_i, \tag{3.4.61}$$

где η_i — нормальные координаты. Тогда система (3.4.44) после некоторых преобразований (подробнее с ними можно ознакомиться, например, в [29]; здесь приводится только окончательный результат) записывается в виде

$$\ddot{\eta}_j + \omega_j^2\eta_j = Q_j^*, \quad j = 1,2,\ldots,s, \tag{3.4.62}$$

где Q_j^* — приведенные вынуждающие силы, вычисляемые по формулам

$$Q_j^* = \frac{\sum_{i=1}^{s} Q_i \lambda_{ij}}{\sum_{i=1}^{s} a_i \lambda_{ij}^2}, \qquad j = 1,2,\ldots,s. \tag{3.4.63}$$

Поскольку каждое из независимых уравнений (3.4.62) описывает колебание некоторой системы с *одной* степенью свободы, то дальнейшее решение сводится к интегралу Дюамеля (3.4.60).

Рассмотрим в качестве примера хорошо знакомую систему на рис. 3.4.1а, положив, как раньше, $q_1 = x_1$, $q_2 = x_2$; $k_{11} = k_{12} = k$; $m_1 = m_2 = m$. Собственные частоты и собственные формы этой системы, как уже было найдено, определяются формулами (3.4.29) — (3.4.30). Пусть теперь на левый груз этой системы действует вынуждающая сила вида

$$Q = F(1 - e^{-\gamma t}),$$

где F и γ — известные константы. Приведенные вынуждающие силы согласно (3.4.63) равны

$$\left.\begin{aligned} Q_1^* &= \frac{Q}{m + m \cdot 1{,}62^2} = \frac{0{,}28F}{m}(1 - e^{-\gamma t}) \\ Q_2^* &= \frac{Q}{m + m \cdot 0{,}62^2} = \frac{0{,}73F}{m}(1 - e^{-\gamma t}) \end{aligned}\right\}.$$

Уравнения движения (3.4.62) приобретают вид

$$\left.\begin{aligned} \ddot{\eta}_1 + 0{,}38\frac{k}{m}\eta_1 &= \frac{0{,}28F}{m}(1 - e^{-\gamma t}) \\ \ddot{\eta}_2 + 2{,}62\frac{k}{m}\eta_2 &= \frac{0{,}73F}{m}(1 - e^{-\gamma t}) \end{aligned}\right\}.$$

Решаем эти уравнения с помощью интеграла Дюамеля (3.4.60). Положив $\beta_i = \frac{\gamma}{\omega_i}$, $i = 1,2$, получаем

$$\left.\begin{aligned} \eta_1 &= \frac{0{,}28F}{k}\left[1 - \frac{1}{1+\beta_1^2}e^{-\gamma t} - \frac{\beta_1}{1+\beta_1^2}\left(\sin\omega_1 t + \beta_1 \cos\omega_1 t\right)\right] \\ \eta_2 &= \frac{0{,}22F}{k}\left[1 - \frac{1}{1+\beta_2^2}e^{-\gamma t} - \frac{\beta_2}{1+\beta_2^2}\left(\sin\omega_2 t + \beta_2 \cos\omega_2 t\right)\right] \end{aligned}\right\}.$$

Наконец, законы движения $x_i = x_i(t)$, как следует из (3.4.61), записываются как

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \eta_1 + \eta_2 \\ x_2 &= \lambda_{21}\eta_1 + \lambda_{22}\eta_2 \end{aligned}\right\}.$$

Часть II. СОЕДИНЕНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ МАШИН

Детали, составляющие отдельные узлы, соединяются друг с другом, образуя более крупные структурные единицы. Совокупность этих структурных единиц приводит к образованию всего многообразия машин, механических устройств, металлических конструкций и т. д. Иными словами, любое механическое оборудование, в зависимости от его сложности, состоит из десятков, сотен, тысяч, а иногда десятков и сотен тысяч отдельных деталей, которые соединены между собой в определенном порядке с помощью специальных элементов. Элементы конструкций механических систем, основное назначение которых состоит в объединении деталей и узлов в более крупные структурные единицы, называют соединениями.

Соединения разнообразны по физической природе и по назначению, и наиболее эффективно каждый их тип работает при определенных условиях. Задача проектирования любого соединения состоит в том, чтобы правильно подобрать тот или иной тип соединения и определить основные геометрические размеры его элементов в зависимости от характера внешней нагрузки и используемых материалов.

Конструктивно соединение может быть выполнено следующими способами: за счет использования отдельных частей соединяемых деталей, за счет использования вспомогательных деталей (винтов, гаек, шпонок, штифтов, шлицов и др.), за счет сил сцепления на поверхности контакта (например, сил трения) и за счет молекулярно-механического сцепления деталей соединения (например, в сварных и паяных соединениях).

По характеру сопряжения все виды соединений можно разделить на разъемные и неразъемные.

Разъемными называются такие соединения, которые допускают разборку без разрушения составляющих деталей. К ним относятся *резьбовые соединения* и *соединения деталей при передаче вращения* (соединения *с натягом, конические, коническими кольцами, штифтовые, клеммовые, шлицевые* и т. д.). Разъемные соединения обычно бывают неподвижными, но в отдельных случаях могут выполняться подвижными.

Разборка неразъемного соединения всегда связана с разрушением его элементов и при нормальной работе не допускается. Неразъемными являются *сварные, паяные* и *заклепочные* соединения.

Имеется также класс деталей, которые в процессе сборки и разборки пластически деформируются и вследствие этого изменяют геометрические размеры и форму в местах взаимного сопряжения. Такие соединения называются полуразъемными, и они допускают ограниченное число разборок.

Соединения являются одними из важнейших элементов механических конструкций. По удельному весу они составляют наиболее широко распространенную группу деталей машин, и именно соединения чаще всего ответственны за надежность машин. Виды и формы соединений различны, также как различны и методы их расчета и проектирования, каждый из которых индивидуален и требует специального рассмотрения. Поскольку некоторые виды соединений используются крайне редко, то в этой связи рассмотрим здесь только те из них, которые в практике проектирования встречаются наиболее часто.

Раздел 4. РАЗЪЕМНЫЕ СОЕДИНЕНИЯ

Глава 4.1. Резьбовые соединения

Типы резьбы и ее основные геометрические параметры. Р е з ь б о в ы м и называются такие разъемные соединения, неподвижность элементов которых обеспечивается за счет деталей (болтов, винтов, шпилек, гаек и др.), имеющих *резьбу.* Это наиболее распространенные разъемные соединения, которые широко применяются в машиностроении, приборостроении, строительстве и т. д.

Р е з ь б а представляет собой поверхность, образованную перемещением профиля по винтовой линии вдоль оси цилиндрической либо конической образующей заготовки. В зависимости от этого различают *цилиндрическую* и *коническую* резьбу. Наибольшее распространение получила цилиндрическая резьба; коническая в основном применяется в соединениях всевозможных труб.

Резьба, нанесенная на наружную поверхность детали, называется *наружной*, а на внутреннюю — *внутренней.*

Контур сечения резьбы в плоскости, содержащей ось детали, называется *профилем резьбы.* Многообразие типов резьбы определяется выбором контура. По виду профиля в осевом сечении резьба делится на следующие типы (рис. 4.1.1a—d):

- треугольная (рис. 4.1.1a);
- упорная (рис. 4.1.1b);
- трубная (разновидность треугольной резьбы, со скругленными выступами) (рис. 4.1.1c);
- трапецеидальная (рис. 4.1.1d).

Частным случаем резьбы трапецеидального профиля является *прямоугольная резьба* (рис. 4.1.1e). Этот тип резьбы в настоящее время на практике почти не используется, так как обладает рядом существенных недостатков. Но поскольку рас-

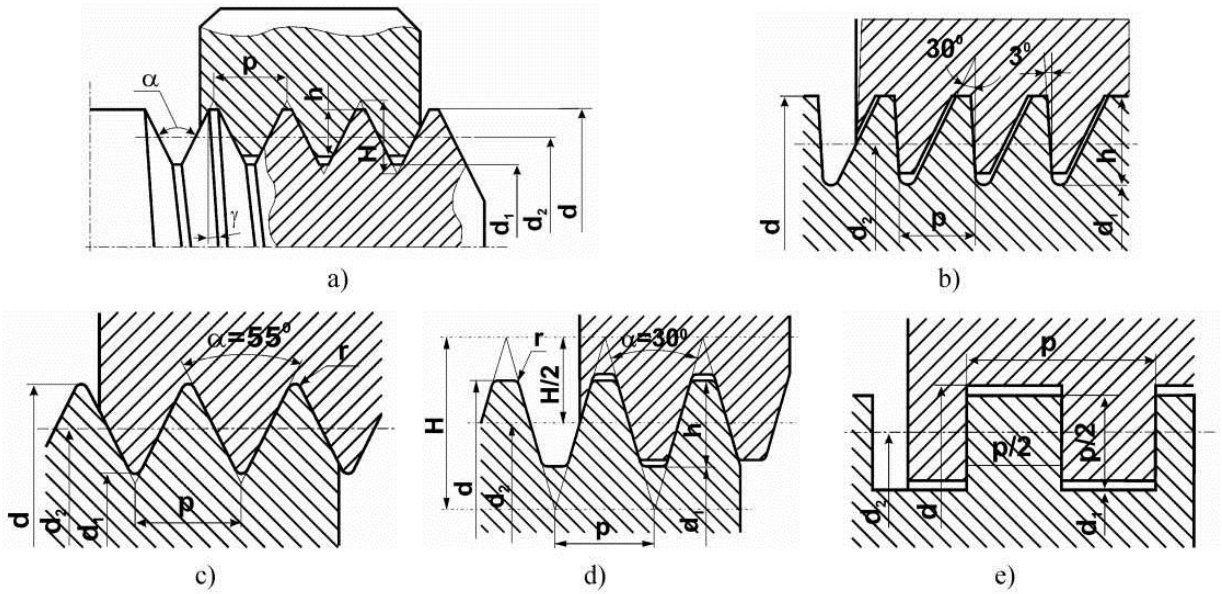


Рис. 4.1.1

чет резьбы такого профиля имеет теоретическое значение, он рассматривается наряду с остальными.

Винтовая поверхность резьбы может быть образована одновременным движением нескольких контуров. В таком случае резьба считается *многозаходной*, а величина заходности определяется количеством таких контуров.

По направлению винтовой линии различают *правую* и *левую* резьбу, причем левая резьба применяется крайне редко.

Основными геометрическими параметрами цилиндрической резьбы являются:

- d — наружный диаметр;
- d_1 — внутренний диаметр;
- d_2 — средний диаметр (на среднем диаметре ширина канавки равна ширине выступа);
- α — угол профиля, равный углу между смежными сторонами резьбы в плоскости осевого сечения;
- r — радиус скругления;
- p — расстояние между одноименными точками смежных витков, измеренное вдоль оси (шаг резьбы);
- n — число заходов резьбы;
- γ — угол подъема винтовой линии $tg\gamma = \dfrac{pn}{\pi d_2}$.

Геометрические размеры резьбы в зависимости от диаметра стандартизованы, что позволяет обеспечить взаимозаменяемость.

Для стандартной резьбы треугольного профиля (рис. 4.1.1a) угол при вершине равен $\alpha = 60^0$. Резьба треугольного профиля с таким значением угла называется *метрической*. Метрическая резьба выполняется с крупным и мелким шагом. Резьба с крупным шагом используется наиболее часто, в то время как область применения резьбы с мелким шагом охватывает только случаи, когда необходимо обеспечить точное осевое перемещение при регулировке или ограничить радиальные размеры винтовой пары.

При больших осевых односторонних нагрузках целесообразно использовать упорную резьбу (рис. 4.1.1b). Угол при вершине, равный $\alpha = 30^0$, принимается для стандартной трапецеидальной резьбы (рис. 4.1.1d).

Резьба, нарезанная на конической поверхности, является герметичной, и при ее использовании нет необходимости устанавливать дополнительные уплотнения. Герметичность обеспечивается использованием трубной резьбы (рис. 4.1.1c), которая широко применяется для соединения труб и различной арматуры.

Кинематической характеристикой винтовой пары (винт — гайка) является отношение $dx/d\varphi$, где dx — относительное осевое перемещение одного из элементов пары при повороте другого элемента на угол $d\varphi$. Исходя из данного определения, для резьбы постоянного шага имеем

$$\frac{dx}{d\varphi} = \frac{xn}{2\pi} = \frac{d_2}{2} tg\gamma . \qquad (4.1.1)$$

По назначению резьба делится на *крепежную* (к каковой относятся: *метрическая* с треугольным профилем; *трубная*; *круглая*; резьба винтов, предназначенных для скрепления деревянных деталей) и *резьбу винтовых механизмов* (трапецеидальная, упорная, прямоугольная). Однако эта классификация является несколько условной, поскольку нет строгих правил использования какой-либо резьбы только как крепежной или только в качестве резьбы винтовых механизмов.

Наибольшие потери на трение, величина которых зависит от угла профиля, имеет метрическая резьба. Так как при крепеже трение играет положительную роль, то во избежание произвольного отвинчивания именно резьба треугольного профиля является основной для крепежных деталей. Трапецеидальная и упорная резьба используется в винтовых передачах (преобразующих вращательное движение в поступательное), так как она обладает наименьшими потерями на трение, и, как следствие, более высоким коэффициентом полезного действия. Упорная резьба применяется при больших односторонних осевых нагрузках.

Типы резьбовых соединений. На практике применяются три принципиально различные конструктивные схемы установки деталей крепления (рис. 4.1.2a—c).

Прежде всего, это крепление *винтом* и *гайкой* (иногда пара винт — гайка называется *винтовой парой* или б о л т о м). Винт представляет собой стержень с головкой и одним резьбовым концом. Такой тип крепления используется для сборки деталей малой толщины (рис. 4.1.2a).

В том случае, если одна из собираемых деталей имеет большие линейные размеры, рекомендуется использовать соединение в и н т о м (рис. 4.1.2b). Как правило, винты устанавливаются в отверстие с зазором. В этом случае гайкой служит та часть одной из соединяемых деталей, на которой нарезана резьба.

Если предполагается частая сборка и разборка резьбового соединения, то вместо винта целесообразно воспользоваться ш п и л ь к о й. Шпилька — это стержень, на обоих концах которого нарезана резьба. Одним концом шпилька завинчивается до упора в резьбовое отверстие на одной из собираемых деталей, а на другом конце на шпильку навинчивается гайка (рис. 4.1.2c). Таким образом, шпилька постоянно находится в отверстии, и даже при частой сборке и разборке разрушения витков резьбы не произойдет.

Главное преимущество болтовых соединений заключается в том, что на самих соединяемых деталях резьба отсутствует.

Момент завинчивания и КПД винтовой пары. М о м е н т о м з а в и н ч и в а н и я T называется момент, который следует приложить к гайке, для того чтобы собрать соединение. Он складывается из двух составляющих:

$$T = T_1 + T_2, \qquad (4.1.2)$$

где T_1 — момент сопротивления в резьбе; T_2 — момент трения на торце гайки.

Рассмотрим *затянутое* резьбовое соединение, которое при завинчивании гаечным ключом нагружается усилием затяжки F_0. В результате приложения силы затяжки на поверхности соединяемых деталей появляется контактное давление p_0, а тело винта растягивается. Соединяемые детали при этом сжимаются.

При изучении силового взаимодействия в винтовой паре удобно представить резьбу развернутой по среднему диаметру. В таком случае витки резьбы можно смоделировать наклонной плоскостью, а гайку рассматривать как груз, который

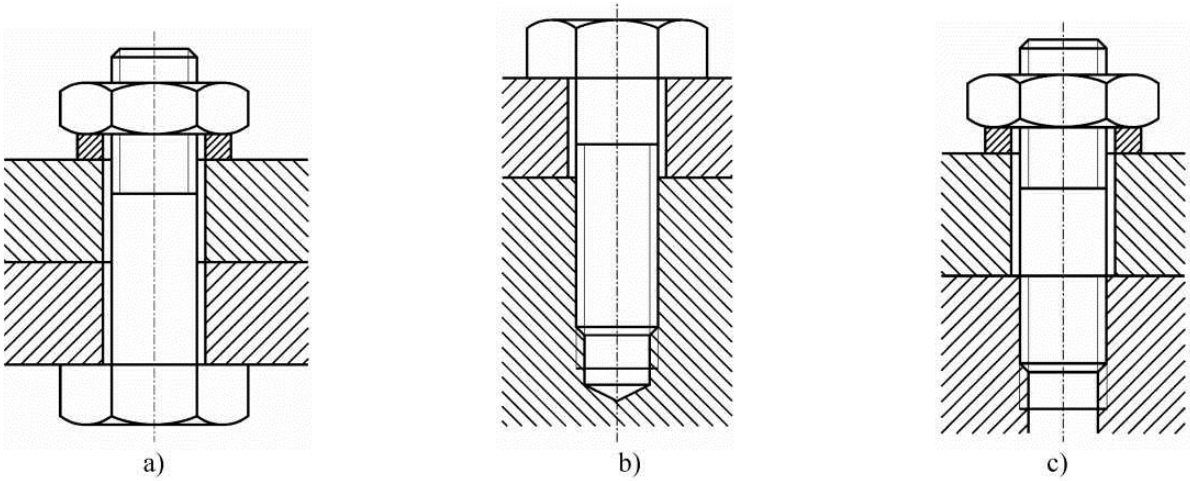


Рис. 4.1.2

перемещается по этой плоскости. Будем решать эту задачу применительно к резьбе прямоугольного профиля. Различия в результатах расчета для профилей других форм будут отмечены ниже.

Предположим, что груз при приложении к нему силы затяжки F_0 поднимается по наклонной плоскости вверх (что соответствует процессу завинчивания гайки). При таком движении на наклонную плоскость (резьбу) будут действовать следующие силы (рис. 4.1.3): сила давления со стороны груза R, окружная сила $F_t = \dfrac{2T_1}{d_2}$ и осевая сила F_a, равная по модулю силе затяжки F_0, но направленная в противоположную сторону. Здесь под T_1 подразумевается внешний момент со стороны ключа, по абсолютной величине равный введенному в (4.1.2) моменту сопротивления в резьбе и противоположный ему по направлению

Полная сила давления R, в свою очередь, является равнодействующей силы нормального давления F_n и силы трения F_f, $F_f = fF_n$, f — коэффициент трения на торце гайки. Известно, что при движении тела приложенная к нему реакция опоры не совпадает с направлением нормали к поверхности из-за наличия трения, т. е.

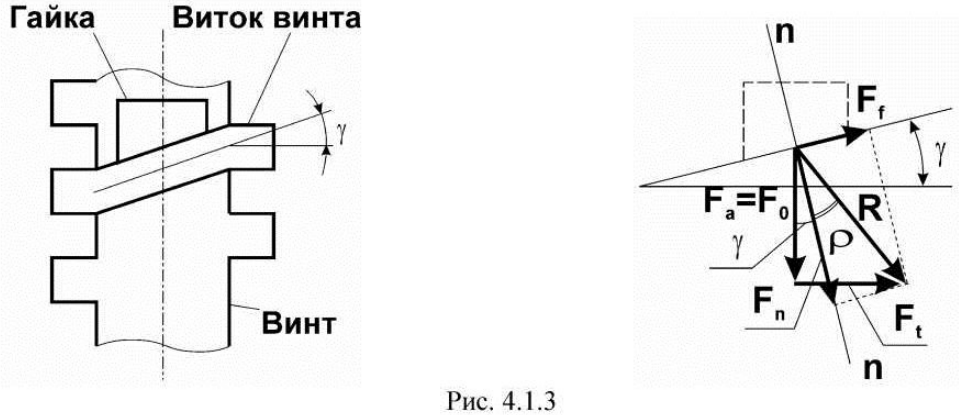


Рис. 4.1.3

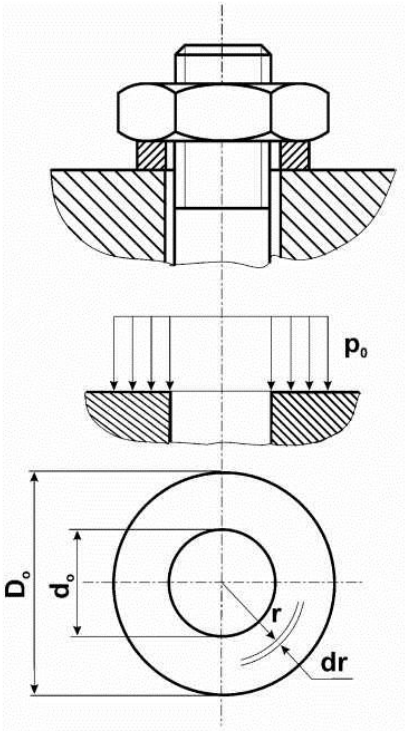


Рис. 4.1.4

вектор $\vec{R}$ направлен не по нормали, а наклонен к ней под углом трения ρ. Из рис. 4.1.3 следует, что

$$F_f = F_n tg\rho,\ F_t = F_0 tg(\gamma + \rho). \qquad (4.1.3)$$

Момент сопротивления в резьбе с учетом (4.1.3) приобретает вид

$$T_1 = \frac{F_t d_2}{2} = F_0 \frac{d_2}{2} tg(\gamma + \rho). \qquad (4.1.4)$$

Для резьбы, угол профиля которой отличен от прямого, ρ следует заменить приведенным углом трения $\rho' = arctg\dfrac{f}{\cos(\alpha/2)}$. Тогда выражение (4.1.4) записывается как

$$T_1 = F_0 \frac{d_2}{2} tg(\gamma + \rho'). \qquad (4.1.5)$$

Для расчета момента трения T_2 на торце гайки представим опорную поверхность гайки (головки винта) в виде кольца, ограниченного двумя концентрическими окружностями (рис. 4.1.4). Выделяя на этой поверхности элементарный участок толщиной dr, находящийся на расстоянии r от центра, для T_2 имеем

$$T_2 = \int_{d_0/2}^{D_0/2} 2\pi r^2 p_0 f dr. \qquad (4.1.6)$$

Здесь d_0 — диаметр отверстия в корпусе, D_0 — наружный диаметр опорной поверхности гайки. Полагая контактные давления p_0, возникающие вследствие приложенной силы затяжки F_0, равномерно распределенными по торцу гайки, т. е. $p_0 = \dfrac{4F_0}{\pi\left(D_0^2 - d_0^2\right)}$, и вычисляя интеграл в правой части (4.1.6), получим

$$T_2 = \frac{F_0 f}{3} \cdot \frac{\left(D_0^3 - d_0^3\right)}{\pi\left(D_0^2 - d_0^2\right)}. \qquad (4.1.7)$$

Окончательно выражение (4.1.2) для момента завинчивания T записывается с учетом (4.1.5) и (4.1.7) в виде

$$T = F_0\left[\frac{d_2}{2} tg(\gamma + \rho') + \frac{f}{3} \cdot \frac{D_0^3 - d_0^3}{D_0^2 - d_0^2}\right]. \qquad (4.1.8)$$

Практический интерес представляет такой параметр, как коэффициент полезного действия (КПД) винтовой пары η. Как известно, КПД равен отношению по-

лезной работы (в данном случае совершенной осевой силой F_0) к затраченной (здесь эти функции выполняет момент трения в резьбе при повороте на угол $d\varphi$), а именно

$$\eta = \frac{F_0 dx}{T_1 d\varphi}. \tag{4.1.9}$$

Поскольку осевое перемещение dp гайки при повороте на угол $d\varphi$, как следует из (4.1.1), равно

$$dx = d\varphi \frac{d_2}{2} tg\gamma, \tag{4.1.10}$$

то после подстановки (4.1.5) и (4.1.10) в (4.1.9) получаем

$$\eta = \frac{tg\gamma}{tg(\gamma + \rho')}. \tag{4.1.11}$$

Расчет резьбового соединения при действии усилия затяжки. Расчет резьбового соединения заключается в оценке его *прочности* и проверке *герметичности стыка*. Прочность резьбового соединения не зависит от его конструктивного исполнения, поэтому методика расчета, излагаемая ниже, может быть использована для каждого из трех типов крепления.

Перейдем к описанию методики расчета ***резьбового соединения, установленного в отверстие с зазором и нагруженного усилием затяжки***.

В качестве примера рассмотрим вариант резьбового соединения винтом и гайкой (рис. 4.1.5), или *болтового соединения*. Если болтовое соединение не воспринимает внешней нагрузки, а находится лишь под действием силы начальной затяжки F_0, то стержень винта растягивается и закручивается моментом трения в резьбе T_1. Считаем, что напряжение растяжения одинаково по сечению, а напряжение сдвига при кручении увеличивается пропорционально расстоянию до оси вращения. Очевидно, что наибольшие суммарные напряжения от силы затяжки возникают в точках на цилиндрической поверхности стержня винта. Для точек, находящихся на этой поверхности, величины эквивалентных напряжений можно определить в соответствии с одной из гипотез прочности. Например, согласно энергетической теории прочности (глава 2.7), величину эквивалентного напряжения σ_e можно представить в виде (2.7.32), $\sigma_e = \sqrt{\left(\sigma^2 + 3\tau^2\right)}$, где σ — нормальное напряжение растяжения силой F_0; τ — напряжение сдвига от момента в резьбе.

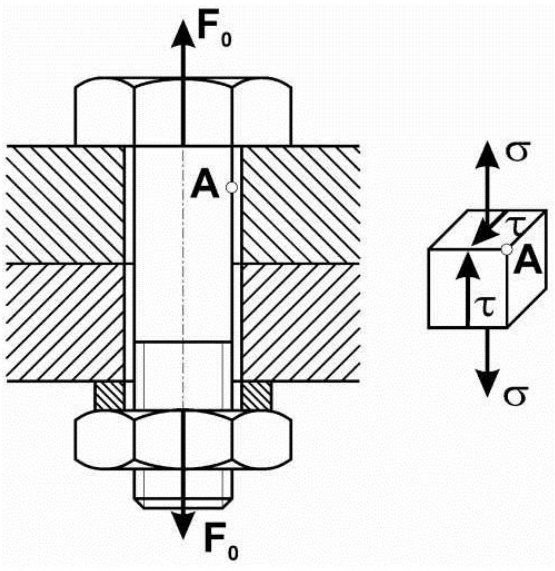


Рис. 4.1.5

Нормальное напряжение растяжения σ от осевой нагрузки F_0 можно интерпретировать как напряжение, возникающие при растяжении стержня диаметром d_1, то есть записать

$$\sigma = \frac{4F_0}{\pi d_1^2}. \tag{4.1.12}$$

Напряжение сдвига τ от момента трения в резьбе T_1 определяется аналогично случаю кручения цилиндра диаметром d_1, и для наиболее нагруженной точки A в соответствии с (2.4.27) равно

$$\tau = \frac{T_1}{W_p} = \frac{16T_1}{\pi d_1^3}. \tag{4.1.13}$$

Подстановка (4.1.12) и (4.1.13) в формулу (2.7.32) даст

$$\sigma_e = \sqrt{\left[\left(\frac{4F_0}{\pi d_1^2}\right)^2 + 3\left(\frac{16F_0 d_2 tg(\gamma+\rho')}{2\pi d_1^3}\right)^2\right]}. \tag{4.1.14}$$

Выражение (4.1.14) можно представить в иной форме. Для этого вынесем первое слагаемое из-под знака корня, а все дальнейшие вычисления выполним применительно к случаю стандартной метрической резьбы, для которой имеют место следующие приближенные соотношения: $d_2 / d_1 \approx 1{,}01$, $\gamma = 2^0 30'$, $f \approx 0{,}15$. Тогда получаем

$$\sigma_e \cong 1{,}3\frac{4F_0}{\pi d_1^2}. \tag{4.1.15}$$

Следует прокомментировать полученный результат. Формула (4.1.15) свидетельствует, что расчет затянутого резьбового соединения без внешней нагрузки сводится к проверке условия прочности стержня винта в опасном сечении на растяжение, а наличие напряжения от кручения учитывается поправочным коэффициентом с числовым значением 1,3. Условие прочности записывается в виде

$$\sigma_e \cong 1{,}3\frac{4F_0}{\pi d_1^2} \le \sigma_a, \tag{4.1.16}$$

где σ_a — допускаемое напряжение растяжения для болтового соединения, величина которого находится из условия отсутствия пластических деформаций. Она зависит от предела текучести материала винта σ_T и равна

$$\sigma_a = \frac{\sigma_T}{n}. \tag{4.1.17}$$

Здесь n — коэффициент запаса прочности. Числовое значение коэффициента запаса n рекомендуется выбирать в зависимости от технологии сбор-

ки. Если сборка выполняется динамометрическим ключом, который позволяет строго контролировать усилие затяжки, то $n = 1{,}3 \div 1{,}5$. Затяжка при таком варианте сборки называется *контролируемой*. Однако в большинстве случаев ключи для затяжки не имеют средств контроля момента завинчивания, и в результате сила затяжки оказывается неопределенной. Сборка, выполняемая таким ключом, считается *неконтролируемой*, и в этом случае целесообразно увеличить значение коэффициента запаса и принимать его равным $n = 1{,}5 \div 2{,}5$, причем наибольшие значения из указанного интервала следует выбирать для винтов малых диаметров, у которых возможность перетяжки является более вероятной.

При изложении методики расчета на прочность затянутого резьбового соединения речь шла только о стержне винта, и ничего не было сказано о прочности витков резьбы. Следует отметить, что разные деформации сопряженных участков винта и гайки приводят к тому, что каждый из витков имеет нагрузку, существенно отличную от других. Теоретические исследования, выполненные с целью определения степени неравномерности распределения нагрузки по виткам резьбы, показали, что у соединения, имеющего шесть витков на длине гайки, первый по отношению к опорной поверхности виток воспринимает 52% от общей внешней нагрузки, в то время как последний, шестой виток — только 2%. Это говорит о том, что повысить прочность резьбы за счет увеличения высоты гайки нельзя, так как последние витки на осевую нагрузку почти не реагируют. Реальное распределение сил по виткам резьбы несколько более равномерно из-за наличия погрешностей изготовления деталей, участвующих в сопряжении, но качественная картина распределения остается неизменной. По этой причине глубину завинчивания принимают равной: диаметру d — для завинчивания в деталь из стали; $1{,}5d$ — для завинчивания в деталь из чугуна и цветных металлов; $2{,}0d$ — для завинчивания в деталь из легких сплавов.

Причиной разрушения витков резьбы может быть также их **срез** у основания профиля и **смятие** (контактные пластические деформации) на винтовой поверхности витка. Срезом называется такое разрушение по поверхности наибольших касательных напряжений, при котором появляются необратимые пластические деформации и, как следствие, прогрессирующий пластический сдвиг. Срез наступает тогда, когда касательные напряжения у основания профиля равны пределу текучести при сдвиге. Под смятием понимается такое состояние поверхности витка, при котором нормальные напряжения в контакте равны пределу текучести.

Однако для стандартной резьбы исследовать прочность ее витков на срез и смятие нет необходимости, поскольку в этом случае условия прочности выполняются автоматически. При этом основной расчет сводится к расчету стержня винта.

Расчет резьбового соединения, нагруженного сдвигающими нагрузками. Рассмотрим расчет единичного резьбового соединения, находящегося под действием *сдвигающих нагрузок*.

Резьбовое соединение, установленное в отверстие с зазором. Пример такого нагружения приведен на рис. 4.1.6. Это соединение должно обеспечить взаимную неподвижность деталей при приложении сдвигающих сил. Пусть F_s — сдвигаю-

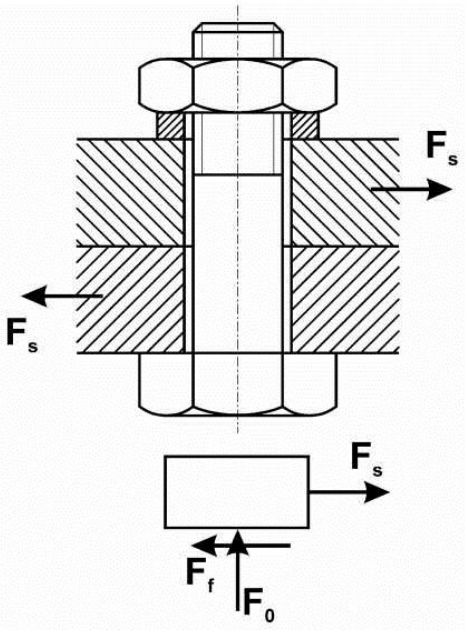


Рис. 4.1.6

щая сила, приходящаяся на один винт, K_s — коэффициент запаса по сдвигу, f — коэффициент трения деталей сопряжения. Условие *несдвигаемости* будет выполнено, если сила трения F_f окажется больше, чем внешняя сдвигающая нагрузка, т. е.

$$F_f = F_0 f \geq F_s K_s . \qquad (4.1.18)$$

Отсюда минимально необходимое усилие затяжки резьбового соединения, при котором выполнено условие несдвигаемости, равно

$$F_0 = \frac{F_s K_s}{f} . \qquad (4.1.19)$$

Остается добавить, что рекомендованные значения коэффициентов запаса по сдвигу лежат в диапазоне $K_s = 1{,}2 \div 1{,}4$.

В общем случае число поверхностей трения k может быть больше единицы. Тогда минимальная сила затяжки соединения с учетом (4.1.19) определится выражением

$$F_0 = \frac{F_s K_s}{kf} . \qquad (4.1.20)$$

Проектировочный расчет такого соединения заканчивается определением диаметра винта с помощью формулы (4.1.16).

Резьбовое соединение, установленное в отверстие без зазора. При действии больших сдвигающих сил винты могут устанавливаться в отверстие без зазора (рис. 4.1.7). Технологически такое соединение выполнить довольно трудно, поэтому его применение должно быть продиктовано только высоким уровнем сдвигающей нагрузки. Основной причиной разрушения соединений этого типа является срез винта по сечению, в котором напряжение сдвига достигает максимальной величины. Очевидно, что это сечение совпадает с плоскостью возможного сдвига поверхностей. Отметим, что сдвиг (срез) по опасному сечению имеет место тогда, когда напряжение в этом сечении равно пределу текучести при сдвиге.

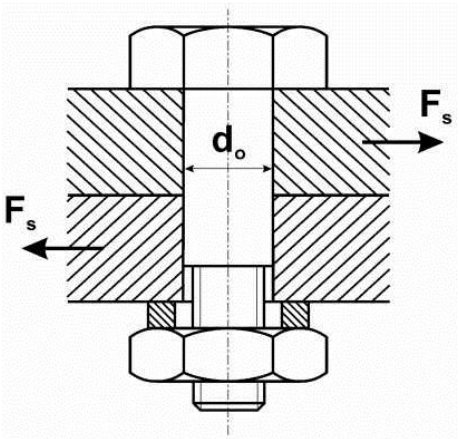


Рис. 4.1.7

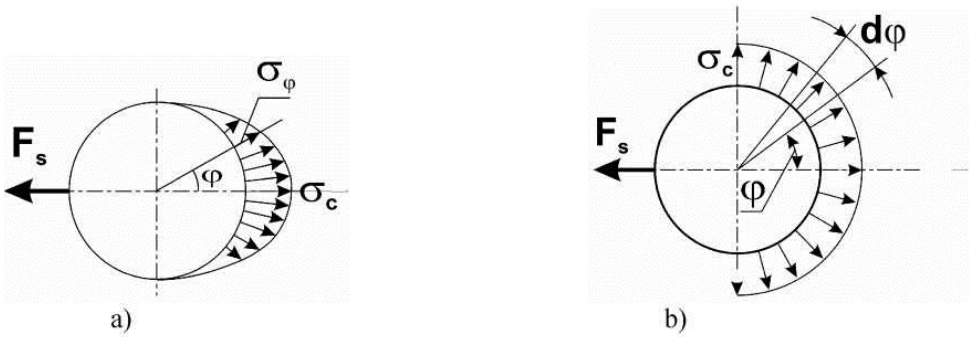


Рис. 4.1.8

Обозначим через τ_{as} допускаемое напряжение сдвига. Условие прочности на срез при условии равномерного распределения напряжений в сечении приобретает вид

$$\tau_s = \frac{4F_s}{\pi d_0^2} \le \tau_{as}\,. \tag{4.1.21}$$

В случае соединения тонких деталей требуется проверка на сопротивление смятию. Заметим, что при таком типе установки стержня винта в отверстие предполагается наличие либо нулевого зазора, либо небольшого натяга. В рамках этого предположения нормальное напряжение, возникающее при приложении нагрузки, можно считать распределенным по закону косинуса, а именно $\sigma_\varphi = \sigma_c \cos\varphi$ (рис. 4.1.8a). Тем не менее такой характер распределения имеет место только в том случае, если поверхности сопряжения идеально изготовлены. На практике же эти поверхности всегда имеют погрешности формы, что существенно искажает картину распределения напряжений.

Фактическая эпюра нормального напряжения зависит от конкретной топографии поверхностей находящихся в контакте элементов. В общем случае закон распределения напряжения сильно отличается от косинусоидального и описывается совокупностью случайных функций. Принимая во внимание неопределенность в выборе функции распределения, можно считать, что напряжение остается постоянным, а именно $\sigma_\varphi = \sigma_c$.

Величину напряжения смятия σ_c можно получить из условия равновесия нижней пластины (рис. 4.1.8b):

$$F_s = 2\int_0^{\pi/2} \sigma_c \frac{d_0}{2} l \cos\varphi d\varphi\,, \tag{4.1.22}$$

где $d\varphi$ — угол, определяющий размеры текущей элементарной площадки; l — минимальная высота сопряжения.

Решение уравнения равновесия (4.1.22) относительно напряжения σ_c позволяет написать условие прочности на сопротивление пластическому деформированию, которое будет иметь вид

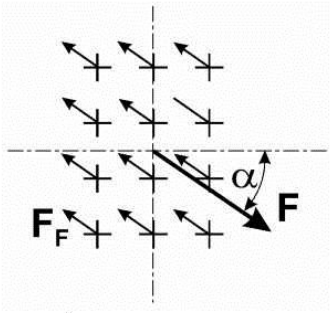
$$\sigma_c = \frac{F_s}{d_0 l} \le \sigma_{ac}\,, \tag{4.1.23}$$

где σ_{ac} — допускаемое нормальное напряжение на поверхности смятия. При выборе допускаемого напряжения следует руководствоваться рекомендацией, согласно которой

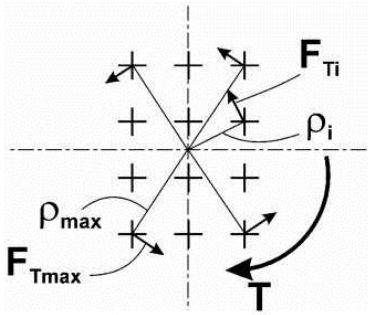
- $\sigma_{ac} = (0{,}8 \div 1{,}0)\sigma_r$ — для контакта стальных деталей;
- $\sigma_{ac} = 0{,}8\sigma_b$ — для чугуна.

Здесь σ_r — предел текучести наименее прочного материала в контакте; σ_b — предел прочности.

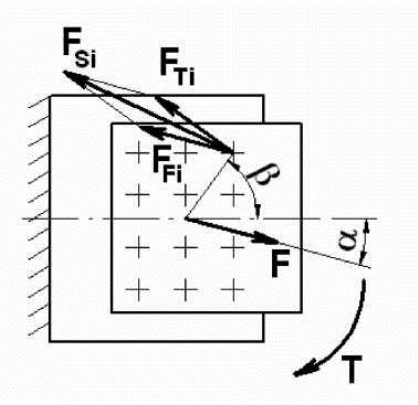
Расчет группы винтов при действии сдвигающих нагрузок. В случае нагружения группы, состоящей из z винтов, центральной сдвигающей силой F (*центральной* называется сила, приложенная к центру тяжести стыка), действующей под углом α, можно предположить, что в результате каждый винт воспринимает одинаковую часть внешней нагрузки, равную $F_F = \dfrac{F}{z}$. Для выполнения условия равновесия возникающие в каждом винте реактивные силы должны быть направлены противоположно внешней нагрузке (рис. 4.1.9a).



a)



b)



c)

Рис. 4.1.9

Если же в плоскости стыка действует внешний момент T (рис. 4.1.9b), то каждый из винтов воспринимает различную долю внешней нагрузки. Для дальнейшего описания нам понадобится ввести понятие *центра сдвига* (относительно этого центра возможен поворот стыка) — точки стыка, которая остается неподвижной при приложении внешнего момента. Эта точка совпадает с центром тяжести геометрической фигуры, образованной из совокупности поперечных сечений крепежных деталей. Для случая симметричного размещения элементов крепления этот центр является одновременно и центром симметрии. Если крепежные детали расположены несимметрично, то координаты центра сдвига определяются по известным в механике формулам:

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^{z} x_i}{z}; \qquad y_c = \frac{\sum_{i=1}^{z} y_i}{z}, \tag{4.1.24}$$

где (x_i, y_i) — координаты размещения крепежных деталей в локальной системе координат; (x_c, y_c) — координаты центра тяжести в локальной системе координат.

Предположим, что величина внешней силы, приходящейся на произвольно размещенный i-й винт, пропорциональна расстоянию ρ_i от этого винта до центра сдвига. Реактивная сила F_{Ti}, вызванная действием внешнего момента, перпендикулярна радиус-

вектору, проведенному от центра винта до центра сдвига. Эта сила должна создавать реактивный момент, по знаку противоположный внешнему. Уравнение равновесия при этом будет иметь вид

$$T = \sum_i F_{Ti}\rho_i . \qquad (4.1.25)$$

Обозначим через $F_{T\max}$ и $\rho_{\max}$ силу, приложенную к наиболее нагруженному винту, и расстояние до этого винта. Тогда из предположения о пропорциональности нагрузки расстоянию до центра следует, что

$$\frac{F_{Ti}}{\rho_i} = \frac{F_{T\max}}{\rho_{\max}} . \qquad (4.1.26)$$

Пусть z_i — число винтов, расположенных на одинаковом расстоянии от центра. Эти винты образуют группу. Количество групп винтов обозначим через m. Тогда, выражая из (4.1.26) величину F_{Ti} и подставляя ее в (4.1.25), запишем

$$T = \frac{F_{T\max}}{\rho_{\max}} \sum_{i\ 1}^{m} z_i \rho_i^2 . \qquad (4.1.27)$$

Из (4.1.27) следует, что сила, приходящаяся на наиболее нагруженный винт, равна

$$F_{T\max} = \frac{T\rho_{\max}}{\sum_{i=1}^{m} z_i \rho_i^2} , \qquad (4.1.28)$$

а на текущий —

$$F_{Ti} = \frac{T\rho_i}{\sum_{i\ 1}^{m} z_i \rho_i^2} . \qquad (4.1.29)$$

Рассмотрим теперь случай нагружения группы винтов произвольной комбинацией из *сдвигающих сил* и *моментов* (рис. 4.1.9с). По правилам механики такую схему внешнего нагружения можно привести к суммарному вектору сдвигающих сил и к суммарному моменту, точка приложения которых совпадает с центром сдвига — то есть к эквивалентному нагружению. При этом в соответствии с принципом суперпозиции действие каждого из силовых факторов (которое рассчитывается по приведенной выше методике) можно рассматривать независимо от наличия другого. Полная сила $\vec{F}_{si}$, приложенная к i-му винту, определится в результате векторного суммирования возникающих реактивных сил:

$$\vec{F}_{si} = \vec{F}_{Ti} + \vec{F}_{Fi} ,$$

$$F_{si} = \sqrt{\left(F_{Fi}^2 + F_{Ti}^2 + 2F_{Fi}F_{Ti}\sin(\alpha + \beta_i)\right)} , \qquad (4.1.30)$$

где β_i — угол, под которым расположен текущий винт.

Выполнив указанную операцию суммирования, для каждого из винтов получаем набор векторов $\vec{F}_{s1}, \vec{F}_{s2}, ..., \vec{F}_{si}, ..., \vec{F}_{sz}$, что позволяет определить вектор максимальной силы $\vec{F}_{s\max}$:

$$\vec{F}_{s\max} = \max(\vec{F}_{s1}, \vec{F}_{s2}, ..., \vec{F}_{si}, ..., \vec{F}_{sz}). \qquad (4.1.31)$$

Далее, как обычно, следует провести расчет статической прочности (по формулам (4.1.16), (4.1.20) — если винты установлены с зазором, и (4.1.21), (4.1.23) — без зазора) и определить требуемый диаметр винта. При необходимости можно выполнить расчет прочности при переменном режиме нагружения (глава 2.10).

Итак, расчет прочности группового винтового соединения сводится к расчету изолированного винта, нагруженного наибольшей силой $F_{s\max}$.

Расчет резьбового соединения при действии отрывающих сил. Чаще всего винты, установленные с зазором, воспринимают нагрузку, действующую перпендикулярную к плоскости стыка. Методы расчета такого типа нагружения существенно отличаются от предыдущего. Рассмотрим последовательно два частных случая.

Центральное нагружение стыка статической отрывающей нагрузкой. Если пренебречь собственными изгибными деформациями соединяемых деталей, то можно предположить, что после затяжки винта давление по поверхности контакта распределяется равномерно. Правда, это предположение оказывается справедливым только в случае соединения массивных деталей. Для расчета тонких деталей можно воспользоваться численными методами, например, МКЭ (см. главу 3.3).

Рассмотрим затянутое резьбовое соединение, нагруженное усилием затяжки F_0. После приложения к соединению отрывающей внешней силы F величина давления в контакте под ее воздействием меняется (рис. 4.1.10). Давление сжатия стыка уменьшается, а сам стык получает дополнительную деформацию $\Delta\delta_1$, вызванную приложением к нему силы ΔF_1. Кроме того, внешняя нагрузка ΔF_2 вызывает дополнительное удлинение винта на величину $\Delta\delta_2$. Физически это означает, что внешнее усилие перераспределяется между стыком и винтом, причем одна часть внешней нагрузки дополнительно нагружает винт, а другая идет на уменьшение затяжки стыка.

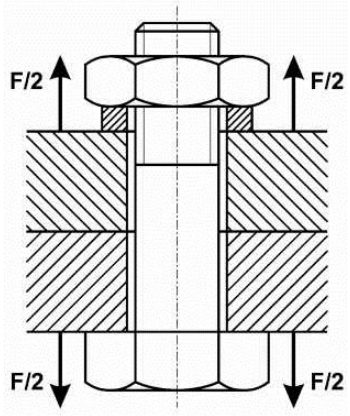


Рис. 4.1.10

Соотношение между ΔF_1 и ΔF_2 зависит от многих факторов, но их сумма равна внешней силе F:

$$F = \Delta F_1 + \Delta F_2. \qquad (4.1.32)$$

Обозначим через λ_1 и λ_2 податливости стыка и стержня винта соответственно (т. е. удлинения под действием единичной силы; см. главу 2.6), а относительное перемещение стыка после приложения к нему внешней нагрузки и удлинение стержня винта под действием внешней отрывающей нагрузки — через $\Delta\delta_1$ и $\Delta\delta_2$. Тогда уравнение совместности деформаций записывается в виде $\Delta\delta_1 = \Delta\delta_2$, или

$$\lambda_1 \Delta F_1 = \lambda_2 \Delta F_2. \qquad (4.1.33)$$

Из (4.1.32) и (4.1.33) получаем выражение для дополнительной силы ΔF_2, действующей на винт,

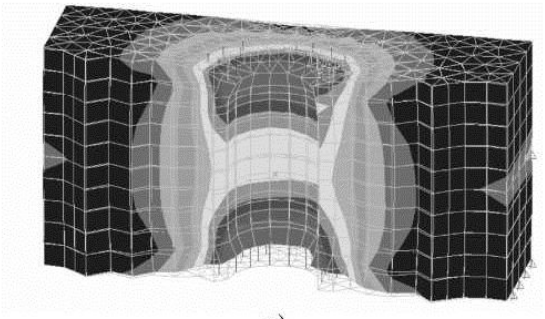
$$\Delta F_2 = \frac{F\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} = F\chi, \qquad (4.1.34)$$

и силы ΔF_1, ослабляющей нагрузку стыка,

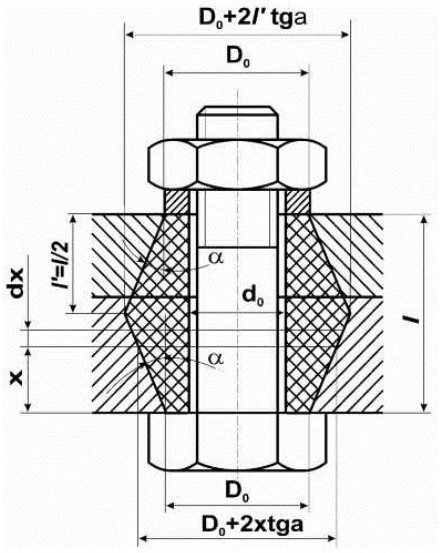
$$\Delta F_1 = (1 - \chi)F. \qquad (4.1.35)$$

Здесь под χ понимается коэффициент основной нагрузки, равный доле внешней силы, которая приходится на винт затянутого соединения и вызывает его растяжение: $\chi = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$.

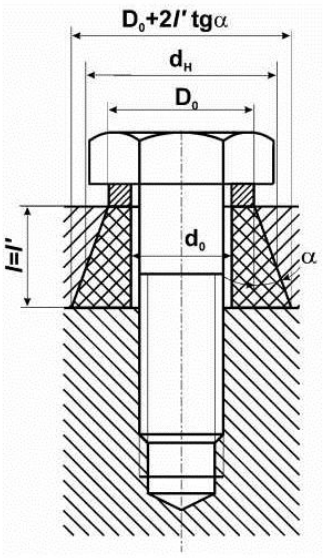
Многочисленные эксперименты и численные решения задачи расчета напряженно-деформированного состояния деталей, нагруженных усилием затяжки, показали, что напряжения быстро затухают по мере удаления от зоны закрепления. На рис. 4.1.11a в качестве примера приведена полученная с помощью МКЭ картина распределения эквивалентных напряжений и деформаций при сжатии двух пластин болтом (рис. 4.1.11b) и винтом (рис. 4.1.11c). На рисунках наглядно видно, что напряжения, вызванные затяжкой, локализованы внутри геометрической фигуры,



a)



b)



c)

Рис. 4.1.11

отдаленно напоминающей усеченный конус. Это подобие явилось основанием для приближенной замены сопряженных стыков на конусообразные — конусы давлений, что существенно упрощает задачу расчета элементов соединения. С помощью численных расчетов можно определить параметры конуса давлений, главным из которых является угол наклона образующей конуса α. В результате оказывается, что значение этого угла не зависит от толщины соединяемых деталей, а его тангенс равен $tg\alpha = 0{,}4 \div 0{,}5$.

Податливость конуса давлений λ_1 можно найти, выделив на расстоянии x элементарный цилиндр высотой dx и суммируя деформации таких элементарных цилиндров под действием единичной нагрузки:

$$\lambda_1 = \frac{1}{E_1}\int_0^{l'} \frac{4dx}{\pi[(D_0 + 2xtg\alpha)^2 - d_0^2]}, \qquad (4.1.36)$$

где E_1 — модуль упругости материала стыка, а смысл величины l' ясен из рис. 4.1.11b,c. Вычисляя интеграл в правой части (4.1.36) и проводя простейшие преобразования, получим

$$\lambda_1 = \frac{1}{\pi E_1 d_0 tg\alpha} \ln \frac{(D_0 + d_0)(D_0 + 2l'tg\alpha - d_0)}{(D_0 - d_0)(D_0 + 2l'tg\alpha + d_0)}. \qquad (4.1.37)$$

При выводе (4.1.37) предполагалось, что напряжения внутри конуса давлений постоянны, но это слишком условное толкование. Как видно из рисунка, напряжение в точках, расположенных ближе к центру винта, выше, чем на краях. По этой причине усеченный конус может быть заменен эквивалентным цилиндром диаметром d_{II}, податливость которого рассчитывается по формуле

$$\lambda_1 = \frac{4l'}{\pi E_1[(D_0 + l')^2 - d_0^2]}.$$

Необходимо отметить, что приближенные зависимости для расчета податливости соединяемых деталей в большинстве случаев удовлетворяют практиков, но для ответственных деталей все же следует использовать более точные решения, полученные с помощью современных компьютерных систем конечно-элементного анализа. Например, податливость λ_2 винта с переменным сечением можно определить, представив его (в зависимости от конструкции) либо в виде стержня, либо в виде комбинации стержней разных диаметров. Тогда, обозначая через E_2 модуль упругости материала болта, а через l_{2i} и A_{2i} — длину i-го участка (всего имеем m участков) винта и площадь его поперечного сечения, запишем

$$\lambda_2 = \frac{1}{E_2}\sum_{i\ 1}^{m} \frac{l_{2i}}{A_{2i}}. \qquad (4.1.38)$$

Вычисления показали, что коэффициент основной нагрузки для соединения металлических деталей без применения прокладок меняется в довольно узком диапазоне, а именно $\chi = 0{,}2 \div 0{,}3$, что может быть в дальнейшем использовано для выполнения приближенных расчетов.

В целом критерием расчета затянутого резьбового соединения, нагруженного внешней отрывающей силой, является *условие нераскрытия стыка*. Под нераскрытием понимается такой вариант сборки, при котором на поверхностях сопряженных деталей не будет участков с нулевым давлением. Условие нераскрытия имеет вид

$$F_0 K_c \geq (1-\chi)F\,, \tag{4.1.39}$$

где K_c — коэффициент запаса по нераскрытию, равный $K_c = 1{,}1 \div 1{,}3$.

Зная величину усилия затяжки F_0 и скорректировав ее аналогично (4.1.15) числовым коэффициентом, равным $1{,}3$ (этот коэффициент учитывает наличие напряжений сдвига от момента трения в резьбе), а также принимая во внимание дополнительную силу растяжения (4.1.34), вызванную внешней отрывающей нагрузкой ΔF_2, можно определить суммарную нагрузку F_Σ, действующую на винт:

$$F_\Sigma = 1{,}3F_0 + \chi F\,. \tag{4.1.40}$$

Значение диаметра винта d_1 определяется из условия прочности, аналогичного (4.1.16),

$$\sigma_e \approx \frac{4F_\Sigma}{\pi d_1^2} \leq \sigma_a\,. \tag{4.1.41}$$

Центральное нагружение стыка переменной во времени отрывающей нагрузкой. Такой режим нагружения винта характеризуется средним (2.10.4) и амплитудным (2.10.5) значениями напряжений, а именно

$\sigma_m = \dfrac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2}$ — среднее напряжение растяжения винта;

$\sigma_{am} = \dfrac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2}$ — амплитудное напряжение растяжения винта.

Как было отмечено в главе 2.10, переменный режим нагружения может привести к появлению усталостных трещин, которые в конечном итоге разрушают тело винта. Трещины зарождаются в местах высоких местных напряжений. Одним из таких опасных мест является первая впадина, где из-за неравномерности распределения нагрузок по виткам имеют место наибольшие местные напряжения (рис. 4.1.12). Аналитические исследования показывают, что теоретический коэффициент концентрации напряжений α_σ для данной точки можно приближенно рассчитать по формуле

$$\alpha_\sigma = 1 + 1{,}1\sqrt{\frac{p}{r}}\,, \tag{4.1.42}$$

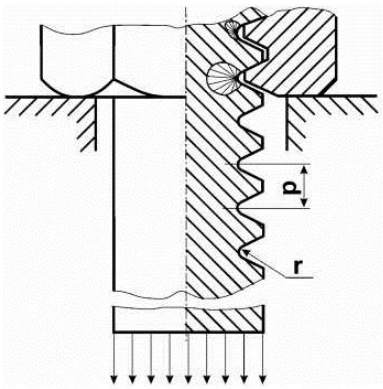


Рис. 4.1.12

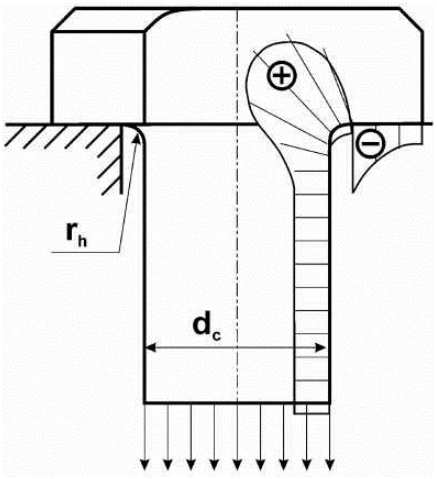


Рис. 4.1.13

где p и r — шаг резьбы и радиус закругления впадины резьбы. Для стандартной метрической резьбы $r = 0{,}144\,p$.

Другим опасным с точки зрения зарождения усталостных трещин местом является переход стержня винта в головку. Здесь, хотя и довольно редко, но также возможно разрушение. Введем следующие обозначения: d_c — диаметр стержня болта, r_h — радиус перехода от стержня к головке (рис. 4.1.13). Тогда теоретический коэффициент концентрации для данного случая равен

$$\alpha_\sigma = 1 + 0{,}55\sqrt{\frac{d_c}{r_h}}. \qquad (4.1.43)$$

На практике резьбовые соединения, работающие в условиях переменного внешнего нагружения, обычно изготавливают так, чтобы $r_h / d_c = 0{,}05 \div 0{,}10$. Тогда коэффициент концентрации лежит в пределах $\alpha_\sigma = 2{,}8 \div 3{,}5$.

Расчет долговечности соединения выполняется по общей методике, изложенной в главе 2.10, согласно которой коэффициент запаса усталостной прочности n_σ равен (2.10.20):

$$n_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{K\sigma_{am} + \psi_\sigma \sigma_{m\sigma}}.$$

Проведенные многократные испытания долговечности винтов показали, что она мало зависит от средних напряжений, поэтому можно положить $\psi_\sigma \approx 0$. В таком виде расчет соединения называется *расчетом по предельным амплитудам*, коэффициент запаса обозначается как n_{am}, а выражение (2.10.20) представляется как

$$n_{am} = n_\sigma = \frac{\sigma_{-1t}}{\left(\dfrac{K_\sigma}{K_{d\sigma}} + \dfrac{1}{K_{F\sigma}} - 1\right)\dfrac{\sigma_{am}}{K_V}}. \qquad (4.1.44)$$

Величину σ_{-1t} называют пределом выносливости при растяжении.

Введем понятие предельно допустимой амплитуды, равной $\sigma_{am\,\lim} = \sigma_{-1t} / K_\sigma$ (напомним, что согласно (2.10.11) эффективный коэффициент концентрации равен $K_\sigma = 1 + q(\alpha_\sigma - 1)$).

Как следует из (2.10.18), $K_{d\sigma}$ представляет собой масштабный фактор, значения которого приведены в таблице 4.1.1:

Таблица 4.1.1. **Масштабный фактор $K_{d\sigma}$**

Обозначение резьбы	М6	М8	М10	М12—М24
$K_{d\sigma}$	1	0.75	0,7	0.65

Полагаем, что предельное значение амплитуды $\sigma_{am\lim}$ не зависит от среднего напряжения цикла и ограничено сверху значением предела текучести σ_T. Многочисленные экспериментальные данные показали, что предельные напряжения растяжения, приводящие к усталостному разрушению, зависят только от материала винта. Наиболее достоверные результаты расчета получаются на основании прямых экспериментов, но если таких данных нет, то можно воспользоваться приближенными зависимостями, выведенными с помощью статистической обработки экспериментальных данных большого числа испытаний:

$$\sigma_{am\lim} = \sigma_{-1t} / K \cong 0{,}75\sigma_{-1} / K \ .$$

В литературе приведены и другие данные для расчета σ_{-1t}:

$\sigma_{-1t} = 0{,}35\sigma_b$ — для углеродистых сталей;

$\sigma_{-1t} = 0{,}28\sigma_b + 90$ — для легированных сталей.

Расчет прочности по предельным амплитудам сводится к определению коэффициента запаса (4.1.44), причем величина этого коэффициента должна лежать в следующих пределах:

$$n_{am} = \frac{\sigma_{am\lim}}{\sigma_{am}} = 2{,}5 \div 4{,}0 . \qquad (4.1.45)$$

Расчет группы винтов при произвольном нагружении силой, нормальной к плоскости стыка. В общем случае стык, затянутый группой из z винтов, нагружается системой силовых факторов, каждый из которых известными методами механики можно перенести в любую точку. Если в качестве точки переноса взять центр тяжести стыка, то его произвольное нагружение можно свести к эквивалентной силе F_n, нормальной к поверхности стыка, и результирующему опрокидывающему моменту M (рис. 4.1.14). Момент представляется в виде суммы проекций M_x, M_y на две взаимно перпендикулярные оси, в качестве которых обычно берут главные оси:

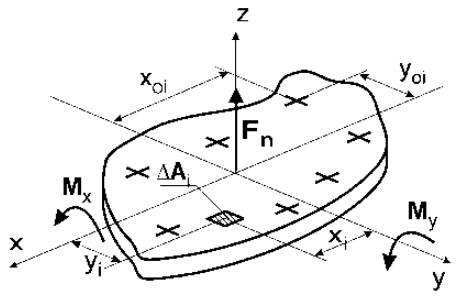


Рис. 4.1.14

$$F_n = \sum_{i=1}^{k} F_{ni} ;$$

$$M_x = \sum_{j=1}^{m} M_{xj} ; \qquad (4.1.46)$$

$$M_y = \sum_{j=1}^{m} M_{yj} ,$$

где F_{zi} — текущее значение нормальной силы; M_{xj}, M_{yj} — текущие значения проекций момента; k и m — количество приложенных сил и моментов соответственно. За положительное направление момента принимаем такое, при котором из положительного конца вектора можно наблюдать его вращение против часовой стрелки. Если стык несимметричен (рис. 4.1.14), то координату центра тяжести следует определить по формулам

$$x_c = \frac{S_{y'}}{A}; \qquad y_c = \frac{S_{x'}}{A}.$$

Здесь A — площадь поверхности стыка; $S_{y'}$ и $S_{x'}$ — статические моменты площади поверхности стыка относительно произвольных осей $X'Y'$; (x_c, y_c) — координаты центра тяжести фигуры, описывающей опорную поверхность относительно осей $X'Y'$.

Каждый из приложенных силовых факторов вызывает появление реакций, которые проявляются в форме возникающих на контактной поверхности давлений. Просуммируем величины удельных давлений, полученные в результате действий каждого из них.

Постоянное давление сжатия возникает на поверхности от действия силы затяжки. Понимая под p_0 величину постоянного давления от затяжки, а под $\Delta p_{Fi}, \Delta p_{Mxi}$ и Δp_{Myi} — компоненты давлений от внешних силовых факторов в i -й точке, запишем

$$p_i = p_0 + \Delta p_{Fi} + \Delta p_{Mxi} + \Delta p_{Myi}, \tag{4.1.47}$$

где p_i — давление на площадке с координатами x и y относительно осей, проходящих через центр тяжести стыка.

Из множества N точек поверхности контакта интерес представляют точки с максимальным и минимальным уровнями давлений. Как было указано ранее, критерием расчета является условие нераскрытия стыка, т. е.

$$p_{\min} = \min(p_1, p_2, \ldots, p_i, \ldots, p_N) \geq 0. \tag{4.1.48}$$

В отдельных случаях (например, для контакта хрупких материалов) необходимо проверить прочность материалов, находящихся в контакте:

$$p_{\max} = \max(p_1, p_2, \ldots, p_i, \ldots, p_N) \leq p_a, \tag{4.1.49}$$

где p_a — допускаемое давление на поверхности сопряженных деталей.

Рассмотрим каждый из компонентов суммы (4.1.47):

1) давление сжатия p_0 от усилия затяжки равно

$$p_0 = \frac{F_0 z}{A}; \tag{4.1.50}$$

2) давление p_{Fi}, вызванное приложением нормальной силы F_n, рассчитывается по формуле

$$p_{Fi} = \frac{F_n(1-\chi)}{A}; \qquad (4.1.51)$$

3) текущее давление Δp_{Mxi} от момента M_x можно определить из уравнения равновесия, записанного для элемента ΔA_i, находящегося на расстоянии y_i от оси (рис. 4.1.14):

$$M_x(1-\chi) = \sum_{i=1}^{N} \Delta A_i \Delta p_{Mxi} y_i \,. \qquad (4.1.52)$$

где N — общее число элементарных площадок. Полагая, что давление линейно зависит от расстояния до оси, т. е.

$$\frac{\Delta p_{Mxi}}{y_i} = \frac{\Delta p_{Mx\max}}{y_{\max}},$$

и переходя в (4.1.52) к пределу при $N \to \infty$ и $\Delta A_i \to 0$, получим

$$M_x(1-\chi) = \int_A \Delta p_{Mx\max} \frac{y_i^2}{y_{\max}} dA = \frac{\Delta p_{Mx\max} I_x}{y_{\max}},$$

откуда

$$\Delta p_{Mx\max} = \Delta p_{Mx} = \frac{M_x(1-\chi) y_{\max}}{I_x}. \qquad (4.1.53)$$

Здесь $y_{\max}$ и Δp_{Mx} — расстояние до наиболее удаленной площадки стыка от оси x и давление на этой площадке, I_x — момент инерции площадки относительно оси x. По аналогии с (4.1.53) можно написать

$$\Delta p_{My} = \frac{M_y(1-\chi) x_{\max}}{I_y}. \qquad (4.1.54)$$

Окончательно условие нераскрытия стыка (4.1.48) приобретает вид

$$p_{\min} = \frac{F_0 z}{A} - \frac{F_n(1-\chi)}{A} - \frac{M_x(1-\chi) y_{\max}}{I_x} - \frac{M_y(1-\chi) x_{\max}}{I_y} \geq 0. \qquad (4.1.55)$$

Из условия нераскрытия (4.1.55) при $p_{\min} = 0$ можно определить силу затяжки соединения:

$$F_0 = \left[\frac{F_z(1-\chi)}{A} + \frac{M_x(1-\chi) y_{\max}}{I_x} + \frac{M_y(1-\chi) x_{\max}}{I_y} \right] \frac{A K_c}{z}, \qquad (4.1.56)$$

где K_c — введенный в (4.1.39) коэффициент запаса нераскрытия.

Перейдем теперь к рассмотрению сил, действующих на произвольно размещенный винт вследствие приложения внешней нагрузки и усилия затяжки:

$$F_{\Sigma i} = 1{,}3F_0 + \Delta F_F + \Delta F_{Mxi} + \Delta F_{Myi}. \qquad (4.1.57)$$

Здесь $\Delta F_F = \dfrac{F_n \chi}{z}$ — сила растяжения, вызванная действием внешней нагрузки (см. 4.1.34); ΔF_{Mxi} — сила растяжения текущего винта, возникающая при действии момента M_x, которая находится из уравнения равновесия

$$M_x \chi = \sum_{i=1}^{z} \Delta F_{Mxi} y_{0i}. \qquad (4.1.58)$$

В предположении линейной зависимости действующей на текущий винт силы от расстояния y_i до этого винта (рис. 4.1.14) имеем

$$\frac{\Delta F_{Mxi}}{y_{0i}} = \frac{\Delta F_{\max Mx}}{y_{0\max}},$$

где $\Delta F_{\max Mx}$ и $y_{0\max}$ — сила, приложенная к наиболее удаленному от оси x винту, и расстояние до него соответственно. Тогда из (4.1.58) получаем

$$\Delta F_{Mx\max} = \frac{M_x \chi y_{0\max}}{\sum_{i=1}^{z} y_{0i}^2};$$

$$\Delta F_{Mxi} = \frac{M_x \chi y_{0i}}{\sum_{i=1}^{z} y_{0i}^2};$$

$$F_{\Sigma i} = 1{,}3F_0 + \frac{F_n \chi}{z} + \frac{M_x \chi y_{0i}}{\sum_{i=1}^{z} y_{0i}^2} + \frac{M_y \chi x_{0i}}{\sum_{i=1}^{z} x_{0i}^2}. \qquad (4.1.59)$$

Среди элементов последовательности нагрузок (4.1.59) следует выбрать наибольшее значение $F_{\Sigma\max}$, которое и принимается в качестве расчетного:

$$F_{\Sigma\max} = \max(F_{\Sigma 1}, F_{\Sigma 2}, \ldots, F_{\Sigma i}, \ldots, F_{\Sigma N}). \qquad (4.1.60)$$

Дальнейший расчет прочности наиболее нагруженного винта выполняется в зависимости от вида нагрузки. В том случае, если нагрузка постоянна по времени — по условию статической прочности, в противном случае (при переменном режиме нагружения) — по условию усталостной прочности. Методика расчета была рассмотрена выше.

При приложении сдвигающей нагрузки дополнительно необходимо проверить выполнение условия несдвигаемости:

$$\left[F_0 z - F_n(1-\chi)\right] f \geq F_s K_s . \qquad (4.1.61)$$

В случае невыполнения условия (4.1.61) несдвигаемость следует обеспечить за счет использования предназначенных для этого конструктивных мероприятий. Если же такие мероприятия по какой-либо причине провести не удается или они нецелесообразны, то условие (4.1.61) служит для выбора необходимого усилия затяжки и, как следствие, геометрического размера винта.

Глава 4.2. Соединения деталей при передаче вращения

Такие соединения используются при проектировании деталей осесимметричной формы, которые, в свою очередь, состоят из двух или нескольких более мелких деталей. После сборки соединение должно обеспечить работу узла как единого целого. Соединение считается работоспособным, если приложенные внешние нагрузки воспринимаются им без разрушения в контакте, а возможные при этом перемещения остаются упругими. Важной характеристикой соединения является возможность его последующей разборки без разрушения поверхностей сопряжения.

По характеру сборки такие соединения выполняются за счет:

- использования сил трения (соединения с натягом, конические соединения, соединения коническими кольцами, клеммовые соединения);
- применения вспомогательных деталей (шпонок, штифтов, и т. п);
- зацепления (шлицевое соединение).

Каждый из представленных типов имеет свои преимущества, недостатки и особенности, что, в конечном итоге, и определяет область его эффективного применения. Методы расчета каждого типа соединения существенно различаются. Ниже мы подробно остановимся на их изложении.

4.2.1. Соединения с натягом

Соединения этого типа воспринимают внешнюю нагрузку за счет сил трения, создаваемых в контакте собранных деталей вследствие *натяга*. В свою очередь натяг достигается за счет разности посадочных размеров вала и сопряженного с ним отверстия. С помощью натяга обычно соединяют детали с цилиндрическими (реже — коническими) поверхностями контакта.

Сборка такого соединения может быть выполнена:

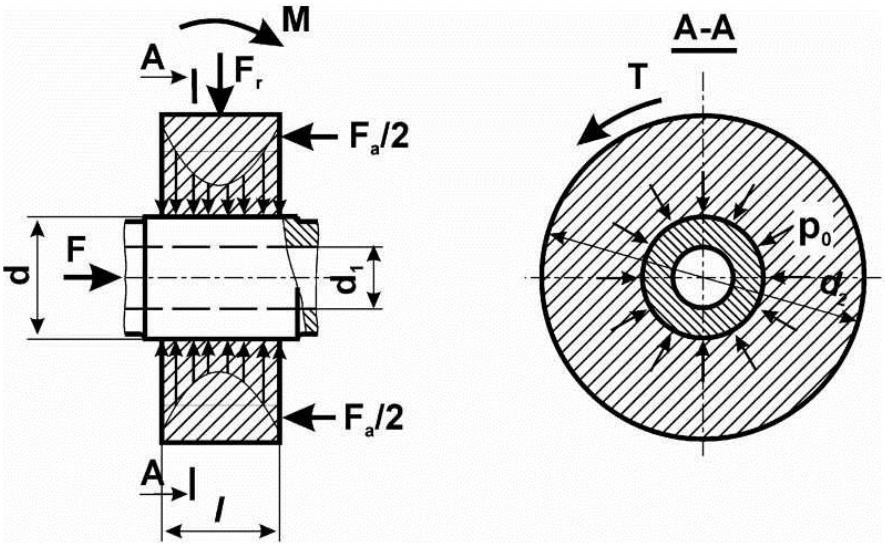
- запрессовкой под прессом;
- нагревом либо охлаждением одной из деталей;
- гидрозапрессовкой, т.е. нагнетанием масла под давлением в зону контакта с целью снижения силы запрессовки.

Соединение с натягом относится к разряду *полуразъемных*, которые допускают разборку, но в исключительных случаях, так как она может привести к частичному разрушению поверхности.

Любой вид внешней нагрузки, приложенной к соединению, методами механики может быть приведен к совокупности следующих четырех силовых факторов, действующих в лежащей на оси соединения точке симметрии:

- результирующая сила F_a, приложенная в направлении оси вращения;
- результирующий момент вращения T;
- суммарная радиальная сила F_r;
- суммарный момент изгиба M.

Пример такого соединения для общего случая нагружения приведен на рис. 4.2.1a,b. На рис. 4.2.1a дана также кривая распределения давления p, возникающего на поверхности контакта вследствие натяга, рассчитанная методами теории упругости (очевидно, что вследствие различий в жесткости давление на краях будет отличаться от давления в центре).



a) b)

Рис. 4.2.1

Расчет соединения с натягом по критерию несдвигаемости. Несущая способность соединения с натягом зависит как от величины, так и от характера внешней нагрузки. Например, при приложении осевой силы натяг может быть недостаточным, что приведет к сдвигу поверхностей в контакте. Для соединения это недопустимо, поэтому критерием расчета его несущей способности является отсутствие сдвига, т. е. критерий несдвигаемости. Такой же критерий используется в случае приложения момента вращения.

В качестве примера расчета соединения с натягом по критерию несдвигаемости рассмотрим контакт двух деталей цилиндрической формы (рис. 4.2.2). Для того чтобы обеспечить отсутствие сдвига, необходимо, чтобы сила трения в контакте была больше, чем внешняя результирующая сдвигающая нагрузка. Сила трения F_f определяется по формуле

$$F_f = \int_A pfdA\,, \qquad (4.2.1)$$

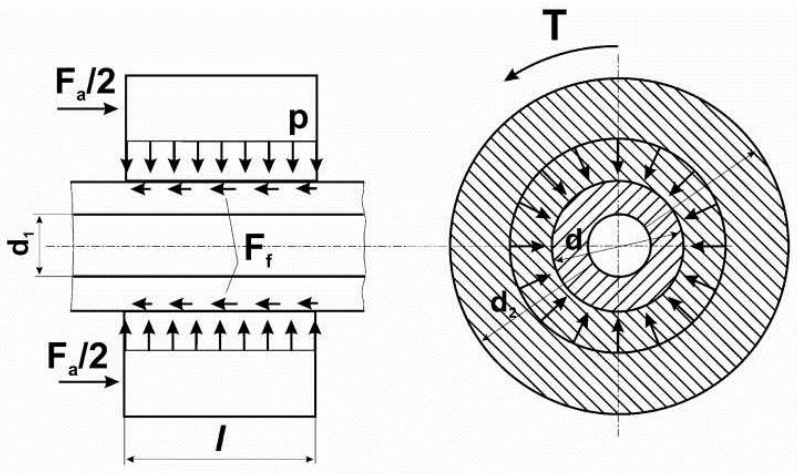


Рис. 4.2.2

где p — давление на поверхности контакта, dA и A — площадь элементарной площадки и полная площадь поверхности в контакте, f — коэффициент трения в контакте.

Дальнейшее рассмотрение основано на предположении о постоянстве давления в точках контакта, которое диктуется двумя обстоятельствами: во-первых, фактическая эпюра распределения давлений при больших натягах мало отличается от постоянной; во-вторых, расчет фактической картины распределения требует использования численных методов, которые трудно осуществить практически.

Итак, полагаем, что на поверхности контакта за счет натяга создано постоянное давление p. Тогда в результате интегрирования из (4.2.1) получаем

$$F_f = pf\pi dl. \tag{4.2.2}$$

Здесь d и l — соответственно диаметр цилиндрической поверхности и осевая протяженность контакта.

Очевидно, что условие несдвигаемости при приложении осевой силы F_a с учетом (4.2.2) запишется как

$$F_f = pf\pi dl \geq F_a,$$

откуда

$$p \geq \frac{F_a K_s}{\pi dlf} = p_0, \tag{4.2.3}$$

где p_0 — максимально допустимое значение давления, при котором нет неупругих относительных перемещений собранных деталей после приложения к ним внешней нагрузки; K_s — коэффициент запаса сцепления.

Если соединение воспринимает момент вращения T, то условие несдвигаемости приобретает вид

$$p\pi dlf\frac{d}{2} \geq T,$$

или

$$p \geq \frac{2TK_s}{\pi d^2 lf} = p_o. \tag{4.2.4}$$

При одновременном действии осевой силы F_a и момента вращения T расчет несдвигаемости рекомендуется выполнять так же, как для случая нагружения эффективной осевой силой F_s, величина которой определяется в результате векторного сложения внешней осевой F_a и окружной F_t (от момента вращения) сил, а именно

$$F_s = \sqrt{(F_a)^2 + (F_t)^2};\ F_t = \frac{2T}{d},$$

так что максимально допустимое давление в контакте равно

$$p_0 = \frac{F_s K_s}{\pi dlf}. \tag{4.2.5}$$

Из неравенств (4.2.3) — (4.2.4) видно, что несущая способность соединения с натягом при заданных материалах и геометрии деталей прямо пропорциональна коэффициенту трения f, поэтому результат расчета во многом зависит от правильности его выбора. Между тем задача выбора сложна, так как значение коэффициента трения зависит от многих факторов, и прежде всего от:

- технологии сборки;
- вида материала;
- чистоты обработки поверхности и наличия погрешности формы;
- давления в контакте;
- наличия на поверхности смазки.

Обычно при расчете соединений используют среднее значение коэффициента трения. Для определения числовых значений трения f можно воспользоваться данными таблицы 4.2.1, в которой приведены значения коэффициента трения в случае соединения с валом, изготовленным из стали.

Таблица 4.2.1. **Усредненные значения коэффициентов трения при расчете посадок с натягом**

Способ сборки соединения	Сталь	Чугун	Алюминиевые и магниевые сплавы	Латунь	Пластмассы
Механический	0,06 ÷ 0,13	0,07 ÷ 0,12	0,02 ÷ 0,06	0,05 ÷ 0,10	0,6 ÷ 0,5
Тепловой	0,14 ÷ 0,16	0,07 ÷ 0,09	0,05 ÷ 0,06	0,05 ÷ 0,14	—

К погрешности расчета приводит и тот факт, что давление по длине вала непостоянно. Неравномерность распределения давления существенно зависит от длины контакта, фактической геометрии деталей в соединении и погрешностей формы поверхностей сопряжения. Следует отметить, что учет вышеуказанных факторов достаточно сложен и не может быть реализован в рамках принятых допущений (см. приведенную на рис. 4.2.1 кривую распределения контактных давлений, полученную методами теории упругости).

В конечном итоге общая ошибка, допущенная в результате описанного расчета, в случае статического нагружения может быть скомпенсирована за счет правильного выбора коэффициента запаса сцепления, который можно принимать равным $K_s = 1{,}2 \div 1{,}4$.

В случае переменного нагружения при выборе f необходимо учитывать то обстоятельство, что натяг в соединениях, к которым приложена переменная нагрузка, ослабевает с течением времени. Происходит это потому, что переменный характер напряжений в контакте вызывает перераспределение давлений и, как следствие, их уменьшение. Подробно усталостные явления в контакте не изучены, а потому при расчетах для случая переменного нагружения рекомендуется уменьшить значения коэффициента трения примерно на $30 - 40$ %. Отметим, что, в связи с ослаблением натяга в течение времени действия переменной нагрузки, при таких режимах лучше использовать другие, более надежные методы крепления, которые будут описаны далее.

Перейдем теперь к задаче подбора посадки. Как уже говорилось, требуемое значение контактного давления в соединении должно быть обеспечено натягом,

полученным за счет разности диаметров вала и отверстия. Более подробно эта задача рассмотрена в главе 2.8. Там получена зависимость (2.8.20), связывающая давление и натяг для контакта двух толстостенных цилиндров. В принятых здесь обозначениях она имеет вид

$$p_o = \frac{\delta_c}{d\left(C_{01}/E_1 + C_{02}/E_2\right)}, \tag{4.2.6}$$

где δ_c — расчетный натяг; E_1, E_2 — модули упругости двух сопряженных деталей; C_{01}, C_{02} — некоторые постоянные величины, зависящие от геометрии и механических характеристик материалов и рассчитываемые по формулам

$$C_{01} = \left(d^2 + d_1^2\right)/\left(d^2 - d_1^2\right) - \mu_1;$$
$$C_{02} = \left(d_2^2 + d^2\right)/\left(d_2^2 - d^2\right) + \mu_2.$$

Для дальнейшего рассмотрения введем, помимо расчетного натяга δ_c, понятие измеренного натяга δ_i. Физический смысл этого понятия состоит в следующем. Любая поверхность после механической обработки имеет микронеровности, высота которых зависит от чистоты обработки этой поверхности. Числовой характеристикой оценки чистоты обработки поверхности, как было отмечено в главе 1.2, является параметр Ra. Величина измеренного натяга должна быть уменьшена на величину поправки на шероховатость, так как несущая способность погрешного слоя (под *погрешным слоем* понимается такой поверхностный слой поверхности, для которого не соблюдается условие сплошности) много ниже, чем сплошного материала. С учетом сказанного величина измеренного натяга δ_i складывается из расчетного натяга δ_c и поправки на шероховатость u:

$$\delta_i = \delta_c + u. \tag{4.2.7}$$

Величину поправки u рекомендуется определять по формуле

$$u = 5{,}5\left(Ra_1 + Ra_2\right), \tag{4.2.8}$$

где Ra_1 и Ra_2 — средние арифметические отклонения профиля микронеровностей посадочных поверхностей.

По величине измеренного натяга подбирается посадка с последующей проверкой статической прочности соединяемых деталей.

Вопрос расчета напряжений, возникающих в результате сборки, был рассмотрен ранее в главе 2.8, здесь лишь отметим, что прочность двух сопряженных деталей считается удовлетворительной, если эквивалентные напряжения σ_{e1} и σ_{e2} наиболее нагруженных точек не превышают пределов текучести σ_{t1} и σ_{t2} материалов рассматриваемых сопряженных деталей. При этом условие прочности вала имеет вид

$$\sigma_{e1} \le \sigma_{t1}, \tag{4.2.9}$$

а условие прочности детали с отверстием

$$\sigma_{e2} \le \sigma_{r2}. \qquad (4.2.10)$$

Эпюры напряжений сопряженных деталей (рис. 4.2.3) показывают, что наибольшие напряжения возникают на внутренней поверхности детали с отверстием. Согласно (2.8), наибольшие эквивалентные напряжения равны:

$$\sigma_{e2} = \sigma_t - \sigma_n = \frac{2p_o}{1-(d/d_2)^2}.$$

Тогда условие прочности (4.2.10) записывается в форме неравенства

$$\frac{2p_o}{1-(d/d_2)^2} \le \sigma_{r2}. \qquad (4.2.11)$$

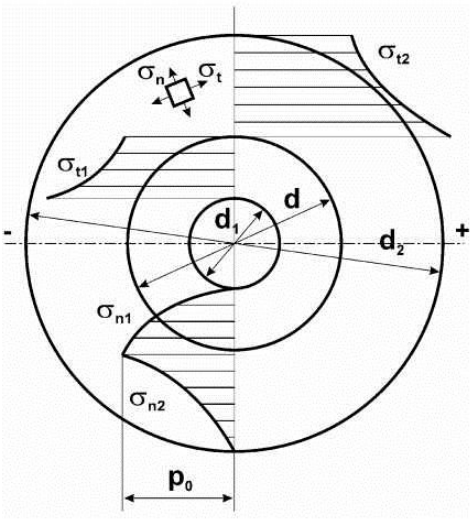


Рис. 4.2.3

Для вала проверка прочности в подавляющем большинстве случаев лишена смысла, так как напряжения на валу меньше, чем на сопряженной детали, кроме того, сам вал изготавливается из более прочного материала. В том случае, если такая необходимость есть, для проверочного расчета следует использовать формулу (2.8.16).

Расчет соединения с натягом из условия нераскрытия. Еще одним важным критерием расчета соединения с натягом является условие нераскрытия стыка.

Нагрузка в виде радиальной силы и момента изгиба может привести к появлению в соединении с натягом некоторого зазора. Поскольку такое положение недопустимо, следует определить максимальный натяг p_0, при котором не происходит возникновения зазора. Такой расчет на нераскрытие стыка можно выполнять отдельно для случая приложения радиальной силы F_r и для случая нагружения моментом изгиба M. При условии комбинированного нагружения искомый результат получается суммированием отдельных компонент.

а) Случай радиального нагружения. Расчетная схема, принятая для рассматриваемого варианта нагружения, изображена на рис. 4.2.4.

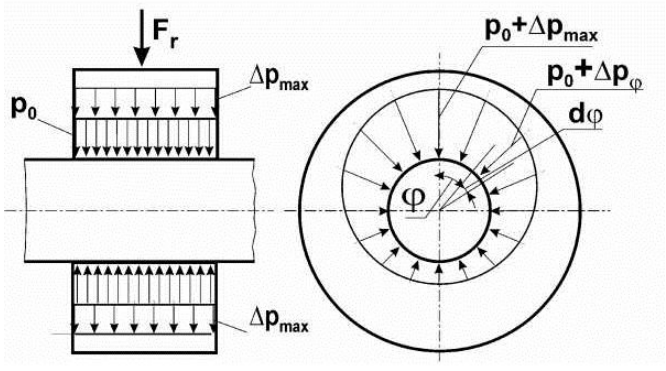


Рис. 4.2.4

После приложения рабочей нагрузки F_r в зоне контакта происходит перераспределение давлений. Для того чтобы получить числовые характеристики, описывающие закон распределения давлений по находящейся в контакте поверхности площадью A, можно воспользоваться уравнением равновесия. С этой целью под углом φ выделяем элементарную пло-

щадку, опирающуюся на угол $d\varphi$, давление на которой равно Δp_φ. Спроецировав нормальные силы, действующие на элементарные площадки, на направление приложения внешней нагрузки, получаем

$$F_r = \int_A \Delta p_\varphi \frac{d}{2} l \cos\varphi d\varphi . \qquad (4.2.12)$$

Если пренебречь погрешностями изготовления, а сопряженные детали считать абсолютно жесткими, то распределение давлений по дуге контакта может быть описано законом косинуса:

$$\Delta p_\varphi = \Delta p_{\max} \cos\varphi , \qquad (4.2.13)$$

где $\Delta p_{\max}$ — давление на наиболее нагруженной площадке. После подстановки (4.2.13) в (4.2.12) имеем

$$F_r = 4\Delta p_{\max} \frac{dl}{2} \int_o^{\pi/2} \cos^2\varphi d\varphi . \qquad (4.2.14)$$

Вычисляя интеграл в правой части (4.2.14) и разрешая полученное уравнение относительно $\Delta p_{\max}$, получаем выражения для наибольшего $\Delta p_{\max}$ и текущего Δp_φ давлений:

$$\Delta p_{\max} = \frac{2F_r}{\pi dl}; \quad \Delta p_\varphi = \frac{2F_r \cos\varphi}{\pi dl} . \qquad (4.2.15)$$

С учетом (4.2.15) окончательное выражение для описания условия нераскрытия при радиальном нагружении цилиндрического соединения с натягом принимает вид

$$\Delta p_{\max} \equiv \Delta p_F = \frac{2F_r}{\pi dl} \le p_0 . \qquad (4.2.16)$$

Из условия (4.2.16) и определяется то начальное давление p_0, которое не приведет к появлению зазоров в соединении с натягом.

b) Случай нагружения изгибающим моментом. При такой внешней нагрузке предполагается линейное распределение удельного давления по длине (рис. 4.2.5). Если под углом φ на расстоянии x выделить элементарную площадку размером $dx\,d\varphi$ и обозначить давление на ней через $\Delta p_{x\varphi}$, то элементарный момент dM_i от действующей на площадку нагрузки определится выражением

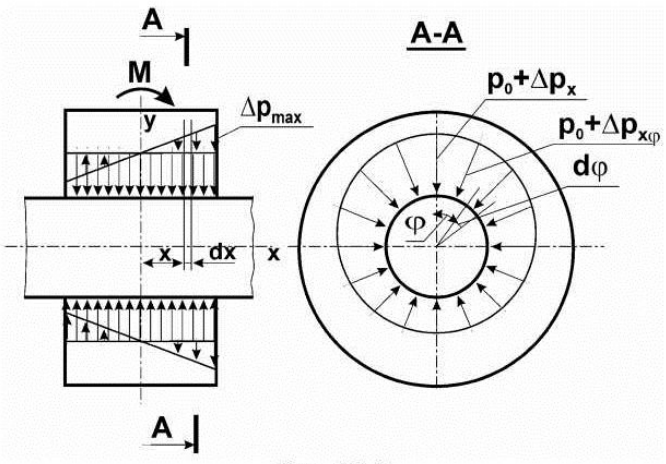


Рис. 4.2.5

$$dM_i = \Delta p_{x\varphi} \frac{d}{2} x \cos\varphi d\varphi dx . \qquad (4.2.17)$$

Величина полного момента получается интегрированием (4.2.17) по поверхности контакта:

$$M = 8\int_{o}^{l/2}\int_{o}^{\pi/2} \Delta p_{x\varphi} \frac{d}{2} x\cos\varphi d\varphi dx . \qquad (4.2.18)$$

Величину $\Delta p_{x\varphi}$ можно выразить через наибольшее давление $\Delta p_{\max}$. Принимая во внимание линейный характер распределения давлений по длине, $\Delta p_x = \Delta p_{\max} \frac{2x}{l}$, и косинусоидальный (4.2.13) — по дуге, имеем

$$\Delta p_{x\varphi} = \Delta p_{\max} \frac{2x}{l} \cos\varphi . \qquad (4.2.19)$$

Выражение (4.2.18) с учетом (4.2.19) может быть переписано в виде

$$M = 8\int_{o}^{l/2}\int_{o}^{\pi/2} \Delta p_{\max} \frac{dx^2}{l} \cos^2\varphi d\varphi dx . \qquad (4.2.20)$$

После интегрирования из (4.2.20) получаем

$$\Delta p_{\max} = \frac{12M}{\pi d l^2} \equiv \Delta p_M . \qquad (4.2.21)$$

В случае одновременного приложения силы и момента условие нераскрытия стыка, используя принцип суперпозиции, можно записать в форме

$$p_o - \Delta p_F - \Delta p_M \geq 0 , \qquad (4.2.22)$$

или

$$p_0 \geq \left[\frac{2F_r}{\pi d l} + \frac{12M}{\pi d l^2} \right] K_c , \qquad (4.2.23)$$

где p_0 — начальное давление, при котором в наиболее удаленных точках при приложении внешней нагрузки не появятся участки, свободные от нормальных давлений; K_c — коэффициент запаса по нераскрытию.

В заключение отметим, что выбор критерия расчета может быть сделан из сравнения значений величин натяга, рассчитанных из условий отсутствия сдвига и нераскрытия стыка. Окончательный расчет ведется по наибольшему из полученных давлений.

Кроме цилиндрических, с натягом могут быть установлены и конические соединения. При этом для малых углов конуса коническое соединение заменяется эквивалентным цилиндрическим, диаметр которого равен среднему диаметру конического соединения. В этом случае коническое соединение рассчитывается по той же методике, что и цилиндрическое. Такой подход к решению этой задачи будет оправданным в той степени, в которой угол конуса можно считать малой величиной.

Способы сборки соединения. Сборка соединений с натягом может быть выполнена:

- запрессовкой деталей под прессом (для цилиндрических соединений);
- тепловым способом (для цилиндрических и конических соединений).

При расчете прессового соединения определяется усилие пресса F_{ao}, необходимое для осуществления сборки. Очевидно, что

$$F_{ao} \geq \pi d l p_o f \,. \tag{4.2.24}$$

Здесь f — коэффициент трения при запрессовке (табл. 4.2.2).

Таблица 4.2.2. **Средние значения коэффициента трения при запрессовке**

Материал деталей соединения	f
Сталь — сталь	0,20
Сталь — чугун	0,14
Сталь — бронза, латунь	0,10
Чугун — бронза, латунь	0,08

При сборке соединения с использованием температурного деформирования определяют либо температуру t_1 охлаждения внутренней детали (вала), либо температуру t_2 нагрева внешней детали (отверстия). Выражение для определения t_1 имеет вид

$$t_1 = 20 - \frac{\delta_i + \Delta}{d\alpha}, \tag{4.2.25}$$

где α — коэффициент линейного расширения; Δ — технологический зазор, необходимый для облегчения сборки (табл. 4.2.3).

Температура t_2 рассчитывается по формуле

$$t_2 = 20 + \frac{\delta_i + \Delta}{d\alpha}. \tag{4.2.26}$$

Таблица 4.2.3. **Рекомендуемые значения Δ**

d, мм	30 ÷ 80	80 ÷ 180	180 ÷ 400
Δ, мкм	10	15	20

Заметим, что температурная сборка нагревом не всегда может быть реализована, так как при высокой температуре внутри металла могут произойти структурные превращения, которые, в свою очередь, способны вызвать изменение механических свойств материала.

4.2.2. Конические соединения

В некоторых случаях бывает необходимо производить сборку деталей не по цилиндрическим поверхностям, а по коническим. Такое соединение называется коническим.

Конические соединения используются для передачи момента вращения T посредством сил трения. Трение в соединении вызывается натягом, который создается либо такими же способами (т. е. механическим или тепловым), как и для цилиндрических поверхностей, либо осевым смещением, которое осуществляется затяжкой, например, с помощью гайки (рис. 4.2.6).

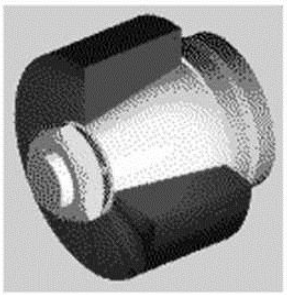


Рис. 4.2.6

Первый случай создания натяга рассмотрен выше, поэтому здесь мы остановимся более подробно на соединении, натяг в котором осуществляется усилием затяжки.

Для геометрической характеристики конических соединений вводится параметр конусности K, равный

$$K = \frac{d_{c2} - d_{c1}}{l} = 2tg\alpha,$$

где α — половина центрального угла конуса; d_{c1} и d_{c2} — минимальный и максимальный диаметры конического участка вала; l — длина контакта. Как правило, из технологических соображений угол конуса в соединении выполняется малым. По существующим рекомендациям, для различных видов конических соединений величина конусности K должна лежать в следующих диапазонах:

- для соединения с натягом $K = 1{:}30 \div 1{:}50$;
- для соединения с осевой фиксацией $K = 1{:}100$.

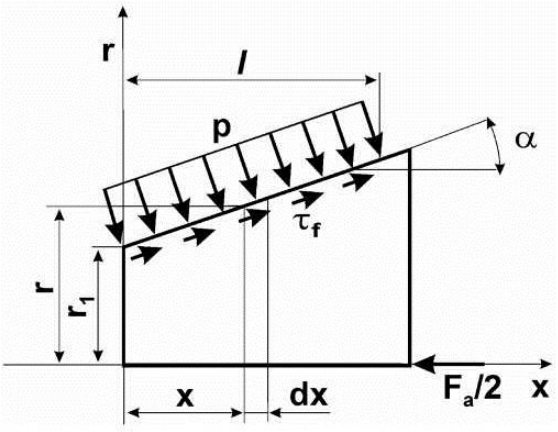


Рис. 4.2.7

Далее будет показано, что необходимая сила затяжки F_a пропорциональна углу конуса, следовательно, для малых углов она будет относительно малой. Согласно принятой для расчета модели (рис. 4.2.7), сила затяжки F_a вызывает на контактирующих поверхностях равномерно распределенное по длине нормальное давление p и распределенную силу трения τ_f. Если на расстоянии x от вершины выделить элементарный участок конической поверхности размером dx, то осевая проекция всех сил, действующих на элементарной площадке размером dA, равна

$$dF_a = p\sin\alpha\, dA + pf\cos\alpha\, dA = p(tg\alpha + f)\cos\alpha\, dA;$$

$$dA = 2\pi r\, dx/\cos\alpha = 2\pi(r_1 + x\,tg\alpha)dx/\cos\alpha, \qquad (4.2.27)$$

где r — радиус конуса на расстоянии x; $r_1 = d_{c1}/2$ — минимальный радиус вала в соединении.

Полная осевая нагрузка определяется интегрированием (4.2.27) по площади находящегося в контакте конического участка:

$$F_a = \int_0^l 2\pi p(tg\alpha + f)(r_1 + xtg\alpha)dx. \qquad (4.2.28)$$

После вычисления интеграла в правой части (4.2.28) и несложных преобразований получаем

$$F_a = 2\pi p l\left(r_1 + \frac{l}{2}tg\alpha\right)(tg\alpha + f) = \pi p l d_m(tg\alpha + f), \qquad (4.2.29)$$

где $d_m = \dfrac{d_{c1} + d_{c2}}{2}$ — средний диаметр конуса. Отсюда давления, вызванные силой затяжки, равны

$$p = \frac{F_a}{\pi d_m l(tg\alpha + f)}. \qquad (4.2.30)$$

Максимальный момент вращения, передаваемый соединением, с учетом (4.2.30) можно записать в виде

$$T_{\max} = \frac{p\pi d_m^2 lf}{2} = \frac{F_a f d_m}{2(tg\alpha + f)}.$$

Очевидно, что условие несдвигаемости сопряженных поверхностей записывается как

$$T_{\max} \geq T, \qquad (4.2.31)$$

откуда минимальная сила затяжки $F_{a\min}$, при которой приложение момента вращения T не приведет к относительному сдвигу контактирующих поверхностей, равна

$$F_{a\min} = \frac{2TK_s(tg\alpha + f)}{fd_m}. \qquad (4.2.32)$$

При выборе значения коэффициента запаса по сдвигу K_s необходимо принимать во внимание то обстоятельство, что давления в контакте не постоянны по величине из-за наличия погрешностей формы и разной жесткости в сечениях контактирующих деталей. Коэффициент трения также не постоянен. Эти и другие факторы влияют на значение момента трения и определяют в конечном итоге величину коэффициента запаса сцепления, которая, как уже упоминалось выше, по существующим нормам лежит в диапазоне $K_s = 1{,}2 \div 1{,}4$.

Кроме того, для определения максимальной силы затяжки $F_{a\max}$ следует выполнить проверку прочности наружной детали. Такая проверка, как и в случае со-

единения с натягом цилиндрических деталей, сводится к расчету эквивалентных напряжений. Условие отсутствия пластических деформаций согласно теории максимальных касательных напряжений (глава 2.7) с учетом (4.2.13) и (4.2.30) запишем в виде

$$\frac{F_{a\max}}{\pi d_m l(tg\alpha + f)} \cdot \frac{2}{[1-(d_m/d_2)^2]} \le \sigma_{r2}. \qquad (4.2.33)$$

В процессе сборки усилие затяжки следует контролировать динамометрическим ключом. Понятно также, что сила затяжки ослабевает со временем из-за местных пластических деформаций. С учетом этого начальную затяжку можно сделать несколько большей, чем $F_{a\max}$.

В случае одновременного приложения радиальной силы и изгибающего момента следует выполнять проверку условия нераскрытия по методике, использованной для расчета соединений с натягом цилиндрических деталей.

4.2.3. Соединения коническими кольцами

В соединениях коническими кольцами (рис. 4.2.8) натяг создается вследствие радиальной деформации конических колец, полученной за счет их осевого смещения гайкой. В зависимости от момента, который передается этим соединением, оно может быть выполнено либо в виде одной пары колец, либо в виде набора из нескольких пар. Осевое усилие, вызывающее осевое перемещение гайки, контролируется тарированным инструментом. Такое соединение способно воспринимать значительные осевые силы и моменты вращения. Внешний момент изгиба и радиальная нагрузка приводят к изменению характера распределения контактных давлений, но не влияют принципиально на перераспределение касательных сил.

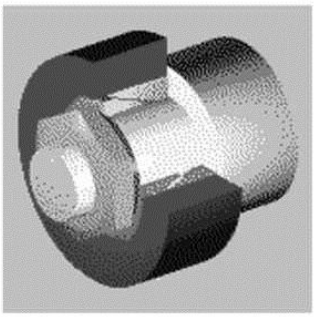


Рис. 4.2.8

Из-за конструктивных особенностей соединение коническими кольцами имеет ряд преимуществ по сравнению с другими соединениями такого типа, так как оно:

- легко собирается и разбирается;
- хорошо центрирует контактирующие детали;
- позволяет регулировать натяг при монтаже и в процессе работы.

Недостатком соединения являются его большие радиальные габариты. Кроме того, при изготовлении соединения коническими кольцами трудно обеспечить расчетный радиальный натяг.

Конические кольца выполняются из пружинных сталей. Размеры колец рекомендуется принимать равными

$$l = (0{,}17 \div 0{,}40)d; \quad s = (0{,}08 \div 0{,}125)d.$$

Здесь l и s — длина кольца и значение кольцевого зазора; $s = (D-d)/2$; D и d — диаметры отверстия и вала соответственно.

Расчет статических параметров при нагружении соединения, выполненного с помощью конических колец. Внешняя нагрузка в соединении коническими кольцами воспринимается благодаря силам трения, которые создаются вследствие нормального натяга в контакте. Задачу статического расчета такого соединения удобно решать, рассматривая не все кольцо в целом, а лишь его участок единичной ширины. Такая замена не приводит к потере общности (поскольку размеры сечения кольца много меньше его радиуса), и результат расчета будет таким же, что и для кольца в целом.

Предположим, что набор колец установлен на валу без радиального зазора (рис. 4.2.9). Если внешнее усилие, приложенное к паре колец, обозначить через F_0,

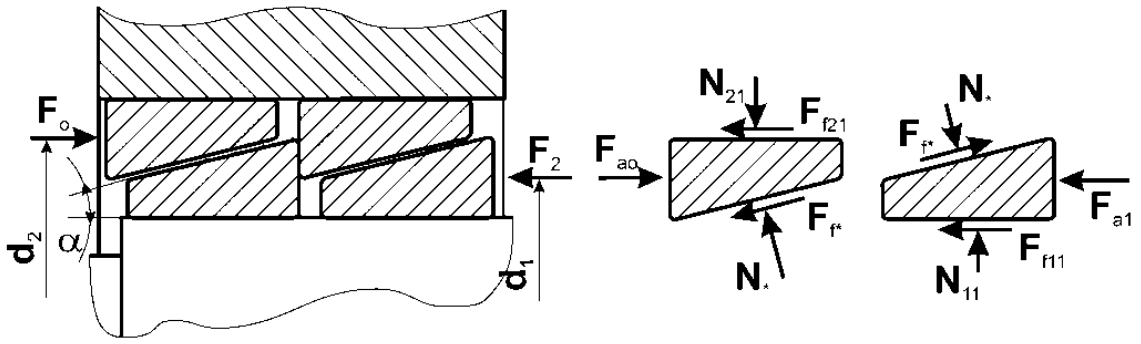


Рис. 4.2.9

а средний диаметр внешнего кольца — через d_{m1}, то сила, действующая на единицу ширины кольца, будет равна

$$F_{a0} = \frac{F_0}{\pi d_{m1}}. \tag{4.2.34}$$

Сила, приложенная к единице ширины с противоположной стороны этой пары, определяется как

$$F_{a1} = \frac{F_1}{\pi d_{m1}}, \tag{4.2.35}$$

где F_1 — сила реакции со стороны соседней пары колец.

Равновесие системы сил, действующих на пару колец при приложении к ней внешней нагрузки, записывается в виде

$$\left.\begin{aligned} F_{a0} - F_{a1} - F_{f21} - F_{f11} = 0 \\ N_{21} - N_{11} = 0 \end{aligned}\right\}, \tag{4.2.36}$$

где N_{11} и N_{21} — реакции вала и корпуса первой пары колец; $F_{f11} = N_{11} f_1$ и $F_{f21} = N_{21} f_2$ — силы трения, действующие по соответствующим поверхностям; f_1 и f_2 — коэффициенты трения пар внутреннее кольцо — вал и внешнее кольцо — корпус. Решая систему уравнений (4.2.36), получаем

$$\left.\begin{aligned} F_{a0} = F_{a1} + N_{21}(f_1 + f_2) \\ N_{11} = N_{21} \end{aligned}\right\},$$

или $$F_{a1} = F_{a0} - N_{21}\left(f_1 + f_2\right). \qquad (4.2.37)$$

Уравнения равновесия элемента ширины внешнего кольца:

$$\left.\begin{aligned} F_{a0} - F_{f21} - F_{f*}\cos\alpha - N_*\sin\alpha = 0 \\ -N_{21} - F_{f*}\sin\alpha + N_*\cos\alpha = 0 \end{aligned}\right\}. \qquad (4.2.38)$$

Так как $F_{f*} = f_* N_*$, где f_* — коэффициент трения между кольцами, то после несложных преобразований из (4.2.38) для силы реакции N_{21} имеем

$$N_{21} = \frac{F_{a0}\left(1 - f_* tg\alpha\right)}{f_2 - f_2 f_* tg\alpha + f_* + tg\alpha}. \qquad (4.2.39)$$

Вводя углы трения $\rho_* = arctg\, f_*$ и $\rho_2 = arctg\, f_2$, соотношение (4.2.39) можно переписать в виде

$$N_{21} = N_{11} = \frac{F_{a0}}{tg\rho_2 + tg\left(\alpha + \rho_*\right)}. \qquad (4.2.40)$$

Подстановка (4.2.40) в (4.2.37) дает выражение для осевой силы F_{a1}:

$$F_{a1} = F_{a0}\frac{tg\left(\alpha + \rho_*\right) - tg\rho_1}{tg\left(\alpha + \rho_*\right) + tg\rho_2} = \psi F_{a0}. \qquad (4.2.41)$$

Коэффициент ψ определяет долю внешней силы, которая передается на следующую пару колец. При $f_1 = f_2 = f_* = f$ он равен $\psi \approx \frac{tg\alpha}{tg\alpha + 2f}$. Угол конуса колец α исходя из условия отсутствия самоторможения рекомендуется принимать равным $\alpha = \left(14 \div 17\right)^0$. Реже применяют кольца с углом $\alpha = \left(3 \div 5\right)^0$, для которых характерно самоторможение.

Для демонтажа колец следует использовать демонтажные винты. Для группы колец, согласно (4.2.41), запишем

$$F_{a1} = \psi F_{a0}; \quad F_{a2} = \psi F_{a1} = \psi^2 F_{a0}; \quad F_{ai} = \psi F_{a(i-1)} = \psi^i F_{a0}. \qquad (4.2.42)$$

Здесь i — номер текущего кольца. Нормальная реакция в контакте

$$N_{21} = \frac{F_{a1}}{tg\left(\alpha + \rho_*\right) + tg\rho} = \frac{F_{a0}\psi}{tg\left(\alpha + \rho_*\right) + tg\rho};$$

$$N_{22} = \frac{F_{a2}}{tg\left(\alpha + \rho_*\right) + tg\rho} = \frac{F_{a0}\psi^2}{tg\left(\alpha + \rho_*\right) + tg\rho} = N_{21}\psi; \ldots;$$

$$N_{2i} = \psi^{i-1} N_{21}. \qquad (4.2.43)$$

Полное осевое усилие, которое может быть воспринято соединением из n пар колец, с учетом (4.2.42) определяется суммой

$$F_{a0} = \sum_{i=1}^{n} F_{ai} = F_{a1}\left(1 + \psi + \psi^2 + \ldots + \psi^{n-1}\right) = F_{a1}\sum_{i=1}^{n}\psi^{i-1} . \qquad (4.2.44)$$

Осевые составляющие, действующие на текущую пару колец, как следует из (4.2.44), вычисляются по формулам

$$F_{a1} = F_{a0}\Big/\sum_{i=1}^{n}\psi^{i-1};$$

$$F_{a2} = \psi F_{a0}\Big/\sum_{i=1}^{n}\psi^{i-1}; \ldots; \qquad (4.2.45)$$

$$F_{an} = \psi^{n-1} F_{a0}\Big/\sum_{i=1}^{n}\psi^{i-1}.$$

Очевидно, что допускаемый момент вращения T, который может быть передан пакетом из n пар колец, определяется суммированием элементарных моментов по длине дуги кольца. При условии $d_{m1} \approx d_{m2} = d$ он равен

$$T = T_1 + T_2 + \ldots + T_n = N_{11} f_1 \frac{\pi d^2}{2} \sum_{i=1}^{n}\psi^{i-1},$$

откуда после подстановки (4.2.34) и (4.2.40) получаем

$$T = \frac{F_0 f_1 d}{2\left[tg\rho_2 + tg(\alpha + \rho_*)\right]}\sum_{i=1}^{n}\psi^{i-1} . \qquad (4.2.46)$$

С учетом неизбежного рассеяния коэффициентов трения расчетное значение момента (4.2.46) следует умножить на коэффициент запаса сцепления K_s. Можно показать, что приращение величины передаваемого момента растет медленно, если только количество пар колец не превышает четырех. Это объясняется крайне неравномерным характером распределения нагрузки по кольцам. По этой причине не рекомендуется применять соединения с числом пар колец, бо́льшим четырех.

4.2.4. Шпоночные соединения

Ш п о н о ч н ы м называется соединение, при котором передача вращения осуществляется с помощью вспомогательной детали — ш п о н к и. В машиностроении используются следующие виды шпонок:

- призматические (рис. 4.2.10a);
- сегментные (рис. 4.2.10b);
- клиновые (рис. 4.2.10c)
- тангенциально-клиновые (рис. 4.2.10d);

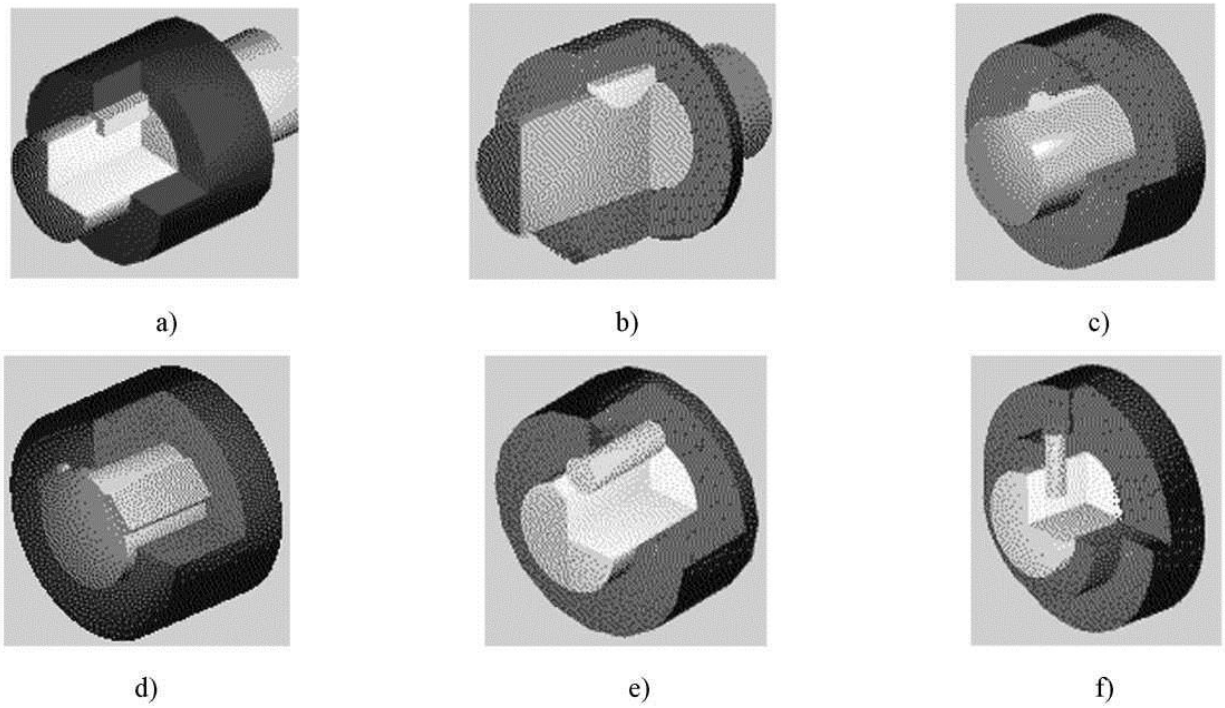


Рис. 4.2.10

- цилиндрические (рис. 4.2.10e);
- штифты (рис. 4.2.10f).

При применении *призматических, сегментных* и *цилиндрических* шпонок передача внешних моментов обеспечивается за счет нормального давления, действующего на поверхности шпонки в результате вращения. В случае использования *клиновой* шпонки передача момента происходит с помощью трения, возникающего между находящимся в контакте поверхностями шпонки вследствие радиального натяга. В тангенциально-клиновой шпонке радиальный натяг создается с помощью двух клиньев.

Иногда призматические шпонки используются в качестве направляющих осевого перемещения. Такой тип соединения называется *подвижным*.

Шпоночные соединения конструктивно просты, и этим можно объяснить их широкое распространение. Исключение составляют лишь клиновые шпонки, которые применяются крайне редко. Вызвано это тем, что после сборки клиновой шпонкой в соединении появляется существенный эксцентриситет, который вызывает возникновение динамической составляющей нагрузки, полученной в результате вращения. Поэтому такие шпонки используются только для медленно вращающихся малонагруженных валов. Для малонагруженных валов рекомендуется применять также и сегментные шпонки, поскольку они имеют малую по сравнению с призматическими площадь контакта. Заметим, что при прочих равных условиях именно сегментным шпонкам следует отдавать предпочтение по отношению к призматическим из-за их технологичности. Тангенциальные же шпонки нашли применение в тяжелом машиностроении при действии больших динамических нагрузок.

Недостатком шпоночных соединении является необходимость ручной подгонки при их сборке (кроме случая сегментных шпонок), а потому этот тип соединения

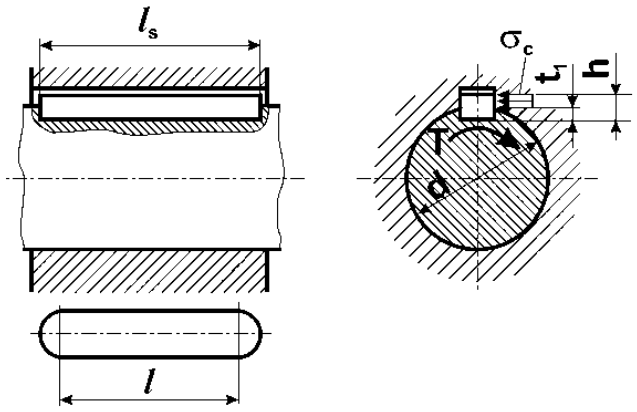


Рис. 4.2.11

целесообразно использовать в основном при мелкосерийном и единичном производстве.

Соединения призматической и сегментной шпонками.

а) Призматические шпонки. Призматические шпонки имеют прямоугольное сечение. Размеры поперечных сечений шпонок (в мм) в зависимости от диаметра вала, на котором они установлены, выбираются из следующего нормального ряда: 2×2; 3×3; 4×4; 5×5; 6×6; 8×7; 10×8; 12×8; 14×9; 16×10; 18×11; 20×12; 22×14; 25×14; 28×16; 32×18; 36×20; 40×22; 45×25; 50×28; 56×32; 63×32; 70×36; 80×40; 90×45; 100×50.

Конструктивно призматические шпонки выполняются с закругленными или прямыми краями, а также в смешанном варианте.

Расчет призматической шпонки сводится к определению нормальных контактных напряжений на боковой поверхности контакта. Очевидно, что эти напряжения не должны вызывать пластических деформаций, наличие которых на поверхностях участвующих в контакте деталей приводит к разрушению последних. Это проявляется в необратимом изменении геометрической формы. Подобное явление называется *смятием* (см. главу 4.1), а расчет на сопротивлению пластическому деформированию в контакте называют *расчетом на сопротивление смятию*.

Если предположить, что нормальные напряжения равномерно распределены по поверхности контакта (рис. 4.2.11), то из условия равновесия вала следует

$$10^3 \cdot T = \sigma_c (h - t_1) l \frac{d}{2}, \qquad (4.2.47)$$

где T — передаваемый соединением внешний момент вращения, [T]=[Н·м]; σ_c — нормальные напряжения в контакте; h — высота шпонки; $t_1 = 0{,}6h$ — глубина паза на валу; l — длина нагруженного участка шпонки ($l < l_s$, где l_s — полная длина шпонки); d — диаметр вала, на котором установлена шпонка. Напомним, что все линейные размеры выражаются в мм.

Очевидно, что условие отсутствия на поверхности контакта пластических деформаций, вызванных нормальными напряжениями, записывается в виде

$$\sigma_c = \frac{2 \cdot 10^3 T}{dl(h - t_1)} \le \sigma_{ac}, \qquad (4.2.48)$$

где σ_{ac} — допускаемое напряжение на смятие.

При проектировочном расчете из (4.2.48) вычисляют необходимую рабочую длину шпонки:

$$l \ge \frac{2 \cdot 10^3 T}{d\sigma_{ac}(h - t_1)}. \qquad (4.2.49)$$

С учетом коэффициента запаса величина допускаемого напряжения смятия σ_{ac} определяется пределом текучести σ_r и зависит от вида приложенной нагрузки и характеристик материалов контактирующих деталей. Значение σ_{ac} выбирается в расчете на наименее прочный материал из тех, что находятся в контакте. Для неподвижных соединений рекомендуется принимать:

$\sigma_{ac} = 0{,}80\sigma_r$ — при приложении постоянной нагрузки;

$\sigma_{ac} = 0{,}6\sigma_r$ — при приложении пульсационной нагрузки;

$\sigma_{ac} = 0{,}55\sigma_r$ — при приложении знакопеременной нагрузки.

В случае, когда наименее прочная деталь в шпоночном соединении выполнена из чугуна либо из алюминия и его сплавов, то $\sigma_{ac} = 80 \div 100$ МПа; для пластмасс целесообразно выбирать $\sigma_{ac} = 15 \div 25$ МПа. Если шпоночное соединение является подвижным, то величины допускаемых напряжений уменьшаются в два раза.

Причиной разрушения шпоночного соединения, помимо нормальных пластических деформаций, может быть пластический сдвиг (срез), вызванный наибольшими касательными напряжениями. Но если размеры поперечного сечения шпонки в зависимости от диаметра вала выбираются из нормального ряда, то выполнять такой расчет нет необходимости, так как условие прочности на срез в указанном случае выполняется автоматически.

Шпоночные соединения влияют на прочность вала, прежде всего на усталостную. Объясняется это тем, что шпоночный паз является концентратором напряжений, который может вызвать усталостное разрушение вала. Числовые значения коэффициента концентрации зависят от многих параметров и определяются экспериментальными методами или методом конечных элементов (МКЭ).

Таблица 4.2.4. **Нормальные размеры сегментных шпонок**

d_{min} мин. диаметр вала	d_{max} макс. диаметр вала	b ширина шпонки	h высота шпонки	l длина шпонки	t_1 глубина паза втулки	t глубина паза вала
3	4	1	1,4	3,8	0,6	1
4	6	1,5	2,6	6,8	0,8	2
6	8	2,5	3,7	9,7	1	2,9
8	10	3	6,5	15,7	1,4	5,3
10	12	4	9	21,6	1,8	7,5
12	17	5	10	24,5	2,3	8
17	22	6	13	31,4	2,8	10,5
22	30	8	15	37,1	3,3	12
30	38	10	17	50,8	3,3	13
38	40	12	19	59,1	3,3	16

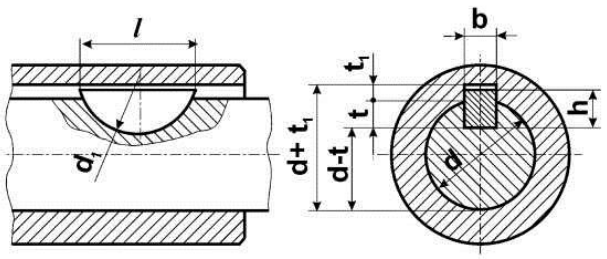


Рис. 4.2.12

b) Сегментные шпонки. Размеры сегментных шпонок (рис. 4.2.12) рекомендуется выбирать в соответствии с данными таблицы 4.2.4. Расчет сегментных шпонок проводится в форме проверочного и выполняется по той же методике и по тем же формулам, что и расчет на сопротивление смятию для призматических шпоночных соединений.

Соединения радиальной клиновой шпонкой. Клиновая шпонка представляет собой стержень прямоугольного поперечного сечения, одна из граней которого наклонена по отношению к основанию шпонки (рис. 4.2.13). В результате установки такой шпонки поверхности, находящиеся в контакте, нагружаются нормальным давлением, распределенным неравномерно по поверхности контакта. Передача внешней нагрузки в случае применения клиновой шпонки обеспечивается за счет сил трения.

В качестве критерия расчета принимаем условие несдвигаемости, согласно которому возникающие в соединении силы или моменты трения не допускают остаточных относительных смещений.

Для выполнения расчета необходимо знать значение нормальной силы N, приложенной к рабочей грани шпонки (рис. 4.2.14). Обозначим величину внешней осевой нагрузки, действующей на шпонку, через F_a, а угол наклона грани — через α. Тогда согласно уравнению равновесия клина искомая сила N равна

$$N = \frac{F_a}{tg\rho + tg(\alpha + \rho)}. \qquad (4.2.50)$$

Предельно допустимое осевое усилие, разумеется, должно быть ограничено условием, при котором отсутствуют пластические деформации в контакте участ-

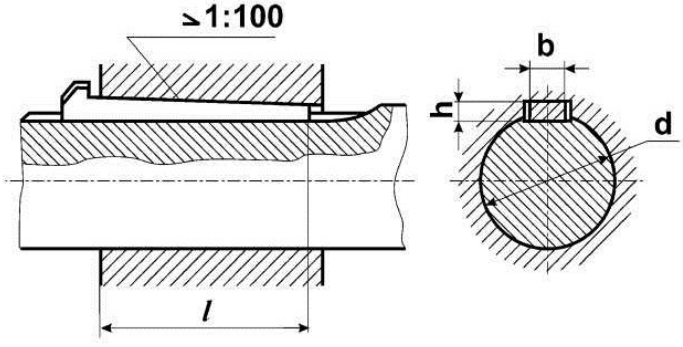


Рис. 4.2.13

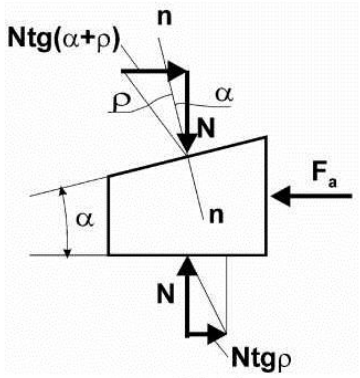
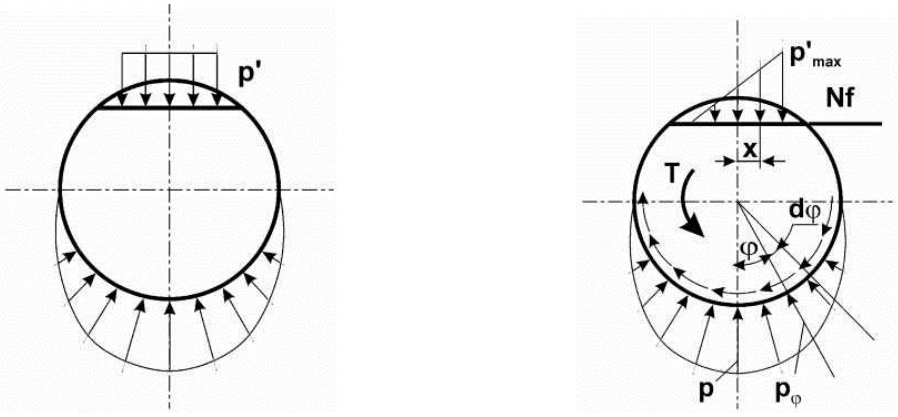


Рис. 4.2.14



a) b)

Рис. 4.2.15

вующих в сопряжении деталей. Следует различать два вида возможных напряженных состояний, а именно: без внешней нагрузки (рис. 4.2.15a) и с приложенной внешней нагрузкой (рис. 4.2.15b). В первом случае возникающие со стороны шпонки контактные давления можно считать равномерно распределенными по ширине шпонки, а во втором — линейно зависимыми.

На противоположной поверхности вала из-за силового воздействия шпонки также появляются распределенные по поверхности контакта нормальное давление p и сила трения. Если предположить, что жесткость деталей в контакте велика, то нормальное давление можно считать косинусоидально распределенным по поверхности, $p_\varphi = p\cos\varphi$. Тогда нормальная сила, приложенная к элементарной площадке поверхности вала с угловым размером $d\varphi$, расположенной под углом φ, выражается как

$$dN = p_\varphi \frac{d}{2} l d\varphi .$$

При этом условие равновесия вала с учетом принятого закона распределения давлений по дуге окружности записывается в виде

$$N = 2\int_0^{\pi/2} p\frac{d}{2} l\cos^2\varphi d\varphi = \frac{\pi}{4} pld , \qquad (4.2.51)$$

откуда наибольшее давление в контакте вала с отверстием

$$p = \frac{4N}{\pi ld} . \qquad (4.2.52)$$

Полный момент трения T в соединении складывается из момента T_f силы трения между цилиндрическими поверхностями контактирующих деталей, момента $Nf\left(\frac{d}{2}-\frac{h}{2}\right)$ силы трения между сопряженными поверхностями вала и шпонки и момента Nx нормальной силы, точка приложения которой смещена на расстояние x относительно центра симметрии шпонки:

$$T = T_f + Nf\left(\frac{d}{2}-\frac{h}{2}\right) + Nx . \qquad (4.2.53)$$

Определим значение момента трения T_f, распределенного по поверхности вала. Суммируя элементарные моменты по напряженной зоне (аналогично тому, как это было сделано при расчете нормального усилия от давления, распределенного по поверхности вала), получаем

$$T_f = 2\int_0^{\pi/2} p\frac{d^2}{4} lf\cos\varphi\, d\varphi = \frac{2Nfd}{\pi}. \qquad (4.2.54)$$

В выражении (4.2.53) без ограничения общности можно пренебречь величиной $\frac{h}{2}$ в сравнении с $\frac{d}{2}$ и отбросить слагаемое Nx ввиду его малости по отношению к остальным. Тогда при подстановке (4.2.54) в (4.2.53) получаем

$$T = 1{,}14\,Nfd. \qquad (4.2.55)$$

Величину нормальной силы N можно выразить через наибольшее нормальное давление в контакте между шпонкой и валом, которое, в свою очередь, находится из условия отсутствия в контакте пластических деформаций. Если предположить, что без внешней нагрузки давление p' в контакте на поверхности шпонки постоянно и равно $p' = \frac{N}{bl}$, где b — ширина шпонки (рис. 4.2.15), то при приложении момента вращения график нагрузки становится линейно возрастающим. Полагая далее, что для линейно возрастающего распределения минимальное давление $p'_{\min} = 0$, приходим к выводу

$$p'_{\max} = 2p' = \frac{2N}{bl}. \qquad (4.2.56)$$

Условие отсутствия пластических деформаций в контакте имеет вид

$$p'_{\max} \le \sigma_{ac}. \qquad (4.2.57)$$

Из (4.2.56) и (4.2.57) следует, что

$$N \le 0{,}5\sigma_{ac} bl, \qquad (4.2.58)$$

а величина максимально допустимого момента вращения $T_{\max}$ с учетом (4.2.58) и (4.2.55) равна

$$T_{\max} = 0{,}57\sigma_{ac} blfd. \qquad (4.2.59)$$

Допускаемое напряжение смятия σ_{ac} определяется так же, как и для обычного шпоночного соединения.

Соединение тангенциальной клиновой шпонкой. В шпоночном соединении этого типа натяг создается двумя установленными навстречу друг к другу односкосными клиньями с параллельными внешними гранями. Конструктивно такое шпоночное соединение может быть выполнено либо одной парой клиньев, либо двумя парами, поставленными под углом $\alpha = (120 \div 135)^0$ (рис. 4.2.16a,b). Между

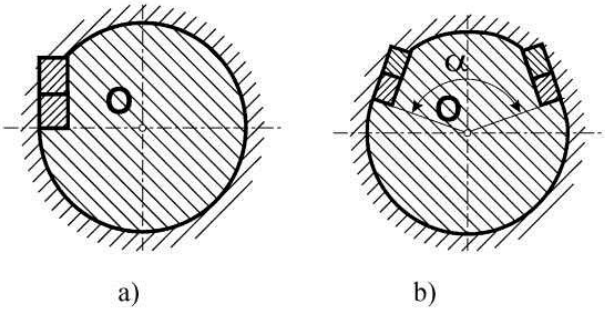


Рис. 4.2.16

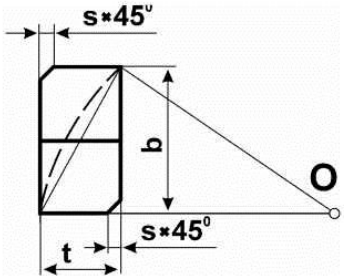


Рис 4.2.17

шириной паза b и его глубиной t устанавливают определенные соотношения, понятные из рис. 4.2.17.

Расчет соединения сводится к определению максимально допустимого момента $T_{\max}$, величина которого находится из условия отсутствия пластических деформаций на контактирующих поверхностях шпонки при нагружении ее внешней окружной силой F_t (рис. 4.2.18). Так же как и в случае радиальной клиновой шпонки, от действия клиньев на цилиндрической поверхности вала возникают нормальные давления, косинусоидально распределенные по дуге окружности контакта. Для случая одноклинового соединения из условия равновесия с учетом (4.2.54) имеем

$$T = F_t \frac{d}{2} + \frac{2F_t f d}{\pi}. \qquad (4.2.60)$$

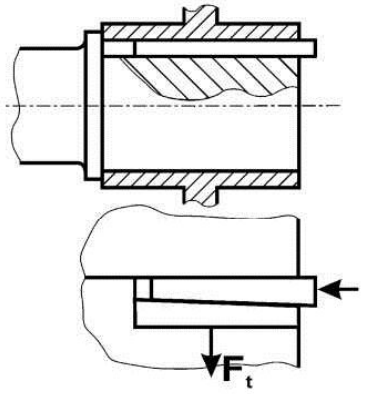


Рис. 4.2.18

Окружное усилие F_t вызывает на поверхности шпонки давление, которое в предположении равномерного распределения равно $p' = \frac{F_t}{tl}$, где l — длина находящегося в контакте участка шпонки. Записывая условие прочности на сопротивление смятию, $p' \le \sigma_{ac}$, с помощью (4.2.60) можно определить значение максимально допустимого момента $T_{\max}$:

$$T_{\max} \le 0{,}5\sigma_{ac} tld\left(1 + \frac{4f}{\pi}\right). \qquad (4.2.61)$$

Формула (4.2.61) аналогична (4.2.59), полученной ранее для радиальной клиновой шпонки.

4.2.5. Штифтовые соединения

В практике проектирования, помимо шпоночных, применяют также соединения, в которых вместо шпонок используют ш т и ф т ы — детали цилиндрической либо конической формы. Такие соединения называют ш т и ф т о в ы м и.

Общий случай расчета группы штифтов можно выполнить по методике, применяемой для резьбовых соединений, установленных в отверстие без зазора (глава 4.1). Здесь рассматривается ряд примеров использования штифтового соединения для передачи момента вращения.

a) Штифт расположен параллельно оси вращения (рис. 4.2.19). Соединение при этом обеспечивает передачу момента вращения T. Определим предельно допустимое значение $T_{\max}$ этого момента. При нагружении внешним моментом в продольном сечении штифта появляются касательные напряжения, которые не могут превышать значения предела текучести при сдвиге. Следовательно, значение предельного момента $T_{\max}$ определяется из условия, при котором в каждой точке опасного сечения возникают напряжения, равные по величине значению предела текучести при сдвиге τ_{as}. Если предположить, что касательные напряжения τ_s распределены по опасному сечению равномерно, то справедливо уравнение равновесия

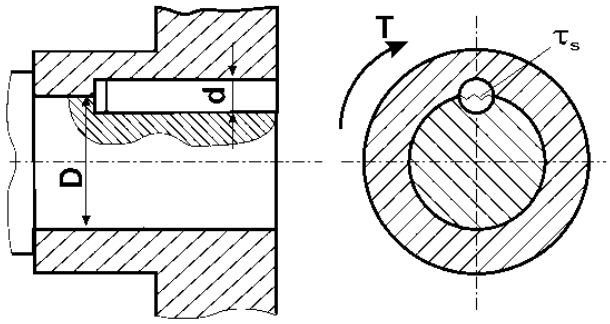


Рис. 4.2.19

$$\frac{2T_{\max}}{D} = \tau_s dl\,, \tag{4.2.62}$$

откуда

$$T_{\max} = 0{,}5\tau_s dlD\,. \tag{4.2.63}$$

Дальнейшее увеличение момента приведет к разрушению штифта по поверхности наибольших касательных напряжений — срезу. Допускаемое напряжение на срез τ_{as} определяется в зависимости от предела текучести. Для случая статического нагружения согласно (2.7.35) оно равно

$$\tau_{as} = 0{,}5\sigma_T\,. \tag{4.2.64}$$

С учетом (4.2.62) условие прочности на сопротивление срезу для осевого штифтового соединения можно записать как

$$\tau_s = \frac{2T}{Ddl} \le \tau_{as}\,. \tag{4.2.65}$$

b) Штифт установлен в радиальном направлении (рис. 4.2.20). Здесь каждая поверхность среза представляет собой круг. Как уже было сказано выше, в момент среза на этих поверхностях действуют касательные напряжения, равные пределу текучести при сдвиге. Тогда условие прочности на сопротивление срезу имеет вид

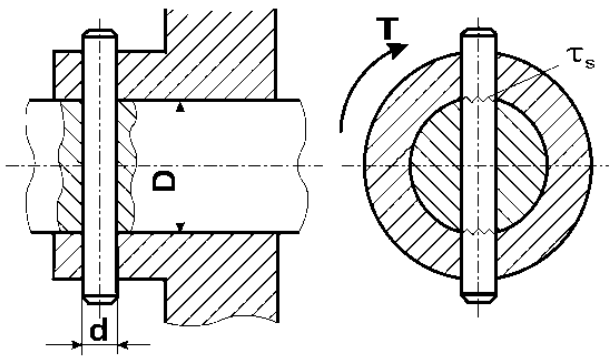


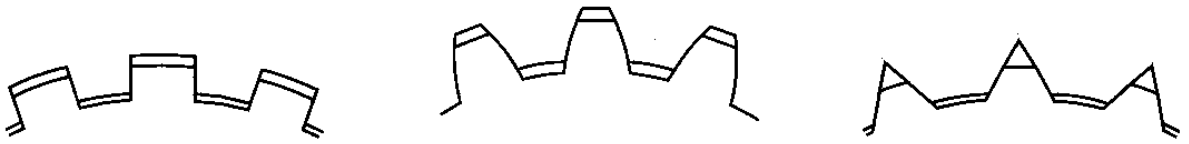
Рис. 4.2.20

$$\tau_s = \frac{8T}{D\pi d^2 k} \le \tau_{as}\,, \tag{4.2.66}$$

где k — число поверхностей среза.

4.2.6. Шлицевые (зубчатые) соединения

Шлицевые соединения используются в условиях крупносерийного и массового производства. Они способны передать гораздо бо́льшую нагрузку по сравнению со шпоночными. Соединения этого типа образуются выступами на валу и впадинами на ступице. При этом передача момента вращения обеспечивается за-



а) б) с)

Рис. 4.2.21.

цеплением. Шлицевые соединения технологичны. Их недостатком является наличие большой концентрации напряжений у основания зуба.

По форме выступа (зуба) различают три типа шлицевых соединений:

- прямобочные (рис. 4.2.21a);
- эвольвентные (рис. 4.2.21b);
- треугольные (рис. 4.2.21c).

a) Соединение с прямобочными зубьями (прямобочное шлицевое) представляет собой многошпоночное соединение, выполненное как единое целое с валом. Шлицевое соединение такого типа является наиболее распространенным в практике проектирования. Оно используется как для неподвижного соединения деталей, так и для случая, когда необходимо обеспечить относительное перемещение элементов соединения (подвижное соединение).

По нагрузочной способности прямобочные шлицевые соединения можно разделить на три серии: легкую, среднюю и тяжелую. Центрирование производится одним из следующих способов: по наружному диаметру, по внутреннему диаметру и по боковой поверхности. При этом соединение имеет минимальный зазор по тем поверхностям, по которым осуществлено центрирование, а другие участвующие в сопряжении поверхности имеют гарантированный зазор. Тот или иной тип центрирования выбирается исходя из технологических соображений и зависит от назначения соединения. Наибольшее распространение получили прямобочные шлицевые соединения, центрируемые по наружному диаметру.

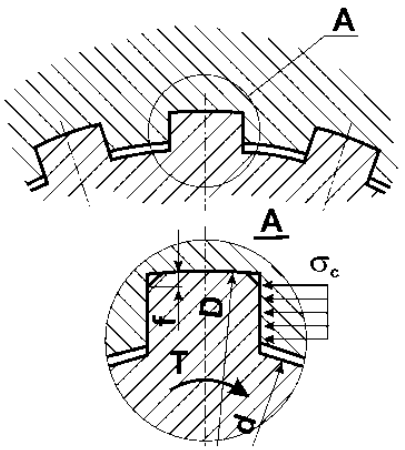


Рис. 4.2.22

Прямобочные шлицевые соединения характеризуются числом шлицев z, а также внутренним d и наружным D диаметрами шлицев и размером фаски f (рис. 4.2.22). Геометрические размеры таких соединений стандартизованы и приводятся в справочной литературе.

b) Соединение эвольвентными зубьями (эвольвентное шлицевое) характеризуется тем, что

боковая поверхность зуба и впадины очерчена участком эвольвенты. Этот тип соединения имеет более высокую прочность на изгиб и меньшую концентрацию напряжений у основания зуба, и, как следствие, обладает большей нагрузочной способностью при переменных режимах нагружения по сравнению с прямобочным шлицевым. Эвольвентное соединение технологично, так как оно изготавливается на стандартном зуборезном оборудовании. Как и зубчатые колеса, шлицевое соединение характеризуется числом зубьев z и модулем m. Угол зацепления эвольвентного шлицевого соединения в большинстве случаев выше, чем у обычного зубчатого, и доходит до 30^0. По сравнению с зубчатым зацеплением высота шлица существенно меньше и принимается равной модулю. Центрирование в этом случае выполняется, как правило, по боковой поверхности. Геометрические размеры эвольвентных шлицев стандартизованы.

c) Соединение треугольными зубьями используется в случае малых нагрузок (преимущественно в приборостроении). Обычно изготавливают мелкомодульные зубья с углом при вершине 60^0. Центрирование таких зубьев производится по боковой поверхности.

Основной причиной разрушения шлицевого соединения является появление пластических деформаций на боковой поверхности шлицев, т. е. их смятие. По характеру разрушения шлицевые соединения аналогичны шпоночным. Вообще говоря, шлицевое соединение можно рассматривать как многошпоночное с числом шпонок, равным z. Вследствие этого проектировочный расчет шлицевых соединений аналогичен расчету шпоночных. При этом предполагается, что каждый из шлицев воспринимает одинаковую по величине нагрузку, которая равномерно распределена по его длине. Такой упрощенный подход к расчету шлицевого соединения приводит к простейшим аналитическим зависимостям, но имеет малую точность, что вынуждает значительно увеличивать значение коэффициента запаса. Разумеется, в действительности распределение давлений по длине шлица зависит от многих факторов: погрешностей изготовления шлицев, вида внешней нагрузки и точки ее приложения, геометрии деталей сопряжения и т.д. Более точную картину такого распределения можно получить, решая контактную задачу с учетом точности обработки методом конечных элементов, но при этом расчет сильно усложняется. Однако в случае, когда длина шлица l удовлетворяет условию $l \le 1{,}5d$, допустимо учитывать неравномерность давления коэффициентом концентрации ψ, равным $\psi = 0{,}7 \div 0{,}8$.

Очевидно, что расчет на сопротивление пластическому деформированию не зависит от типа шлицевого соединения, и при принятых допущениях условие прочности может быть записано в виде

$$\sigma_c = \frac{2 \cdot 10^3 T}{d_m z l h \psi} \le \sigma_{ac}, \qquad (4.2.67)$$

где σ_c — нормальные напряжения в контакте; d_m — средний диаметр соединения; h — высота шлица, участвующая в контакте. Эти геометрические размеры шлица вычисляются в зависимости от типа шлицевого соединения. Например,

для прямобочных шлицев — $d_m = \frac{D+d}{2}$; $h = \frac{D-d}{2} - 2f$;

для эвольвентных — $d_m = mz$; $h = m$.

Следует отметить, что сильная зависимость нормальных напряжений σ_c шлицевого соединения от координат рассматриваемой точки на шлице приводит к тому, что в результате фактические напряжения оказываются существенно больше средних. Это обстоятельство можно учесть, если уменьшать допускаемые напряжения, увеличивая при этом коэффициенты запаса. Рекомендованные значения допускаемых напряжений σ_{ac} приведены в таблице 4.2.5.

Таблица 4.2.5. **Допускаемые напряжения σ_{ac} для неподвижных шлицевых соединений**

Термообработка шлицев	Допускаемые напряжения, МПа		
	при статической нагрузке	при переменной нагрузке	при ударной нагрузке
Улучшение $(HRC\ 30 \div 35)$	$80 \div 120$	$60 \div 100$	$35 \div 50$
Закалка ТВЧ; цементация $(HRC > 35)$	$120 \div 200$	$100 \div 140$	$40 \div 70$
Азотирование $(HV\ 900 \div 100)$	$60 \div 80$	$40 \div 60$	$30 \div 40$

В случае подвижного соединения величины допускаемых давлений уменьшают в два раза.

4.2.7. Профильные соединения

В таких соединениях поверхности, находящиеся в контакте, имеют фасонный профиль (рис. 4.2.23), что обеспечивает жесткое фиксирование деталей и передачу внешнего момента от одной детали вращения к другой. Наличие плавного профиля существенно снижает уровень концентрации напряжений по сравнению со шпоночными и шлицевыми соединениями. Поверхности сопряжения могут иметь произвольную форму, но по соображениям технологичности чаще всего они изготовляются *призматическими*. Призматическое профильное соединение имеет плоские грани, а их переходные участки очерчены дугами окружностей. Число граней соединения может быть произвольным, но в практике проектирования не применяют соединения с числом граней больше восьми (рис. 4.2.24). Такие соединения имеют высокую точность центрирования, но из-за сложностей изготовления профильной поверхности их применение существенно ограничено.

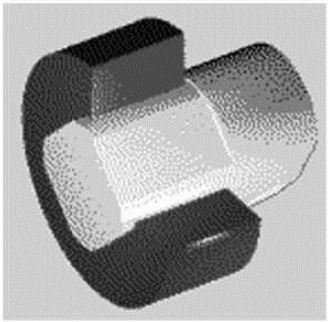


Рис. 4.2.23

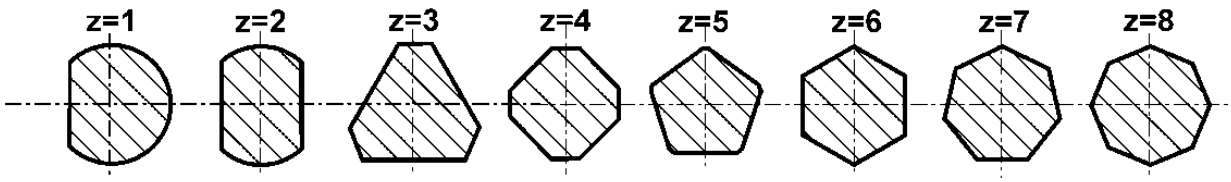


Рис. 4.2.24

Иногда кроме призматических применяют соединения с профилем, очерченным эллиптической кривой или дугами окружностей.

Методы расчета профильных соединений проиллюстрируем на примере призматических.

Внешние нагрузки нормальны к поверхности контакта и создают момент относительно центра вращения. Наибольших значений нормальные напряжения достигают на краях. Картина распределения контактных напряжений существенно зависит от погрешностей геометрической формы находящихся в контакте поверхностей. *Идеальным* назовем такое сопряжение, при котором величинами погрешностей в контакте допустимо пренебречь.

Рассмотрим такое идеальное профильное соединение (погрешности, связанные с ошибками модели, могут быть скомпенсированы соответствующим выбором допускаемых контактных напряжений, как это было сделано для шлицевого соединения). При идеальном контакте распределение нормальных напряжений по граням соединения можно считать линейным. Тогда уравнение равновесия можно записать как

$$10^3 \cdot T = z\int_0^s \sigma_{\max}\frac{y^2}{s}ldy = \frac{z\sigma_{\max}s^2 l}{3}, \qquad (4.2.68)$$

где T — величина передаваемого момента; $\sigma_{\max}$ — максимальное напряжение в контакте; z — число граней соединения; s и l — рабочая ширина и длина грани (рис. 4.2.25).

Проверочный расчет соединения сводится к определению из (4.2.68) максимального контактного напряжения $\sigma_{\max}$. Условие прочности по допускаемым напряжениям, как обычно, имеет вид

$$\sigma_{\max} = \frac{3\cdot 10^3 T}{zls^2} \le \sigma_{ac}. \qquad (4.2.69)$$

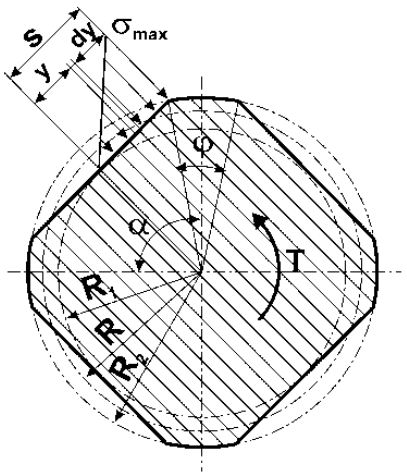


Рис. 4.2.25

Числовые значения допускаемого нормального напряжения на смятие σ_{ac} выбираются из условия отсутствия пластических деформаций на поверхности сопряженных деталей (см. расчет шпоночных соединений).

В формулу для определения контактных напряжений (4.2.69) входит величина рабочей ширины грани s. Рассчитаем эту величину. Прежде всего заметим, что сумма углов нерабочего участка про-

филя принимается равной $\varphi = 90^0$, следовательно, $\Delta\varphi = 90/z$; $\alpha = 360/z$. Введем обозначение $\beta = \dfrac{135}{z}$. Тогда радиус R_1 вписанной в многоугольник окружности —

$$R_1 = \frac{s}{tg\left(\dfrac{\alpha}{2} - \dfrac{\varphi}{2}\right)} = \frac{s}{tg\beta};$$

радиус R_2 описанной окружности —

$$R_2 = \frac{s}{\sin\left(\dfrac{\alpha}{2} - \dfrac{\varphi}{2}\right)} = \frac{s}{\sin\beta};$$

средний радиус R —

$$R = \frac{R_1 + R_2}{2} = \frac{s}{2}\left(\frac{1}{tg\beta} + \frac{1}{\sin\beta}\right). \qquad (4.2.70)$$

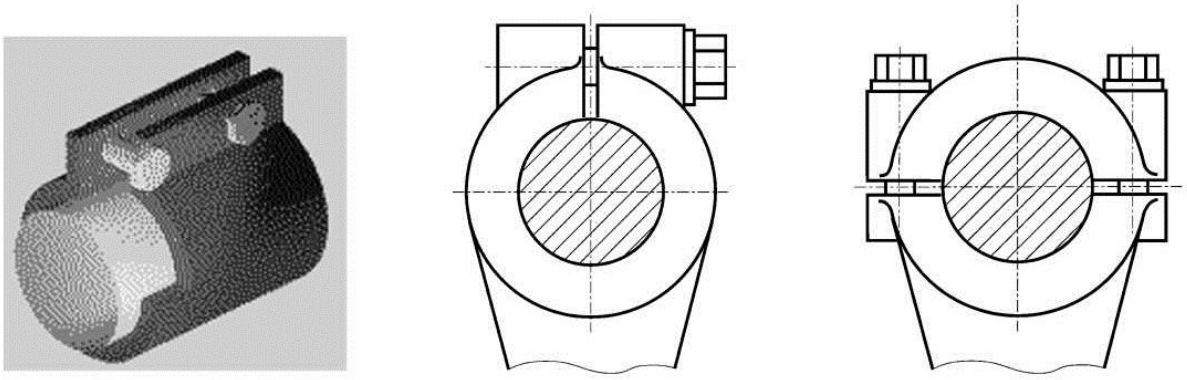
Разрешая (4.2.70) относительно s и подставляя найденное выражение в (4.2.69), получаем формулу для проверочного расчета:

$$\sigma_{\max} = \frac{3\cdot 10^3 T}{4zR^2 l}\left(\frac{1}{tg\beta} + \frac{1}{\sin\beta}\right)^2 \le \sigma_{ac}. \qquad (4.2.71)$$

Сравнивая (4.2.71) с (4.2.67), легко видеть, что профильные соединения имеют гораздо больший уровень нормальных напряжений по сравнению со шлицевыми. Это заставляет использовать их только для передачи малых моментов вращения.

4.2.8. Клеммовые соединения

Клеммовые соединения (рис. 4.2.26a) применяются для крепления деталей на валах и осях. Они выполняются с неразъемной или разъемной ступицей (рис. 4.2.26b, c). Неподвижность такого соединения обеспечивается посредством трения



a) b) c)

Рис. 4.2.26

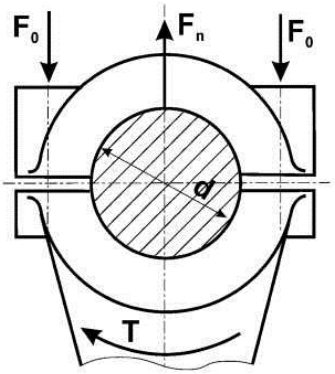


Рис. 4.2.27

на сопряженной поверхности клеммы. Трение в контакте, в свою очередь, возникает вследствие усилий затяжки резьбового соединения.

Клеммовые соединения просты в изготовлении, монтаже и демонтаже. Однако существенным недостатком таких соединений является их малая нагрузочная способность. При больших нагрузках соединения получаются громоздкими, и их применение считается неоправданным. Не рекомендуется также использование клеммовых соединений при высоких скоростях вращения вала, так как это может привести к появлению значительных динамических нагрузок.

Расчет клеммового соединения одинаков для любых видов клемм, но в сильной степени зависит от принятой расчетной модели. Рассмотрим вначале модель, при которой клемма считается абсолютно жесткой и установленной с зазором (рис. 4.2.27). В таком случае ее контакт с валом полагается линейным, а нормальные давления представляются равномерно распределенными по линии контакта. Условие отсутствия сдвига при приложении момента вращения для такой модели можно записать в виде

$$2F_0 fd \geq 10^3 \cdot T\,, \qquad (4.2.72)$$

где F_0 — сила затяжки винта; T — внешний момент трения; d — диаметр сопряжения; $f = 0{,}15 \div 0{,}18$ — коэффициент трения.

Условие несдвигаемости для случая приложения осевой силы F_a записывается как

$$4F_0 f \geq F_a\,. \qquad (4.2.73)$$

Предложенная выше расчетная модель является предельной. Можно также рассмотреть альтернативную предельную модель: клемма установлена на валу без зазора и считается податливой (рис. 4.2.28). Контакт с валом в таком случае принимается равномерным. Если предположить, что контактное давление постоянно и равно p, а ширину клеммы обозначить через b, то условия несдвигаемости при приложении нагрузок различных типов представляются в форме следующих неравенств:

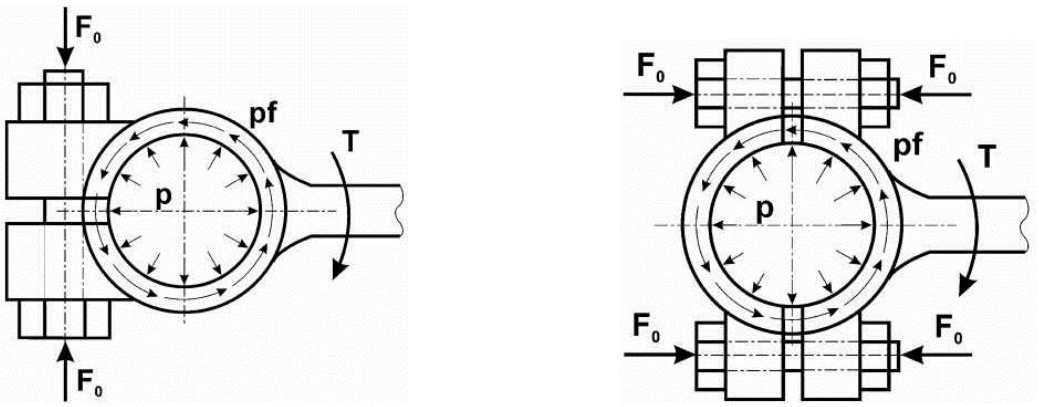


Рис. 4.2.28

- для случая приложения момента вращения T

$$0{,}5pf\pi dbd \geq 10^3 \cdot T \tag{4.2.74}$$

- для случая нагружения осевой силой F_a

$$pf\pi db \geq F_a . \tag{4.2.75}$$

Поскольку очевидно, что $p = \dfrac{2F_0}{bd}$, то выражения (4.2.74) и (4.2.75) соответственно принимают вид

$$\pi F_0 fd \geq 10^3 \cdot T \tag{4.2.76}$$

и

$$2\pi F_0 f \geq F_a . \tag{4.2.77}$$

Следует отметить, что как первая, так и вторая модели не отражают объективной картины, поскольку клемму нельзя считать ни абсолютно жесткой, ни абсолютно податливой. Полученные результаты следует рассматривать лишь как некоторые предельные решения. Реальную величину силы затяжки F_0, обеспечивающей передачу требуемого момента вращения T, для клеммы конечной жесткости рекомендуется рассчитывать по следующим формулам:

- при приложении момента вращения:

$$F_0 = \frac{10^3 \cdot TK_s}{2{,}5zfd}, \tag{4.2.78}$$

где $K_s = 1{,}3 \div 1{,}5$ — коэффициент запаса по сдвигу; z — число винтов, расположенных с одной стороны вала;

- при приложении осевой силы:

$$F_0 = \frac{F_a K_s}{5zf} . \tag{4.2.79}$$

В случае одновременного приложения осевой силы и момента вращения расчет на несдвигаемость выполняется по результирующей нагрузке F_{as}, значение которой определяется из выражения

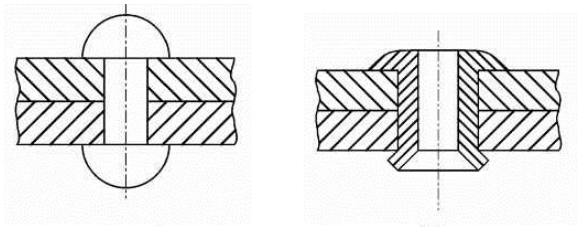
$$F_{as} = \sqrt{\left(\frac{2 \cdot 10^3 \cdot T}{D}\right)^2 + F_a^2} . \tag{4.2.80}$$

В заключение необходимо выполнить расчет прочности винтов. Под расчетом прочности винтового соединения понимается определение диаметра винта по известным величинам силы затяжки и внешней нагрузки с учетом материала винта. Такая задача была рассмотрена в главе 4.1.

РАЗДЕЛ 5. НЕРАЗЪЕМНЫЕ СОЕДИНЕНИЯ

Глава 5.1. Заклепочные соединения

Заклепочным называется неразъемное соединение деталей (как правило, листовых), выполненное с использованием вспомогательных элементов — заклепок. *Заклепка* представляет собой стержень круглого поперечного сечения с головками на концах. Она устанавливается в отверстие, имеющее несколько больший диаметр, нежели у самой заклепки, и в результате клепки специальным инструментом образуется плотное соединение (рис. 5.1.1a). Для облегчения сборки заклепка изготавливается из пластичного материала, а в отдельных случаях она может быть полой (рис. 5.1.1b).

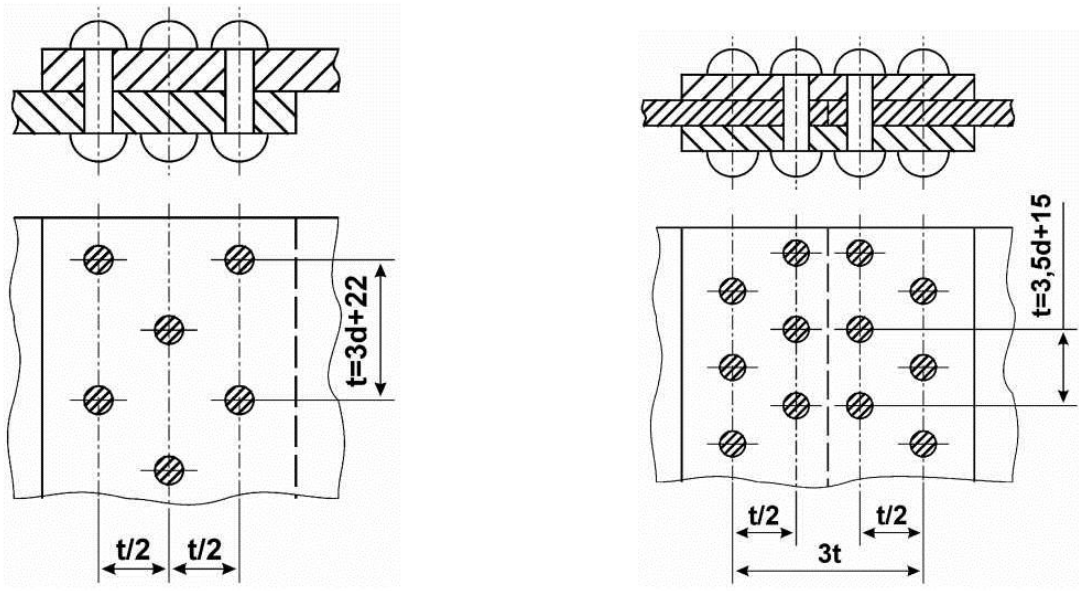


a) b)

Рис. 5.1.1

Использование заклепочных соединений существенно ограничено из-за того, что они нетехнологичны и металлоемки по сравнению со сварными. Главным образом заклепочные соединения применяются в самолето- и судостроении в таких конструкциях, которые нагружаются переменной во времени силой большой величины, особенно если нагрузка параллельна плоскости стыка, а также в тех случаях, когда соединяются детали, выполненные из не допускающих использование сварки материалов. В остальных случаях предпочтение целесообразно отдавать сварным соединениям.

По своему назначению заклепки бывают *силовыми* и *прочноплотными*. Силовое заклепочное соединение, применяемое обычно в металлоконструкциях, обеспечивает прочность, а прочноплотное, помимо прочности — и герметичность соеди-



a) b)

Рис. 5.1.2

нения за счет использования различных покрытий. Прочноплотные заклепочные соединения используются в котлах, резервуарах, топливных баках и т. д.

По конструктивному решению соединение может быть выполнено *внахлест* (рис. 5.1.2a) и *встык*, с использованием одной или двух прокладок (рис. 5.1.2b).

Заклепки, как правило, устанавливаются группами, образуя при этом заклепочные швы, выполненные внахлест. Количество и размеры заклепок определяются расчетом, однако не рекомендуется выбирать заклепки, диаметр d которых больше 10 мм.

Заклепки изготовляются из алюминиевых сплавов, сталей, латуни и меди, сплавов из них и т. д.

Расчет единичной заклепки. Методику расчета заклепочного соединения рассмотрим на примере изолированной заклепки.

Основной вид нагружения заклепочного соединения — силами и моментами, действующими в плоскости соединяемых деталей. Предположим, что внешняя сдвигающая сила F_s, приложенная к заклепочному соединению, действует в плоскости соединяемых листов и проходит через центр тяжести поперечного сечения заклепки. Разрушение соединения оказывается возможным в зоне действия наибольших касательных напряжений. Очевидно, что по характеру разрушения этот случай не отличается от случая расчета винтов, установленных в отверстие без зазора (см. главу 4.1).

Основной причиной разрушения заклепки является ее *срез*, вызванный высоким уровнем касательных напряжений τ_s. Условие прочности на сопротивление сдвигу (условие статической прочности) аналогично (4.1.21) записывается в виде

$$\tau_s = \frac{F_s}{A} = \frac{4F_s}{\pi d^2} \le \tau_{as}, \qquad (5.1.1)$$

где A — площадь заклепки, τ_{as} — допускаемое касательное напряжение при сдвиге.

Из условия прочности на срез (5.1.1) можно определить диаметр заклепки:

$$d \ge \sqrt{\frac{4F_s}{\pi\tau_{as}}}. \qquad (5.1.2)$$

Для соединения с двумя накладками срез может происходить по двум поверхностям. В таком случае при выполнении проектировочного расчета предполагается, что внешняя сила распределяется по поверхностям среза равномерно.

Допускаемое касательное напряжение τ_{as} при расчете статической прочности определяется из соотношения

$$\tau_{as} = 0{,}2\sigma_b. \qquad (5.1.3)$$

Соединения малой толщины, кроме того, следует проверить на отсутствие пластических деформаций в контакте от действия нормального давления на цилиндрической поверхности заклепки, т. е. на *смятие*. По аналогии с болтовыми соединениями, установленными без зазора, условие прочности заклепочного соединения имеет вид

$$\sigma_c = \frac{F_s}{d\delta} \le \sigma_{ac}, \qquad (5.1.4)$$

где δ — минимальное значение толщины соединяемых пластин.

Рекомендуемое значение допускаемого напряжение смятия при расчете статической прочности равно

$$\sigma_{ac} = (0{,}4 \div 0{,}5)\sigma_b\,, \qquad (5.1.5)$$

где σ_b — наименьшее значение предела прочности по отношению ко всем находящимся в контакте деталям.

В тех случаях, когда количество заклепок велико и отверстия под заклепками сильно ослабляют соединяемые листы, необходимо выполнить расчет прочности этих листов, например, методом конечных элементов.

С прочностью на смятие связывают и определение длины заклепки. Длину заклепки рекомендуется выбирать из следующего ряда: 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 32, 34, 36, 40, 42, 45, 48, 50, 52, 55, 58, 60, 65, 70, 75, 80, 85, 90, 95, 100, 110, 120, 130, 140, 160, 170, 180 мм.

В том случае, если заклепки работают в условиях действия переменных сил, расчет прочности на срез выполняется аналогично рассмотренному выше, а переменный характер нагружения учитывается умножением допускаемых напряжений на коэффициент γ, значение которого определяется в зависимости от приложенных к заклепке нагрузок по формуле

$$\gamma = \left(a - b\frac{F_{\min}}{F_{\max}}\right)^{-1} \le 1\,, \qquad (5.1.6)$$

где $F_{\max}$ и $F_{\min}$ — наибольшая и наименьшая по абсолютной величине нагрузки, действующие на заклепку; a и b — числовые коэффициенты, полученные экспериментальным путем. Значения этих коэффициентов равны $a = 1;\quad b = 0{,}3$ — для низкоуглеродистых сталей и $a = 1{,}2;\quad b = 0{,}8$ — для среднеуглеродистых сталей.

В заключение заметим, что расчет группового заклепочного соединения полностью аналогичен расчету группы винтов, рассмотренному в главе 4.1.

Глава 5.2. **Сварные соединения**

В сварных соединениях детали связаны между собой межатомными силами, которые появляются за счет местного нагрева свариваемых частей либо до состояния расплавления, либо до полной пластичности. Эти соединения являются *неразъемными*. Пример сварного соединения в рамной конструкции приведен на рис. 5.2.1.

Способы сварки можно классифицировать по различным признакам. Основными типами сварки являются сварка *плавлением, без нагрева* (*холодная, взрывом* и т. д.) и *комбинированная* — нагревом с последующей пластической деформацией *(контактная, газопрессовая* и др.).

В свою очередь, сварка плавлением по виду используемого источника нагрева делится на *газовую, электродуговую,* сварку *трением* и т. д. При *газовой* сварке нагрев соединяемых деталей и присадочного материала выполняется за счет сжигания газа. Такой способ наиболее часто используется для сваривания пластмасс. *Электродуговая* сварка среди способов сварки плавлением является наиболее распространенной. Источником тепла здесь является электрическая дуга, образуемая между электродом и свариваемыми деталями. Существенно улучшить качество сварного соединения можно за счет использования защитной среды, такой как флюс, инертные среды и т. д.

Контактная сварка осуществляется за счет нагрева металла при прохождении электрического тока через два электрода в форме роликов, цилиндров и т. п. По форме сварного соединения она бывает *точечная, роликовая, шовная, стыковая* и др. При *точечной* сварке соединение образуется в отдельных точках стыка, в то время как результатом *шовной* сварки является непрерывный шов. *Стыковая* сварка осуществляется путем разогревания стыка электрическим током и последующим сдавливанием разогретых деталей при отключенном источнике тока. Чаще всего соединения, выполненные контактной сваркой, встречаются в приборостроении.

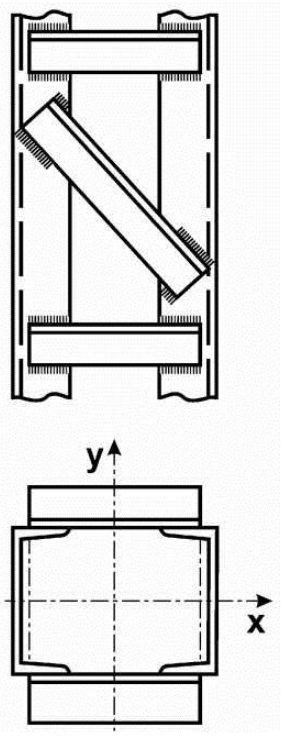


Рис. 5.2.1

В настоящее время сварные соединения являются наиболее распространенными по сравнению с другими типами неразъемных соединений вследствие их прочности, технологичности и экономичности. Применение сварных конструкций, например, взамен литейных, позволяет снизить массу последних более чем на 30%.

Разработана технология сварки конструкционных сталей, чугуна, медных, алюминиевых, титановых и других сплавов цветных металлов, а также некоторых пластмасс.

При использовании сварных соединений следует учитывать их недостатки:

- сварка приводит к изменению механических свойств основного металла в сторону их ухудшения из-за нагрева места шва;

- из-за неоднородного нагрева возникают остаточные напряжения и, как следствие этого, остаточные деформации;
- сварные соединения могут иметь существенную анизотропию свойств в сварном шве;
- в таких соединениях возникают местные напряжения, которые существенно влияют на прочность, особенно в условиях переменного нагружения;
- высокая концентрация напряжений и другие неблагоприятные факторы приводят к малой долговечности сварных соединений при переменной внешней нагрузке, особенно в условиях ударного нагружения;
- контроль качества сварного шва достаточно сложен и не всегда экономически оправдан.

Основные типы сварных соединений. По виду взаимного расположения свариваемых деталей сварные соединения бывают:

- ***стыковыми***, когда детали привариваются их торцевыми поверхностями (рис. 5.2.2). Эти соединения являются наиболее рациональными, так как их прочность равна прочности основного металла. Для практической реализации этих соединений, в зависимости от толщины δ, необходимо обработать соответствующим образом кромки соединяемых деталей (рис. 5.2.2a—h; δ приведено в мм). При этом форма обрабатываемых кромок способствует более успешному формированию сварного шва. Стыковой шов совпадает по форме с торцевым сечением свариваемых деталей.
- ***нахлесточными***, когда боковые поверхности частично перекрывают друг друга (рис. 5.2.3). Соединения этого типа выполняются угловыми швами, которые

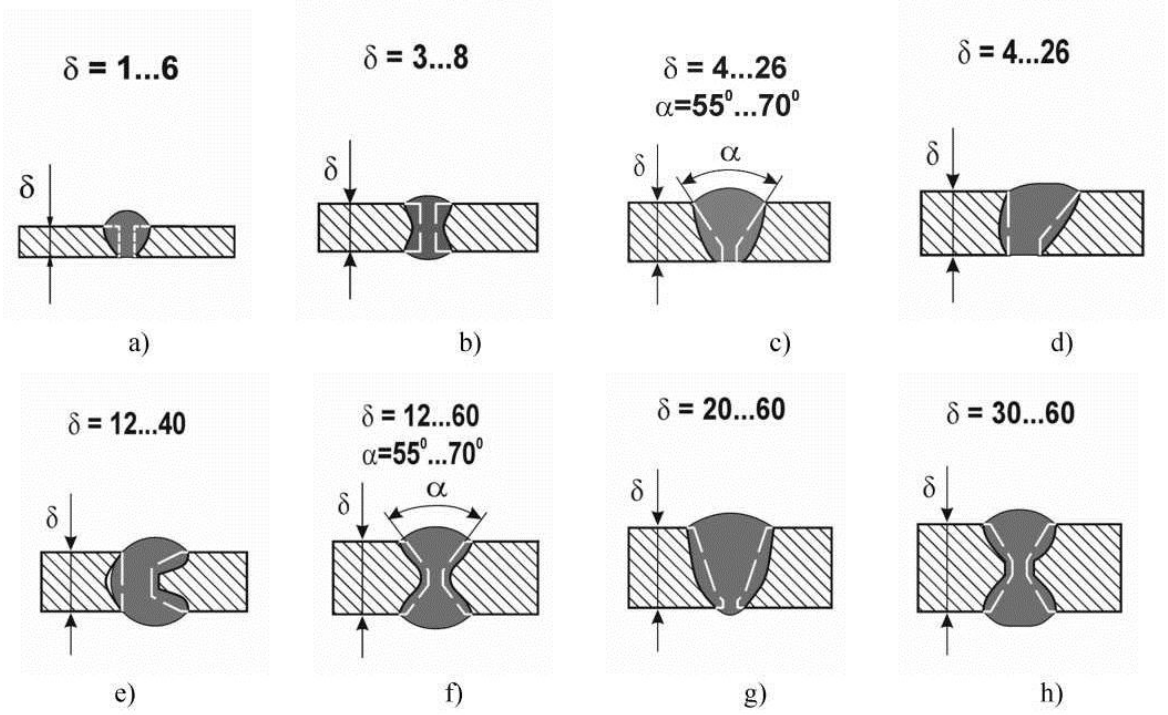
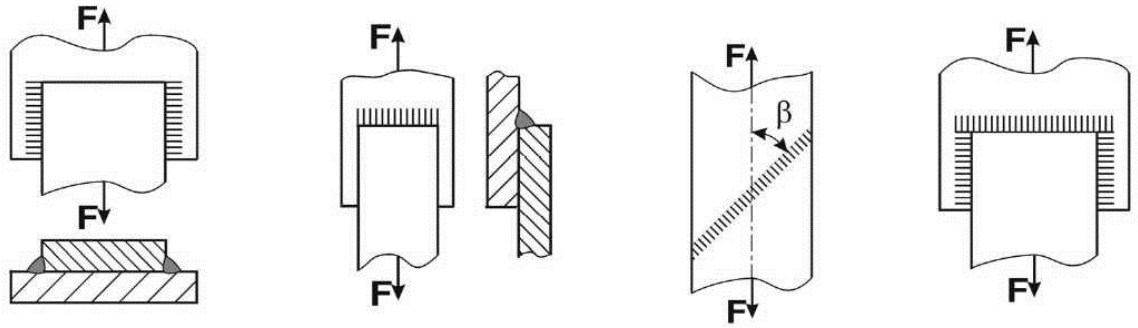


Рис. 5.2.2



a) b) c) d)

Рис. 5.2.3

имеют форму, близкую к равнобедренному треугольнику. В зависимости от расположения относительно внешней силы швы бывают:

— *фланговыми,* когда сила параллельна шву (рис. 5.2.3a);
— *лобовыми,* когда сила перпендикулярна шву (рис. 5.2.3b);
— *косыми,* когда сила наклонна относительно шва (рис. 5.2.3c);
— *комбинированными* — фланговыми и лобовыми (рис. 5.2.3d).

• ***тавровыми,*** когда соединяемые элементы перпендикулярны, или, очень редко, наклонны (рис. 5.2.4). Тавровые соединения могут быть выполнены как угловым (рис. 5.2.4a), так и стыковым швами (рис. 5.2.4b,c). Угловые швы могут быть расположены либо с обеих сторон (рис. 5.2.4a), либо с одной.

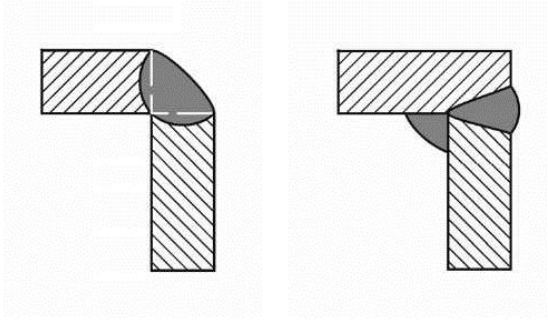
• ***угловыми,*** когда соединяемые элементы перпендикулярны или наклонны друг к другу и привариваются по кромкам (рис. 5.2.5). Такое сварное соединение представляет собой разновидность таврового, поэтому методики их расчета совпадают.

• ***точечной сваркой,*** которая, как правило, применяется для сваривания тонких деталей, нагруженных силовыми факторами в плоскости соединения (рис. 5.2.6a). Такое соединение не рекомендуется использовать для сваривания деталей толщиной более 3 мм. Точечная сварка используется для соединения прочных и вы-



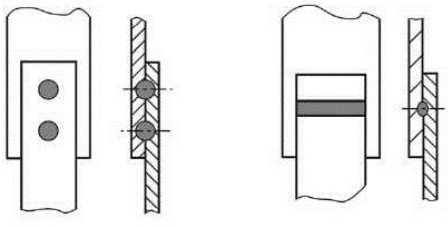
a) b) c)

Рис. 5.2.4



a) b)

Рис. 5.2.5



a) b)

Рис. 5.2.6

сокопрочных углеродистых сталей различных сплавов, особенно алюминиевых и титановых. Соединения точечной сваркой допускают наличие отрывающих сил, но нагружения такого вида по возможности следует избегать, так как при этом прочность соединения существенно снижается.

Если толщина свариваемых деталей более $2 \div 3$ мм, то точки заменяют сплошным швом (рис. 5.2.6b).

Расчет и проектирование сварных соединений при постоянной нагрузке. Методы расчета и проектирования сварного соединения при постоянной внешней нагрузке зависят от типа соединения, способа сварки и вида шва. При выполнении этих расчетов следует переходить от реального сварного соединения к модели, с той или иной степенью достоверности приближенно описывающей это соединение.

Модели, принятые для расчета сварных соединений при постоянной нагрузке. Кроме общих предположений, характерных для расчета прочности вообще, при построении моделей сварных соединений для выполнения приближенных инженерных расчетов принимаются некоторые дополнительные допущения, свойственные именно этому типу соединений:

- свариваемые детали считаются недеформируемыми, а сварные швы — напротив, податливыми;
- не учитываются концентрации напряжений, наличие которых характерно для мест резкого изменения формы, а расчет выполняется только по номинальным напряжениям;
- материал шва считается однородным и изотропным;
- деформации считаются малыми и пропорциональными напряжениям;
- сечения, которые до начала деформирования были плоскими, сохраняют форму.

Помимо перечисленных предположений, в дальнейшем мы будем опираться на *принцип суперпозиции*, или независимого действия сил, согласно которому суммарный результат воздействия на механическую систему определяется суммой воздействий каждого из силовых факторов.

Принятые допущения существенно облегчают задачу проектирования сварных соединений, позволяя разработать методы аналитического и автоматизированного расчетов произвольных схем размещений швов при произвольном нагружении.

Погрешности, которые возникают в рамках используемых моделей, следует учитывать введением коэффициентов запаса прочности. Существенная доля погрешности вносится предположением об абсолютной жесткости соединяемых деталей и податливости сварных швов. Особенно сильно это сказывается на проектировании сварных швов при сварке тонких деталей.

Отдельные допущения можно снять, если в качестве инструмента для выполнения расчета использовать МКЭ. Однако следует отметить, что МКЭ используется исключительно при выполнении проверочного расчета, для проведения которого необходимо знать геометрию соединения и хотя бы приближенные линейные размеры. С этой целью в качестве первого приближения для выполнения расчета можно использовать предлагаемые выше упрощенные инженерные методы, переходя затем к МКЭ.

Выбор допускаемых напряжений при расчете статической прочности сварных соединений. Расчет статической прочности сварных соединений мало чем отличается от расчета прочности деталей вообще. К особенностям следует отнести то, что величины допускаемых напряжений при расчете сварных соединений занижены по сравнению с аналогичными значениями, принятыми при расчете монолитных деталей. Рекомендованные значения допускаемых напряжений для сварных швов при статической нагрузке (по отношению к допускаемому нормальному напряжению при растяжении σ_{atr} основного материала) приведены в таблице 5.2.1.

Допускаемое напряжение при растяжении σ'_{atr} определяется как отношение предела текучести σ_T основного металла к коэффициенту запаса прочности n, $\sigma'_{atr} = \sigma_T / n$. Рекомендованные значения коэффициента запаса лежат в диапазоне $n = 1{,}3 \div 1{,}5$ (при сварке высокоуглеродистых и легированных сталей следует выбирать наибольшие значения коэффициента запаса из указанного диапазона). В случае, когда свариваются металлы с различными механическими свойствами, расчет допускаемых напряжений ведется для материала, обладающего наименьшим значением предела текучести.

Таблица 5.2.1. **Допускаемые напряжения для расчета статической прочности сварных соединений**

Тип сварки	Допускаемое напряжение для шва при растяжении σ'_{atr}	Допускаемое напряжение для шва при сжатии σ'_{ac}	Допускаемое напряжение для шва при сдвиге τ'_a
Сварка стыковая либо выполненная угловым швом, в защитной среде, ручная или автоматическая	σ_{atr}	σ_{atr}	$0{,}65\sigma_{atr}$
Сварка стыковая либо выполненная угловым швом, ручная	$0{,}9\sigma_{atr}$	σ_{atr}	$0{,}60\sigma_{atr}$
Сварка точечная	$0{,}3\sigma_{atr}$	$0{,}3\sigma_{atr}$	$0{,}5\sigma_{atr}$

Статическая прочность деталей, соединенных стыковым швом. Расчет статической прочности стыковых сварных соединений отличается от соответствующей процедуры для монолитных деталей (балок, рам, пластин и других деталей, не имеющих сварных швов) только выбором допускаемых напряжений. Приближенное решение задачи расчета статической прочности сварного шва сводится к последовательному выполнению следующих операций:

- определение центра тяжести геометрической фигуры, образованной стыковым швом, и положения главных осей;
- перенос точки приложения действующих силовых факторов в найденный центр тяжести, в результате которого задача расчета прочности сварного соедине-

ния сводится к задаче центрального нагружения этого соединения тремя силами F_x, F_y, F_z и тремя моментами M_x, M_y, M_z;

- расчет напряжений τ^i_{Fx}, τ^i_{Fy}, σ^i_{Fz}, σ^i_{Mx}, σ^i_{My}, τ^i_{Mz}, вызываемых каждым из силовых факторов в текущей i - ой точке сечения сварного шва;
- определение эквивалентных напряжений в текущей точке по одной из гипотез прочности, в результате чего получаем набор напряжений $\sigma_{e1}, \sigma_{e2}, \sigma_{e3}, \ldots, \sigma_{ei}, \ldots \sigma_{en}$, где n — полное число точек сечения сварного шва;
- анализ полученных напряжений и выбор наиболее напряженной точки, напряжение в которой равно $\sigma_{e\max} = \max(\sigma_{e1}, \sigma_{e2}, \ldots, \sigma_{ei}, \ldots, \sigma_{en})$;
- расчет коэффициента запаса статической прочности по наибольшим номинальным эквивалентным напряжениям.

Проиллюстрируем этот алгоритм на примере расчета шва тонкой трубы диаметром D и толщиной δ, нагруженной нормальной силой F, моментом вращения T и моментом изгиба M, который можно представить в виде проекций M_x и M_y на два взаимно перпендикулярных направления (рис. 5.2.7).

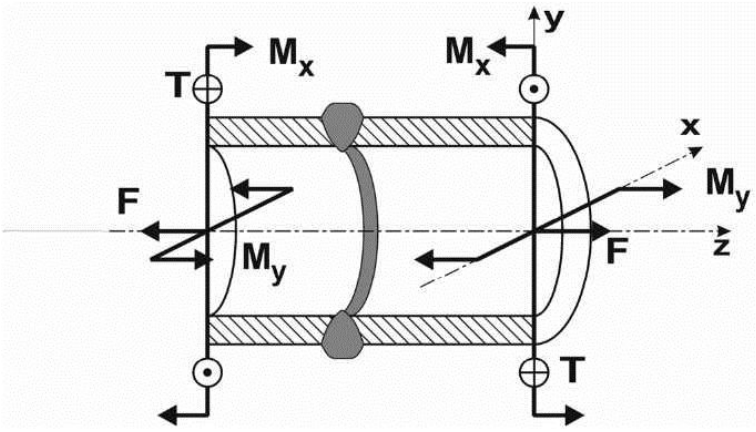


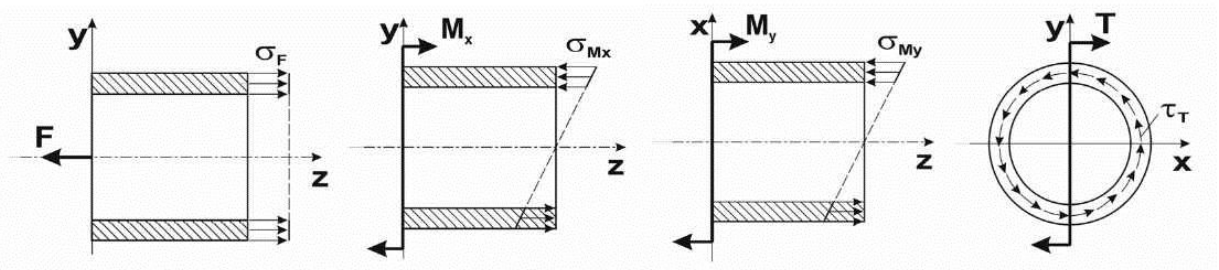
Рис. 5.2.7

Очевидно, что каждый из этих силовых факторов обуславливает появление напряжений, разных по физической сути. Обозначим компоненты напряжений как $\sigma_F, \sigma_{Mx}, \sigma_{My}$ и τ_T (индекс совпадает с обозначением силового фактора, который вызывает соответствующее напряжение — рис. 5.2.8a—d). Тогда для них справедливы формулы:

$$\sigma_F = \frac{F}{\pi D \delta}; \quad \tau_T = \frac{2T}{\pi D^2 \delta}; \tag{5.2.1}$$

$$\sigma_{Mx} = \frac{M_x y}{I_x} = \frac{8M_x y}{\pi D^3 \delta}; \quad \sigma_{My} = \frac{M_y y}{I_y} = \frac{8M_y x}{\pi D^3 \delta}. \tag{5.2.2}$$

Нормальные напряжения, возникающие вследствие приложения моментов изгиба в некоторой точке шва, зависят от расстояния рассматриваемой точки до соответствующей оси. Очевидно, что наибольшие по величине напряжения от этих моментов будут наблюдаться в точках с координатами $x = 0$, $y = D/2$ (от момента M_x) и $x = D/2$, $y = 0$ (от момента M_y), а нормальное напряжение от силы F и касательное от момента вращения T можно считать постоянными. Рассматривая теперь



a) b) c) d)

Рис. 5.2.8

всю совокупность точек шва, легко определить ту их них, которая является наиболее нагруженной. Величина эквивалентных напряжений σ_e для этой точки, согласно гипотезе наибольших касательных напряжений (см. главу 2.7), определяется как

$$\sigma_e = \sqrt{(\sigma_F + \sigma_M)^2 + 4\tau_T^2} \le \sigma'_a; \quad \sigma_M = \sqrt{\left(\frac{4M_x}{\pi D^2 \delta}\right)^2 + \left(\frac{4M_y}{\pi D^2 \delta}\right)^2}. \qquad (5.2.3)$$

Расчет прочности соединений встык сводится к определению коэффициента запаса прочности, т. е. представляет собой проверочный расчет. Если по результатам проверочного расчета статическая прочность оказывается неудовлетворительной, то следует увеличить площадь шва. В отдельных случаях можно в явном виде найти один из геометрических размеров при фиксированных остальных, например, в рассмотренном выше примере — толщину δ. К сожалению, такой возможный исход следует рассматривать скорее как исключение, а не как правило, поскольку в общем случае расчеты прочности по номинальным напряжениям могут быть выполнены только численными методами с использованием современных компьютерных программ.

В заключение следует подчеркнуть, что нужно стремиться к созданию равнопрочных соединений, для которых все точки сварного шва имеют равные напряжения. На практике это условие реализовать крайне трудно, но стремление к равнопрочности экономически целесообразно.

Расчет соединений, выполненных угловыми швами. Угловыми швами выполняются нахлесточные, тавровые и угловые соединения. Рассмотрим подробно особенности расчета каждого из этих соединений.

Вариант нахлесточного соединения с двумя *фланговыми угловыми* швами представлен на рис. 5.2.9. Геометрически угловой шов можно характеризовать *катетом* k (значение катета в машиностроительных конструкциях рекомендуется выбирать из диапазона $3 \le k \le 20$ мм). Для такого соединения характерно то, что разрушение углового шва происходит по наклонным сечениям $n-n$, проведенным под углом $\alpha = 45^0$, поскольку площадь сечения шва, расположенного под этим углом, минимальна. Напряженное состояние для сварных соединений такого типа можно интер-

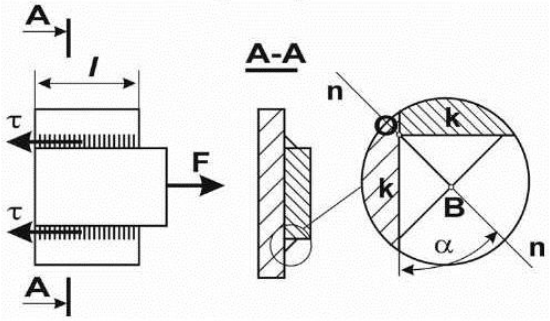


Рис. 5.2.9

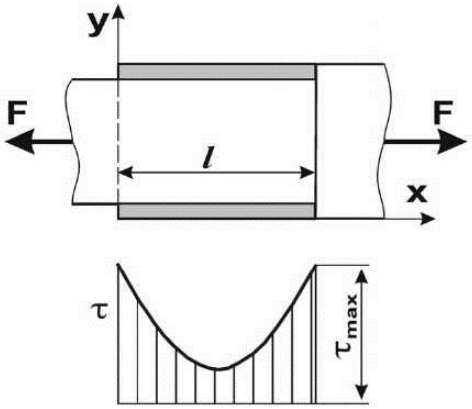


Рис. 5.2.10

претировать как чистый сдвиг, так как никаких других напряжений, кроме напряжений сдвига τ, здесь нет. Площадь опасного сечения, как следует из рисунка, равна $A = lk\cos\alpha$, где l — длина шва, следовательно, приближенное значение площади шва в опасном сечении при $\alpha = 45^0$ может быть определено по формуле $A \cong 0{,}7lk$.

Значение наибольшего касательного напряжения τ находится из уравнения равновесия, которое при условии постоянного характера распределения напряжения по длине шва имеет вид

$$0{,}7kL\tau = F, \qquad (5.2.4)$$

где $L = 2l$ — периметр сварного шва. Расчет на прочность в этом случае сводится к определению касательного напряжения $\tau_{\max}$ из (5.2.4) и сравнению его с допускаемым значением τ'_a, а именно

$$\tau = \tau_{\max} = \frac{F}{0{,}7kL} \le \tau'_a. \qquad (5.2.5)$$

Как правило, при изготовлении сварных соединений имеет место проплавление, что несколько увеличивает площадь сопротивления сдвигу. В этом случае в (5.2.5) вместо числового коэффициента $0{,}7$ можно брать $0{,}8$ и даже $1{,}0$, но такая замена требует дополнительных обоснований и на практике используется редко.

Напомним, что при записи формулы (5.2.4) предполагалось, что напряжения по длине шва распределены равномерно. Однако если отказаться от предположения абсолютной жесткости свариваемых деталей, то становится очевидным, что из-за неравномерности собственных деформаций деталей сопряженные с ними элементы шва нагружаются неравномерно. В качестве примера приведем аналитическое решение задачи расчета напряжений флангового шва, полученное для случая соединения двух пластин с равными поперечными сечениями (рис. 5.2.10). Аналитически это записывается в виде:

$$\tau = \frac{F\,a\left[ch(ax) + ch(a(l-x))\right]}{4k \cdot 0{,}7ch(al)},$$

$$a = \sqrt{\frac{4G}{EA}}, \qquad (5.2.6)$$

где x — координата текущей точки шва.

Очевидная неравномерность распределения напряжений, однако, игнорируется при выполнении приближенных расчетов, принятых в инженерной практике. Для того чтобы уменьшить неравномерность по длине флангового шва, не рекомендуется выполнять шов длиной более $60k$.

Более сложная картина распределения напряжений наблюдается при нагружении нормальной силой F *лобового* шва (рис. 5.2.11). Опасные сечения в этом случае нагружения также наклонены под углом $\alpha = 45^0$, однако в опасном сечении

кроме касательных напряжений действуют и нормальные. Кроме того, сам лобовой шов является сильным концентратором. При определении статической прочности расчет выполняется по номинальным напряжениям, а наличие концентратора учитывается только при переменных по времени нагрузках. Так как разрушение таких швов происходит по наклонным (под углом $\alpha = 45^0$) линиям, то в предположении равномерности нагружения шва по его длине из уравнения равновесия следует

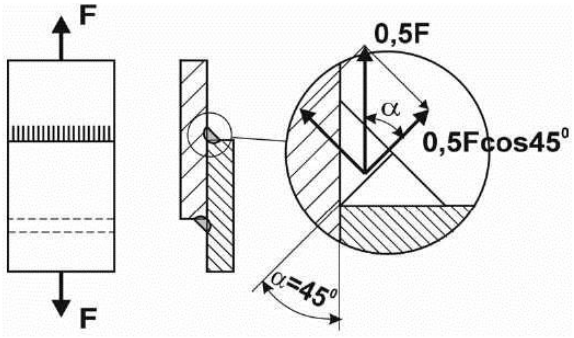


Рис. 5.2.11

$$\tau = \frac{F\cos\alpha}{0{,}7kL}; \qquad \sigma = \frac{F\sin\alpha}{0{,}7kL}. \tag{5.2.7}$$

Очевидно, что расчет статической прочности в условиях подобного нагружения следует проводить по эквивалентным нормальным напряжениям. Тем не менее и для лобовых швов применяется методика расчета, согласно которой учитываются только касательные напряжения, определяемые по тем же формулам (5.2.4) — (5.2.6), что и для фланговых. Такой приближенный подход назовем *методом учета касательных напряжений*. Применение этого метода основано на следующих допущениях:

- направление действия касательных напряжений считается совпадающим с плоскостью стыка, а ошибка, которая при этом получается, идет в запас прочности;
- действием нормальных напряжений в опасном сечении пренебрегаем.

Следует также отметить, что лобовые и фланговые швы в чистом виде встречаются крайне редко. Как правило, реальный шов является комбинированным. Кроме того, само разделение сварных швов на лобовые и фланговые носит чисто условный характер и используется только для демонстрации различий их напряженных состояний. Эти обстоятельства вынуждают унифицировать методику выполнения расчетов фланговых и лобовых швов. Поэтому в дальнейшем мы эти понятия не применяем, а при расчете касательных напряжений под величиной, стоящей в знаменателе (5.2.5), будем подразумевать общую площадь всех швов в опасном сечении.

В случае нагружения *нахлесточного* соединения моментом вращения, вызывающим напряжения сдвига, задача расчета прочности может быть решена с использованием методов, приведенных в главе 2.4 при рассмотрении кручения брусьев произвольной геометрической формы. Нахлесточное соединение в опасном сечении представляет собой тонкую полосу толщиной $\delta = 0{,}7k$, совпадающую по конфигурации со сварным швом. Следовательно, такое сечение можно представить как разомкнутое контурное, распределение касательных напряжений для которого описывается с помощью гидродинамической аналогии. При этом наибольшие касательные напряжения параллельны линии контура и определяются по формуле (2.4.40):

$$\tau_{\max} = \frac{3T}{\delta^2 \sum_{i=1}^{n} l_i}.$$

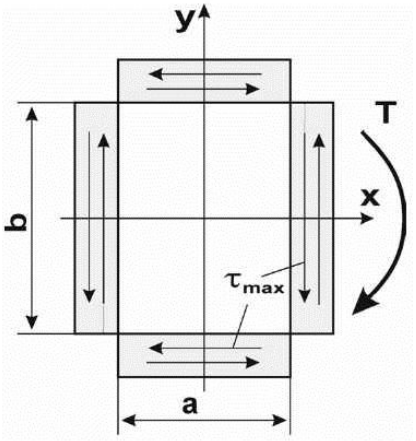


Рис. 5.2.12

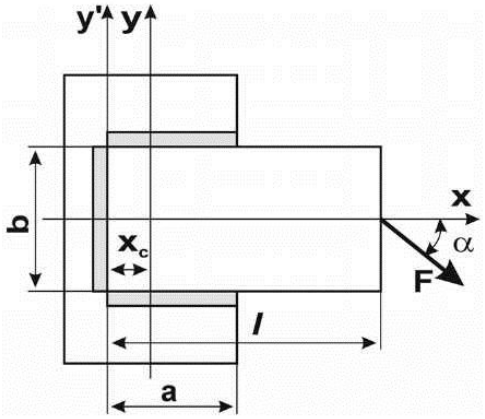


Рис. 5.2.13

Здесь $\delta = 0{,}7k$; $\sum_{i=1}^{n} l_i$ — полная длина сварного шва.

В качестве примера рассмотрим кручение сварного шва с геометрическими размерами a и b, нагруженного моментом вращения T (рис. 5.2.12). Условие статической прочности этого соединения можно записать в виде

$$\tau_{\max} = \frac{3T}{2(0{,}7k)^2(a+b)} \le \tau'_a, \tag{5.2.8}$$

откуда для катета имеем

$$k \ge \frac{1}{0{,}7}\sqrt{\frac{3T}{2\tau'_a(a+b)}}. \tag{5.2.9}$$

Рассмотрим еще один пример — крепление угловыми швами пластины, нагруженной нецентральной силой F (рис. 5.2.13).

При таком способе нагружения сварной шов в опасном сечении несимметричен, поэтому решение задачи целесообразно начать с переноса всех силовых факторов в центр тяжести сечения, координата которого определяется по формуле (2.3.3):

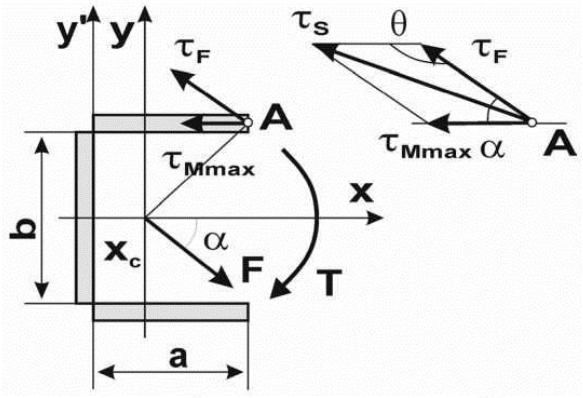
$$x_c = \frac{S_{y'}}{A} = \frac{0{,}7k\,a\left(\frac{a}{2}\right)\cdot 2}{0{,}7k(2a+b)} = \frac{a^2}{(2a+b)}.$$

В результате приведения приходим к эквивалентному нагружению, которое по своему силовому воздействию равноценно исходному (рис. 5.2.14). Каждый из изображенных силовых факторов приводит к возникновению напряжений, которые можно рассматривать независимо друг от друга. Согласно принятым ранее предположениям полагаем, что касательное напряжение от внешней силы направлено противоположно приложенной силе, постоянно по величине и равно

$$\tau_F = \frac{F}{0{,}7k(2a+b)}. \tag{5.2.10}$$

Напряжение, вызванное действием момента вращения T, параллельно направлению шва. Его наибольшее значение определяется по формуле

$$\tau_{M\max} = \frac{3F(l - x_c)\sin\alpha}{(0{,}7k)^2(2a+b)}. \quad (5.2.11)$$



a) b)

Рис. 5.2.14

Из всей совокупности точек сварного шва следует выбрать наиболее нагруженные, которые и являются предметом дальнейшего рассмотрения. Очевидно, что к числу наиболее нагруженных точек следует отнести и точку A (рис. 5.2.14a), поскольку угол между векторами напряжений здесь наименьший, и, следовательно, сумма от сложения компонент напряжений должна быть максимальной (результат сложения двух векторов $\vec{\tau}_s = \vec{\tau}_{M\max} + \vec{\tau}_F$ показан на рис. 5.2.14b).

Модуль τ_s результирующего вектора по теореме косинусов равен

$$\tau_s = \sqrt{\tau_{M\max}^2 + \tau_F^2 - 2\tau_{M\max}\tau_F\cos\theta}\,, \quad (5.2.12)$$

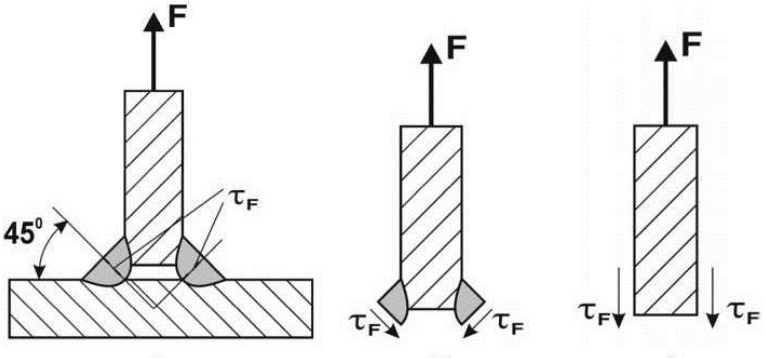
где $\theta = 180^0 - \alpha$. Тогда условие прочности имеет вид

$$\tau_s = \sqrt{\left(\frac{6T}{(0{,}7k)^2 L}\right)^2 + \left(\frac{F}{(0{,}7k)L}\right)^2 + 2\left(\frac{6T}{(0{,}7k)^2 L}\right)\left(\frac{F}{(0{,}7k)L}\right)\cos\alpha} \le \tau'_a. \quad (5.2.13)$$

Формула (5.2.12) записана в общем виде, так как согласно главе 2.1 любое нагружение, независимо от числа приложенных силовых факторов, можно свести к эквивалентному нагружению главным вектором сдвигающих сил, приложенным под некоторым углом в центре тяжести шва, и главным моментом вращения.

Расчет тавровых соединений. Методы расчета тавровых соединений, выполненных угловыми швами и сваркой встык, принципиально различаются.

Рассмотрим вначале действие центральной силы на тавровое соединение с угловым швом (рис. 5.2.15). При таком варианте внешнего нагружения разрушение сварного соединения начинается в точках, лежащих на плоских площадках, расположенных под углом в 45^0 (рис. 5.2.15a), так как площадь сопротивления нагружению здесь минимальна.



a) b) c)

Рис. 5.2.15

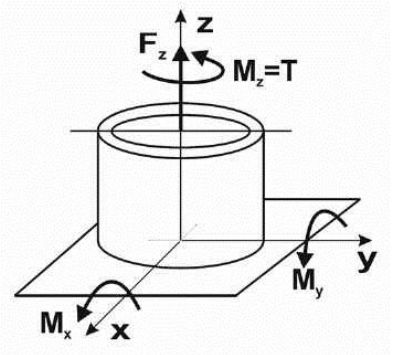


Рис. 5.2.16

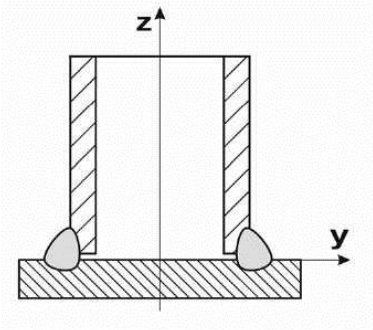


Рис. 5.2.17

Напряжения, действующие по площадкам и вызывающие их разрушение, обозначим через τ_F (рис. 5.2.15b). Как и ранее, углом наклона напряжений сдвига будем в дальнейшем пренебрегать, тем самым упрощая расчетную модель (рис. 5.2.15c).

При таких допущениях напряжения можно рассчитать по формуле, полученной из уравнения равновесия и аналогичной (5.2.4):

$$\tau_F = \frac{F}{0{,}7kL},$$

где $L = 2l$ — полная длина шва. Таким образом, тавровые соединения, выполненные угловыми швами, рассчитываются аналогично нахлесточным.

Для примера приведем результаты расчета таврового соединения трубы диаметра D с плоской пластиной (рис. 5.2.16), выполненного угловым швом (рис. 5.2.17). Труба нагружена нормальной силой F, моментами вращения T и изгиба M. Внутренние силовые факторы $F_z = F$, $M_z = T$, M_x и M_y вызывают в опасном сечении шва появление напряжений, которые, введя обозначение $c = 0{,}7k$, можно представить как векторную сумму составляющих, модули которых равны:

$$\tau_F = \frac{F}{\pi Dc}; \quad \tau_T = \frac{2T}{\pi D^2 c};$$

$$\tau_{Mx} = \frac{M_x y}{I_x} = \frac{8M_x y}{\pi D^3 c};$$

$$\tau_{My} = \frac{M_y x}{I_y} = \frac{8M_y x}{\pi D^3 c}. \qquad (5.2.14)$$

По своему характеру напряжения в угловых швах всегда являются напряжениями сдвига. Результат векторного сложения компонент (5.2.14) — (5.2.15) для наиболее напряженной точки шва и связанное с ним условие прочности углового шва имеет вид

$$\tau_e = \sqrt{\left(\frac{F}{\pi Dc} + \frac{4M_x}{\pi D^2 c} + \frac{4M_y}{\pi D^2 c}\right)^2 + \left(\frac{2T}{\pi D^2 c}\right)^2} \le \tau'_a. \qquad (5.2.15)$$

Из условия прочности (5.2.15) можно определить значение катета шва, т. е. провести проектировочный расчет.

В том случае, если соединение выполняется стыковым швом (рис. 5.2.18), полученное напряженное состояние полностью аналогично состоянию, рассмотренному выше при соединении встык. Следовательно, если труба из предыдущего примера приваривается стыковым швом, то компоненты напряжений рассчитываются по формулам (5.2.1) — (5.2.2).

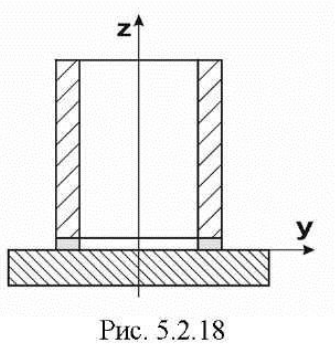


Рис. 5.2.18

Условие прочности сводится к определению эквивалентных напряжений, которые для наиболее нагруженной точки равны

$$\sigma_e = \sqrt{(\sigma_F + \sigma_{Ms})^2 + 3\tau_T^2} \le \sigma'_a, \qquad (5.2.16)$$

где

$$\sigma_{Ms} = \sqrt{\sigma_{Mx}^2 + \sigma_{My}^2}\,.$$

Расчет соединений, полученных контактной сваркой.

Сварное соединение, выполненное *контактной* сваркой, представляет собой совокупность проплавленных участков в форме цилиндров равного диаметра. Расчет этих соединений ведется по касательным напряжениям, а в отдельных случаях и по нормальным. В результате проектировочного расчета соединений *точечной контактной* сваркой определяется диаметр наиболее нагруженной точки. Конструктивно точечные участки сварки, как правило, располагаются в ряд с определенным шагом по вертикали и горизонтали, однако такой порядок не является обязательным.

При выполнении расчета соединения этого типа соединяемые детали представляются абсолютно жесткими. При таком предположении сопротивление внешней нагрузке оказывают места проплавления, которые в поперечном сечении можно представить в виде набора окружностей. Нагрузка, которую воспринимает каждая из точек сварного соединения, зависит от вида внешнего нагружения и месторасположения этой точки. Заметим, что точно такая же модель используется при расчете групповых болтовых соединений, установленных в отверстие без зазора (см. главу 4.1). В этой связи условие прочности по допускаемым напряжениям на сдвиг в случае действия наибольшей сдвигающей силы $F_{s\max}$ записывается как

$$\tau = \frac{4F_{s\max}}{\pi d_0^2} \le \tau', \qquad (5.2.17)$$

где τ и τ' — соответственно фактическое напряжение сдвига в наиболее напряженной точке и величина допускаемого напряжения сдвига для рассматриваемого случая. По результатам прочностного расчета можно определить диаметр d_0 наиболее нагруженной точки сварного шва.

В случае, когда на сварную точку действует нормальное к поверхности стыка усилие $F_{n\max}$, условие прочности приобретает вид

$$\sigma = \frac{4F_{n\max}}{\pi d_0^2} \le \sigma', \qquad (5.2.18)$$

где σ и σ' — фактическое нормальное напряжение в наиболее напряженной точ-

ке сварного соединения и величина допускаемого напряжения для рассматриваемого случая соответственно.

Если точечное сварное соединение воспринимает одновременно сдвигающую и отрывающую нагрузки, расчет прочности выполняется по эквивалентным напряжениям.

Как было отмечено выше, при толщине свариваемых деталей больше 3 мм рекомендуется вместо точечной сварки использовать *шовную*. Методика расчета статической прочности соединения, выполненного шовной сваркой, не отличается от методики расчета стыковых сварных соединений.

Расчет сварных соединений при переменных во времени нагрузках. Переменный характер нагружения сварного шва и наличие большого количества всевозможных дефектов, неизбежно возникающих при сварке, снижают долговечность этого соединения, которая оказывается ниже по сравнению с другими видами сборки. В условиях периодического переменного нагружения, и особенно знакопеременного, сварные соединения лучше не использовать вообще ввиду их малой долговечности. Однако замена их заклепочными не всегда экономически оправдана ввиду нетехнологичности изготовления последних. Поэтому в настоящее время сварные соединения широко применяются и при переменной нагрузке.

В основе расчета прочности при переменном характере внешнего нагружения лежат методы расчета статической прочности, которые рассмотрены в главе 2.10. Причем такие расчеты ведутся как по номинальным напряжениям, так и с учетом местных концентраций, возникающих на границах сварных зон. В большинстве случаев единственным методом расчета местных напряжений остается МКЭ, реализация которого требует применения эффективных инструментальных средств. Аналитическими методами найти величины воспринимаемых напряжений можно только для простейших сварных соединений. В отдельных случаях можно воспользоваться усредненными значениями коэффициентов концентрации, но такой подход к проблеме усталостной прочности представляется достаточно грубым.

Концентрация напряжений в сварных швах. Под к о н ц е н т р а ц и е й понимается наличие локальных участков с высоким по сравнению с номиналом уровнем напряжений. Главными причинами концентрации являются резкая перемена геометрической формы и неравномерные температурные деформации, которые вызывают появление остаточных напряжений. Как было отмечено ранее, сварные швы являются существенным источником местных напряжений, поскольку для них характерна неоднородность материала шва, его свойств, наличие дефектов и на-

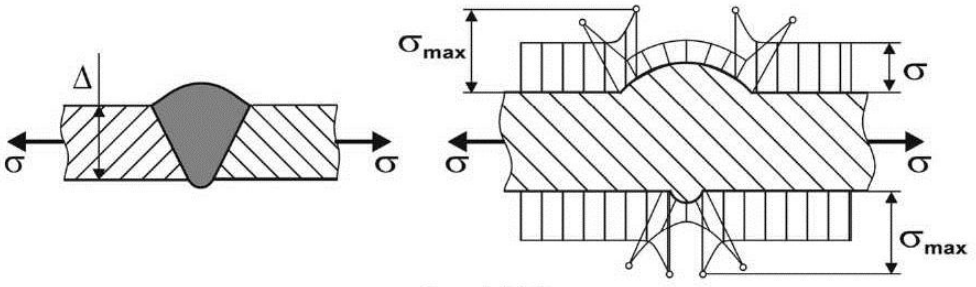


Рис. 5.2.19

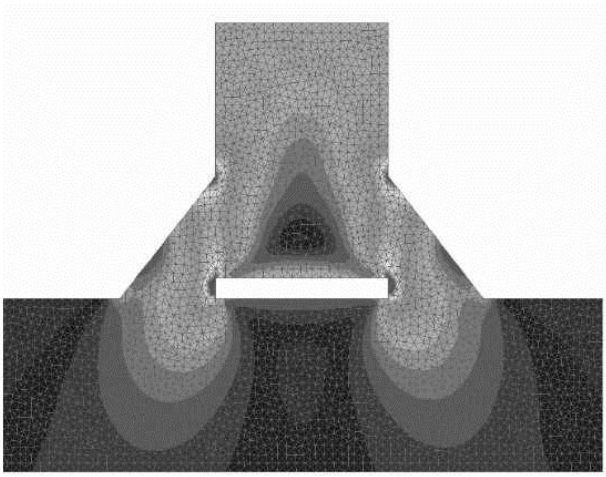


Рис. 5.2.20

пряжений, обусловленных температурными деформациями, и т. д. Статическая прочность шва мало зависит от наличия местной концентрации, но последняя оказывает значительное влияние при переменном режиме нагружения, так как в месте расположения концентратора может появиться усталостная трещина, что приведет к разрушению. Концентрацию можно намного уменьшить за счет механической и термической обработки швов.

Рассмотрим несколько конкретных примеров концентрации для различных типов сварных соединений.

На рис. 5.2.19 изображена картина эквивалентных напряжений, действующих в стыковом соединении.

Сложным представляется распределение напряжений в тавровых соединениях. Например, на рис. 5.2.20 показана карта напряжений для соединения рис. 5.2.15, рассчитанная методом конечных элементов.

Карты напряжений либо эпюры дают возможность определить теоретическое значение коэффициента концентрации, чтобы затем использовать его в расчетах усталостной прочности. Расчеты на прочность позволяют найти значения теоретического коэффициента концентрации, однако это оказывается недостаточным при решении задач расчета на выносливость. Главным фактором, определяющим влияние концентратора, является эффективный коэффициент концентрации (2.10.10), величина которого зависит как от теоретического коэффициента концентрации, так и от материала свариваемых деталей.

Расчет сварных соединений на выносливость. Расчет выносливости сварного соединения зависит от типа шва.

Расчет выносливости соединения стыковым швом. Расчет выносливости стыкового соединения выполняется по эквивалентным нормальным напряжениям. Напряженное состояние в каждой точке можно характеризовать совокупностью главных напряжений. При этом режим действующих переменных напряжений сводится к эквивалентному периодическому нагружению с напряжением σ_e:

$$\sigma_{ei}^1 = \sigma_{ami}^1 + \sigma_{mi}^1 \psi_\sigma ; \quad \sigma_{ei}^3 = \sigma_{ami}^3 + \sigma_{mi}^3 \psi_\sigma , \qquad (5.2.19)$$

Здесь индекс 1 указывает на наибольшие главные напряжения, а 3 — на наименьшие; индекс am относится к амплитудным значениям напряжений, m — их средним величинам; ψ_σ — коэффициент асимметрии цикла; i — индекс текущей точки сварного шва.

Таблица 5.2.2. **Ориентировочные значения эффективных коэффициентов концентрации K_σ сварных соединений**

Тип соединения	Предел прочности основного металла σ_b, МПа	Эффективный коэффициент концентрации K_σ	Коэффициент вариации $V_{K\sigma}$
Стыковое	400 600 800	1,2 1,25 1,3	0,1 0,12 0,14
Нахлесточное	400 600 800	1,55 1,7 1,85	0,12 0,125 0,16
Тавровое	400 600 800	1,6 1,75 1,9	0,1 0,1 0,14

Для сварных соединений влияние средних напряжений цикла мало, и в большинстве случаев коэффициент асимметрии цикла ψ_σ принимается равным нулю, $\psi_\sigma = 0$. Проводится так называемый расчет по *предельной амплитуде* (глава 2.10).

Согласно гипотезам прочности, двухосное напряженное состояние может быть сведено к эквивалентному (равнопрочному) одноосному напряженному состоянию с напряжением σ_{eei}. Используя гипотезу максимальных касательных напряжений (глава 2.7), для каждой из точек можно записать

$$\sigma_{eei} = \sigma_{ei}^1 - \sigma_{ei}^3, \qquad (5.2.20)$$

Если общее число участков шва равно n, то рассчитанные напряжения составляют последовательность $\sigma_{ee1}, \sigma_{ee2}, \ldots, \sigma_{een}$. Величины фактических напряжений позволяют определить теоретические значения коэффициентов концентрации $\alpha_{\sigma ci}$ и эффективный коэффициент концентрации для каждой из точек сварного шва по формуле (2.10.10):

$$K_{\sigma i} = 1 + q(\alpha_{\sigma ci} - 1).$$

Тогда значение коэффициента запаса для любой точки сварного шва согласно (2.10.20), (5.2.20) и при условии $\psi_\sigma = 0$ равно

$$n_{\sigma i} = \frac{\sigma_{-1}}{K_{\sigma i}\left(\sigma_{ei}^1 - \sigma_{ei}^3\right)} = \frac{\sigma_{-1}}{K_{\sigma i}\sigma_{eei}}. \qquad (5.2.21)$$

По наименьшему из коэффициентов запаса можно судить о прочности соединения в целом. При этом прочность считается удовлетворительной, если выполняется соотношение $n_{\sigma\min} > (2 \div 2{,}5)$.

Приведенные в таблице 5.2.2 значения соответствуют вероятности их появления, равной $P = 0{,}5$. Разброс значений подчиняется нормальному закону. В этом случае для получения эффективных коэффициентов концентрации можно рекомендовать зависимость

$$K_{\sigma P} = K_{\sigma 0{,}5}\left(1 + u_P V_{K\sigma}\right), \tag{5.2.22}$$

где u_P — квантиль нормального распределения, $V_{K\sigma}$ — коэффициент вариации. Для расчета эффективного коэффициента концентрации можно воспользоваться таблицей 5.2.3.

Таблица 5.2.3

Вероятность события P	0,5	0,6	0,7	0,75	0,8	0,85	0,9	0,95	0,99
u_P	0	0,253	0,324	0,675	0,842	1,036	1,281	1,645	2,326

В качестве примера определим значение K_σ с вероятностью $P = 0{,}95$ для сварного соединения:

$$K_{\sigma 0{,}5} = 1{,}7;\ V_{K\sigma} = 0{,}125;\ u_{0{,}95} = 1{,}645; \qquad K_{\sigma 0{,}95} = 1{,}7\left(1 + 1{,}645 \cdot 0{,}125\right) = 2{,}05.$$

Расчет выносливости соединения, выполненного угловым швом. Для швов этого типа характерно то, что расчет их прочности выполняется по касательным напряжениям. Формула для расчета значения коэффициента запаса получена ранее (см. 2.10.20):

$$n_\tau = \frac{\tau_{-1}}{K_\tau \tau_{am} + \tau_m \psi_\tau}.$$

Если в (2.10.20) положить $\psi_\tau = 0$, что соответствует расчету по амплитудным напряжениям, получим

$$n_\tau = \frac{\tau_{-1}}{K_\tau \tau_{am}}, \tag{5.2.23}$$

где τ_{am} — амплитудное напряжение цикла,

$$\tau_{am} = \frac{\tau_{\max} - \tau_{\min}}{2}.$$

Раздел 6. ОБЩИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЕРЕДАТОЧНЫХ МЕХАНИЗМОВ

Как известно, устройства, создающие движение (двигатели), имеют характеристики, не совпадающие с характеристиками исполнительного механизма. Например, высокая скорость вращения двигателя и низкая — исполнительного механизма, и т.д. Для согласования этих характеристик необходимо между двигателем и исполнительным механизмом установить механическую передачу, которая преобразовывает движение, перемещая его в пространстве.

Существует большое количество различных типов передач, из которых можно сформировать все многообразие передаточных механизмов, обеспечивающих преобразование и передачу движения на расстоянии, а также ориентацию его в пространстве. Укрупненно можно представить в виде трех больших групп:

- передачи вращения;
- передачи, преобразующие вращательное движение в поступательное;
- передачи, преобразующие движение по заданному закону.

Передачи вращательного движения, в свою очередь, подразделяются на передачи *зацеплением* (зубчатые, червячные, волновые, цепные и т.д.) и *трением* (ременные и фрикционные). Среди передач зацеплением наиболее распространенными являются *зубчатые*. По форме зубчатых колес они бывают *цилиндрическими* и *коническими* с прямыми и непрямыми зубьями.

Преобразование вращательного движения в поступательное реализуется *винтовым механизмом скольжения*, а также *шариковинтовым* и *планетарновинтовым* механизмами.

Для преобразования закона движения, в зависимости от назначения, используются передаточные механизмы специального вида — *рычажные*, *кулачковые*, *мальтийские* и т. д.

Основные кинематические и энергетические характеристики передач. При расчете передач часто используют несколько иную форму записи известных физических соотношений. Связано это прежде всего с необходимостью введения ряда технических размерностей, удобных конструктору.

1) Угловая скорость ω, $[\omega] = |c^{-1}|$. Рассмотрим поворот материальной точки на угол $\Delta\varphi$ за время Δt. Из курса физики известно, что по определению угловая скорость ω материальной точки равна

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}, \qquad (6.1)$$

причем $[\omega] = [c^{-1}]$. Если в качестве единицы времени взять минуту, а частоту вра-

щения n измерять в оборотах в минуту, то за время, равное одной минуте, угол поворота точки составит $\Delta\varphi = 2\pi n$, тогда для угловой скорости находим

$$\omega = \frac{2\pi n}{60}. \tag{6.2}$$

2) Линейная скорость v, $[v]$ = [м/с]. При вращательном движении линейная (окружная) скорость v определяется по формуле

$$v = \omega\frac{d}{2} = \frac{\pi n d}{60\cdot 10^3}. \tag{6.3}$$

Здесь $d/2$ — радиус кривизны точки вращения, выраженный в мм.

3) Мощность вращательного движения P, [P] = [Вт]. Мощность вращательного движения, измеренная в ваттах, равна

$$P = T\omega = \frac{T\pi n}{30}, \tag{6.4}$$

T — момент вращения, [T] = [Н·м]. Если же мощность выражается в киловаттах, [P] = [кВт], то

$$P = T\omega = \frac{T\pi n\cdot 10^{-3}}{30}, \tag{6.5}$$

откуда

$$T = 9550\frac{P}{n}. \tag{6.6}$$

4) Передаточное отношение u. Устройство, приводящее в движение машину или механизм, носит название *привода*. В общем виде привод включает в себя *двигатель* и *передаточный механизм*.

Пример одного из приводов показан на рис. 6.1. Он состоит из электродвигателя (1), ременной передачи (2), двух пар цилиндрических зубчатых колес (3) и цепной передачи (4). Частота вращения на входе равна n_1, на выходе — n_5. Если механизм, состоящий из одной или нескольких пар размещенных в корпусе зубчатых колес, предназначен для уменьшения частоты вращения, то он называется *редуктором*, если для увеличения частоты вращения — *мультипликатором*.

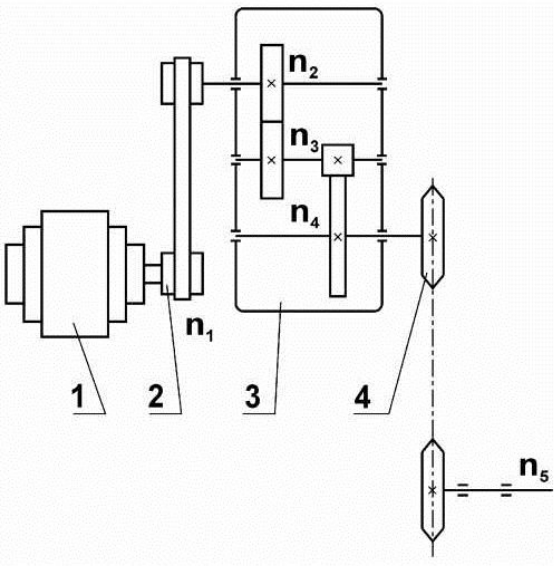


Рис. 6.1

На рис. 6.2 приведен пример схематичного представления одноступенчатого цилиндрического зацепления, которое передает вращательное дви-

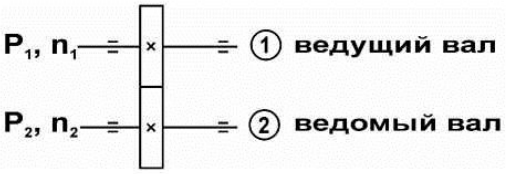


Рис. 6.2

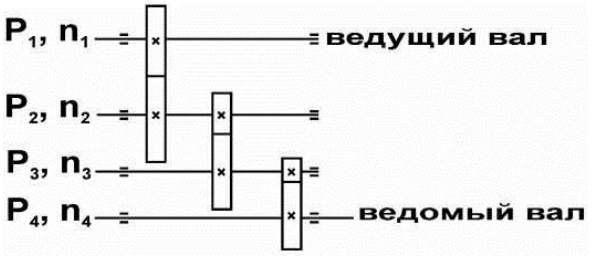


Рис. 6.3

жение от ведущего вала непосредственно на ведомый вал, без каких-либо промежуточных элементов.

В общем случае передаточный механизм как инструмент изменения кинематических и силовых параметров можно представить в виде кинематической схемы последовательно или параллельно соединенных элементов (звеньев). Примером такой схемы является изображенный на рис. 6.3 передаточный механизм, содержащий три последовательно расположенные цилиндрические пары зубчатых колес. Эти колеса установлены на валах, каждый из которых можно характеризовать набором кинематических и энергетических характеристик P_i, T_i, n_i (или ω_i).

Колесо, которое инициирует движение, называется *ведущим*.

Под передаточным отношением u понимается отношение угловых скоростей на входе и выходе кинематической цепи. Для схемы, изображенной на рис. 6.2, передаточное отношение равно

$$u = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2}. \tag{6.7}$$

С учетом (6.3) выражение (6.7) можно записать в виде

$$u = \frac{d_2}{d_1}. \tag{6.8}$$

Для схемы рис. 6.3 имеем

$$u = \frac{n_1}{n_4}. \tag{6.9}$$

Сделав в (6.9) ряд несложных тождественных преобразований, находим

$$u = \frac{n_1}{n_4} = \frac{n_1}{n_2} \cdot \frac{n_2}{n_3} \cdot \frac{n_3}{n_4} = u_1 u_2 u_3. \tag{6.10}$$

Очевидно, что передаточное отношение кинематической цепи, состоящей из N последовательно установленных пар, равно произведению передаточных отношений этих пар, а именно

$$u = \prod_{i=1}^{N} u_i. \tag{6.11}$$

Как следует из (6.8), передаточное отношение в механизмах вращательного движения зависит от отношения линейных размеров их входных и выходных звеньев. Конструктивно неудобно иметь слишком большую разность диаметров кинематических звеньев. Это обстоятельство вынуждает создавать многоступенчатые передачи, ограничивая передаточное отношение одной пары. Разбиение передаточного отношения по ступеням неоднозначно. Существует много разных критериев, которые приводят к разным числовым выводам. Здесь легко реализуется процедура оптимизации, но сложно сделать правильный выбор критерия оптимизации.

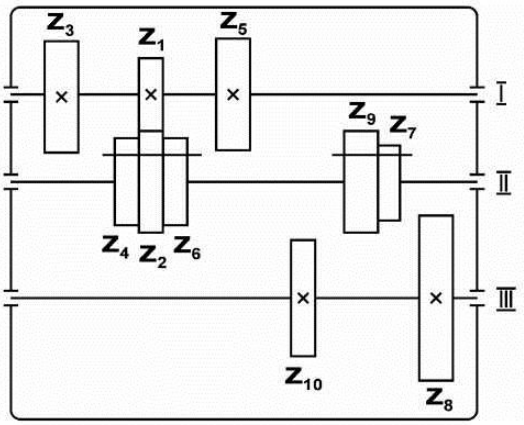


Рис. 6.4

Практический подход к выбору передаточных отношений сводится к их подбору по средним значениям из некоторого рекомендованного диапазона. Пределы использования одноступенчатых передач приведены в таблице 6.1.

Таблица 6.1. **Таблица средних значений КПД (η) и рекомендованных передаточных отношений u**

Тип передачи	η	Передаточное отношение u
Зубчатая	0,95 — 0,97	2 — 6
Червячная	0,7 — 0,9	10 — 40
Цепная	0,94 — 0,96	2 — 6
Ременная	0,94 — 0,96	2 — 5
Фрикционная	0,9 — 0,95	2 — 4

И редуктор, и мультипликатор имеют постоянное передаточное отношение. Дискретное изменение передаточного отношение можно получить с помощью механических передач, имеющих подвижные в осевом направлении колеса. Это обеспечивает зацепление колес разных групп и позволяет регулировать частоту вращения на выходном валу. Такие передачи называются *коробками скоростей* (рис. 6.4; $z_1,\ldots,z_{10}$ — числа зубьев). Устройство для бесступенчатого (плавного) регулирования скорости выходного звена называется в *ариатором*.

Коэффициент полезного действия кинематической цепи η. Коэффициент полезного действия (КПД) η определим как отношение мощности, полученной на выходе цепи, к мощности на входе. Например, для одноступенчатого привода

$$\eta = \frac{P_2}{P_1}. \tag{6.12}$$

Разумеется, из-за наличия потерь, которые возникают в точках контакта и в

опорах, а также из-за деформаций опор, нагрева и т. д. выходная мощность всегда меньше входной, так что, как и требует закон сохранения и превращения энергии, $\eta < 1$. Мощность потерь, которые возникают при передаче момента вращения, равна $\Delta P = P_1 - P_2$. Как правило, рассчитать потери в передаче очень сложно, поскольку это связано с решением контактных задач, задач трения, задач распределения тепла и т. д. С целью упрощения процесса определения КПД можно воспользоваться его средними значениями, которые для одноступенчатых передач приведены в таблице 6.1. Для многоступенчатой передачи (рис. 6.3) имеем

$$\eta = \frac{P_4}{P_1} = \frac{P_2}{P_1} \cdot \frac{P_3}{P_2} \cdot \frac{P_4}{P_3} = \eta_1 \eta_2 \eta_3 . \qquad (6.13)$$

В общем случае для привода, содержащего N последовательных ступеней, справедливо соотношение

$$\eta = \prod_{i=1}^{N} \eta_i . \qquad (6.14)$$

Коэффициент полезного действия N параллельно соединенных элементов кинематической цепи рассчитывается по формуле

$$\eta = \frac{P_S}{P_1}, \qquad (6.15)$$

где $P_s = \sum_{i=1}^{N} P_i$ — сумма мощностей отдельных составляющих кинематическую цепь элементов. Если в результате расчета окажется, что $\eta < 0$, то физически это означает неспособность данного механизма передавать энергию. Такое явление носит название *самоторможения*. Механизмы, для которых $\eta < 0$, называются *самотормозящимися*. При изменении ведущего звена эти механизмы преобразуются, как правило, в работоспособные. Из самотормозящихся механизмов наибольшее применение имеют *планетарные, червячные* и *винтовые*.

Приведение масс и моментов инерции звеньев. Нахождение динамических характеристик механических передач существенно упрощается, если выполнять расчеты применительно к одному из звеньев. Обычно в качестве такового используют ведущее звено. Для того чтобы учесть наличие других элементов кинематической цепи, их приводят к этому звену системы. В зависимости от вида движения звено приведения может иметь поступательное либо вращательное движение.

Пусть необходимо привести массы m_i и моменты инерции I_i некоторого числа N звеньев к звену, которое перемещается поступательно. Массы m_i перемещаются поступательно со скоростями V_i, а скорости вращения ω_i приписываются вращающимся звеньям, моменты инерции которых равны I_i. Звено

приведения массой m_e движется поступательно со скоростью V_e. Приравнивая величины кинетических энергий звена приведения и системы из N звеньев, получаем

$$E = \sum_{i=1}^{N} (m_i V_i^2 + I_i \omega_i^2)/2 = m_e V_e^2/2,$$

откуда

$$m_e = \sum_{i\ 1}^{N} \left[m_i \left(\frac{V_i}{V_e} \right)^2 + I_i \left(\frac{\omega_i}{V_e} \right)^2 \right]. \qquad (6.16)$$

Очевидно, что если в качестве звена приведения рассматривать звено вращения, то можно определить его приведенный момент инерции как

$$I_e = \sum_{i\ 1}^{N} \left[m_i \left(\frac{V_i}{\omega_e} \right)^2 + I_i \left(\frac{\omega_i}{\omega_e} \right)^2 \right]. \qquad (6.17)$$

Формулы (6.16) — (6.17) позволяют получить общие характеристики кинематических цепей, которые являются основой для детального прочностного, динамического и теплового анализа этих цепей.

Раздел 7. ЗУБЧАТЫЕ ПЕРЕДАЧИ

Зубчатые передачи обеспечивают передачу момента вращения с помощью последовательно зацепляющихся зубьев. Тела вращения, на которых расположены зубья, называются зубчатыми колесами. Меньшее колесо зубчатой пары называется шестерней, а большее — колесом. Собственно колесо состоит из диска со ступицей и зубчатого венца (рис. 7.1).

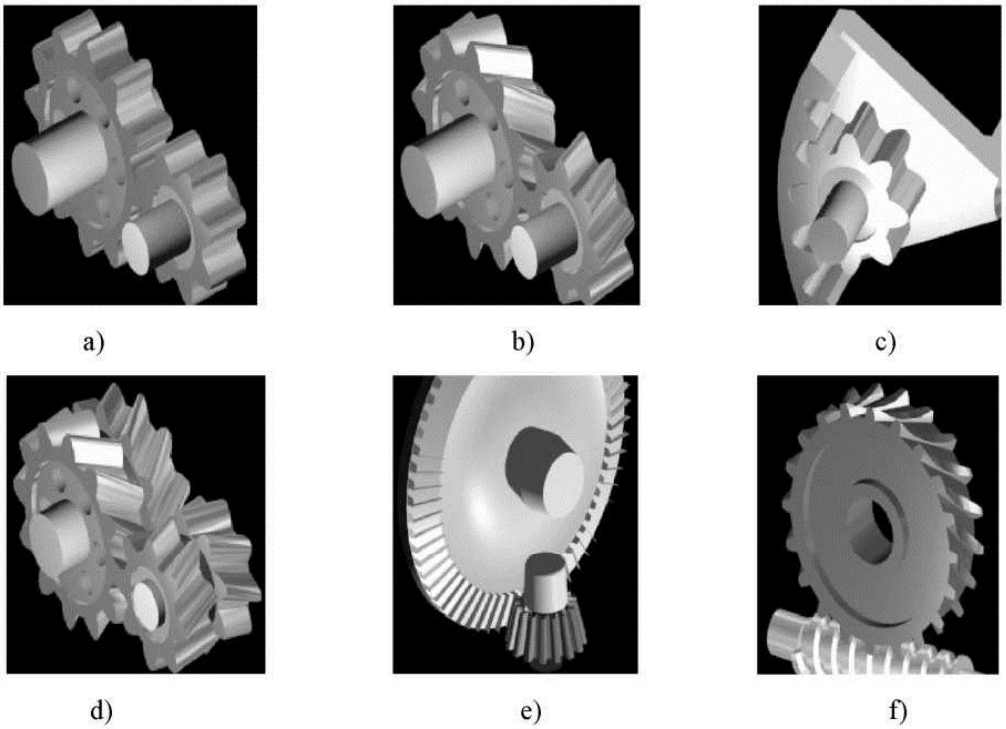


Рис. 7.1

Классификация зубчатых колес обычно проводится по нескольким признакам.

- По взаимному расположению осей зубчатые колеса подразделяются на *цилиндрические* (рис. 7.1a, b, c, d) — с параллельными осями, *конические* (рис. 7.1e) — с пересекающимися осями и *гиперболоидные* (рис. 7.1f) — со скрещивающимися осями.
- По направлению зубьев (положению зубьев относительно оси колеса) зубчатые колеса бывают *прямозубыми* (рис. 7.1a, c) и *косозубыми* (рис. 7.1b). Цилиндрические колеса конструктивно могут быть выполнены из двух одинаковых половин (полушевронов) с противоположным направлением зубьев. Такие колеса носят название *шевронных* (рис. 7.1d).
- Если передача образована парой зубчатых колес, зубья которых нарезаны на наружной поверхности колеса, то имеет место *внешнее* (или *наружное*) зацепление. Когда же зубья одного из колес зубчатой пары нарезаны на внутренней поверхности, а другого — на наружной, то зацепление считается *внутренним* (рис. 7.1c).
- Зубчатые колеса различаются также по форме рабочей поверхности (профилю) зуба. Наибольшее распространение в машиностроении получили зубчатые колеса с *эвольвентным зацеплением* (профиль зуба такого колеса очерчен участком эвольвенты окружности).

Глава 7.1. Цилиндрические зубчатые передачи

7.1.1. Геометрия цилиндрических зубчатых передач

Профиль зуба колеса и его свойства. Рассмотрим профиль зуба колеса цилиндрической передачи с эвольвентным зацеплением. Как известно, эвольвента (или инволюта) окружности представляет собой кривую, центры кривизны которой принадлежат рассматриваемой окружности. Эвольвента окружности может быть получена как траектория точки прямой, перекатывающейся без скольжения по этой окружности радиуса r_b, называемой *основной окружностью* (рис. 7.1.1). В дальнейшем для краткости эвольвенту окружности будем называть просто эвольвентой E.

Запишем уравнение эвольвенты в полярных координатах. Для этого рассмотрим принадлежащую ей произвольную точку M, определяемую углом θ и расстоянием $|O\vec{M}|$. Модуль вектора $O\vec{M}$ равен

$$|O\vec{M}| = \sqrt{r_b^2 + \rho^2} = l, \qquad (7.1.1)$$

а модуль радиуса кривизны ρ эвольвенты в точке M

$$\rho = \sqrt{l^2 - r_b^2}\ . \qquad (7.1.2)$$

Из рис. 7.1.1 и формул (7.1.1) — (7.1.2) следует, что

$$tg\alpha = \frac{\rho}{r_b} = \frac{\sqrt{l^2 - r_b^2}}{r_b}; \qquad \alpha = arctg\frac{\sqrt{l^2 - r_b^2}}{r_b}, \qquad (7.1.3)$$

где α — угол профиля. С другой стороны, по определению эвольвенты, длина дуги AB равна длине отрезка MB, или

$$|MB| \equiv \rho = r_b(\theta + \alpha). \qquad (7.1.4)$$

Выражая ρ из (7.1.3) и подставляя полученное выражение в (7.1.4), запишем

$$\theta = tg\alpha - \alpha\ . \qquad (7.1.5)$$

Выражение $tg\alpha - \alpha$ называется *инволютой* угла профиля α и обозначается как $inv\alpha$. Инволюта является крайне важным параметром для геометрических расчетов зубчатых передач. Зная значение $inv\alpha$, с помощью таблицы приближенных формул (табл. 7.1.1) можно определить угол α.

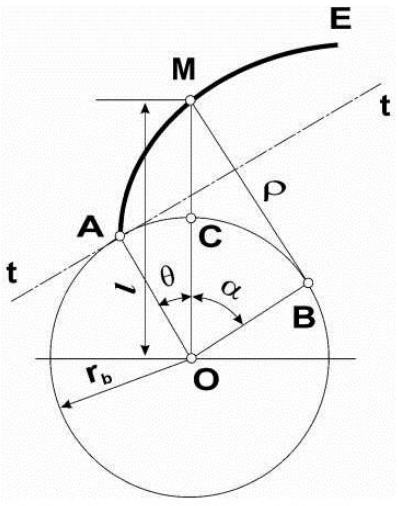


Рис. 7.1.1

Таблица 7.1.1. Приближенные зависимости α от y ($y = inv\alpha$)

Диапазон изменения	Приближенная зависимость для α
$0{,}00 \le y \le 0{,}0013$	$\alpha = \sqrt[3]{3y}$
$0{,}0013 \le y \le 0{,}0062$	$\alpha = 0{,}1006 + 2{,}355\sqrt{0{,}8492y - 0{,}0005212}$
$0{,}0062 \le y \le 0{,}023$	$\alpha = 0{,}1757 + 1{,}294\sqrt{1{,}545y - 0{,}005146}$
$0{,}023 \le y \le 0{,}060$	$\alpha = 0{,}2675 + 0{,}7764\sqrt{2{,}576y - 0{,}02979}$
$0{,}060 \le y \le 0{,}14$	$\alpha = 0{,}3818 + 0{,}4621\sqrt{4{,}328y - 0{,}1407}$
$0{,}14 \le y \le 0{,}32$	$\alpha = 0{,}5340 + 0{,}2476\sqrt{8{,}077y - 0{,}7023}$

На рис. 7.1.2 изображен контакт двух эвольвент окружностей, проведенных радиусами r_{b1} и r_{b2} из центров O_1 и O_2. При вращении звеньев 1 и 2 точка касания эвольвент перемещается вдоль отрезка AB, так как направления нормалей к поверхностям эвольвент первого и второго звеньев должны совпадать и быть касательными к основным окружностям. Следовательно, для колес с эвольвентным зацеплением линия зацепления (геометрическое место точек контакта профилей зубьев при вращении) представляет собой прямую. Если к тому же учесть, что эвольвента — единственная известная в математике кривая, обеспечивающая прямую линию зацепления, то становится понятным широкое распространение зацепления этого типа.

Точка пересечения общей нормали к эвольвентам с межосевой линией называется *полюсом зацепления* P. Окружности радиусами O_1P и O_2P называются *начальными окружностями*. Зацепление пары зубчатых колес аналогично (в смысле равенства линейных и угловых скоростей) перекатыванию без скольжения цилиндров, диаметры которых равны диаметрам начальных окружностей каждого из колес.

В дальнейшем все величины, относящиеся к начальной окружности, будем снабжать индексом W. Радиусы начальных окружностей колес обозначим через r_{W1} и r_{W2}, а радиусы основных окружностей — как r_{b1} и r_{b2}. Положение нормали к поверхности определяется углом α_W (т.е. углом между линией зацепления и нормалью к линии центров), который называется *углом зацепления*.

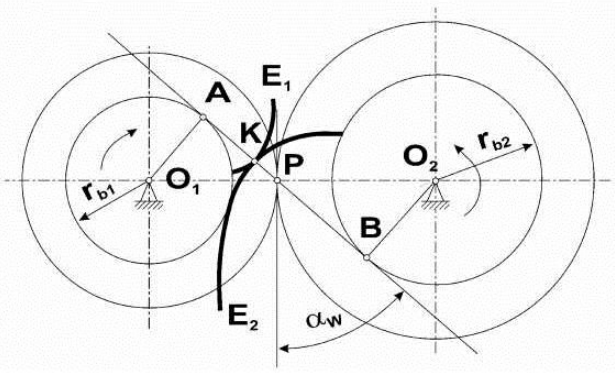


Рис. 7.1.2

Эвольвентное зацепление характеризуется постоянным передаточным отношением u. Покажем это. Очевидно, что линейная скорость в контакте постоянна, направлена вдоль линии

зацепления и может быть определена через параметры либо первого, либо второго звеньев:

$$V = \omega_1 r_{b1} = \omega_2 r_{b2}\,. \tag{7.1.6}$$

Поскольку из определения эвольвенты следует, что

$$r_{b1} = r_{W1}\cos\alpha_W\,, \qquad r_{b2} = r_{W2}\cos\alpha_W\,, \tag{7.1.7}$$

то, согласно (6.7), передаточное отношение u с учетом (7.1.6) и (7.1.7) имеет вид

$$u = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_{b2}}{r_{b1}} = \frac{r_{W2}}{r_{W1}} = const\,. \tag{7.1.8}$$

Постоянство передаточного отношения объясняется тем, что при передаче постоянного момента нормальная сила в контакте двух эвольвент неизменна по величине и направлена вдоль линии зацепления.

Нарезание зубьев колес зубчатых передач. Одним из наиболее сложных технологических процессов при изготовлении зубчатых колес является их *нарезание* и последующая механическая обработка. Для нарезания используются специальные станки и инструменты, с помощью которых реализуются методы *копирования* или *обкатки*. При первом способе зуб принимает форму, очерченную инструментом, а во втором случае имитируется процесс зацепления колес, одно из которых выполняет роль инструмента. Первый способ используется в основном при нарезании внутренних зубьев (в качестве инструмента при этом применяется *долбяк*), а второй — внешних.

Остановимся более подробно на втором способе (рис. 7.1.3). В качестве инструмента будем рассматривать рейку 1, которая представляет собой инструментальное колесо бесконечного радиуса основной окружности. При таком способе нарезания заготовка колеса 2 вращается относительно оси, а рейка для обеспечения резания перемещается в двух направлениях: по касательной к окружности заготовки и вдоль оси. След от рейки является эвольвентой, параметры которой зависят от вида профиля рейки. Полученный нарезанием рейкой зуб зубчатого колеса показан на рис. 7.1.4.

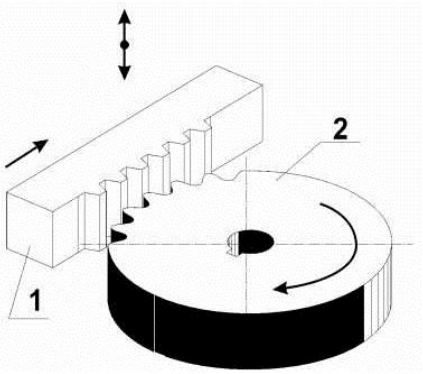


Рис. 7.1.3

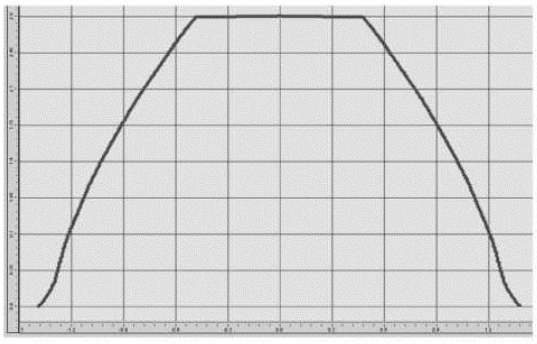


Рис. 7.1.4

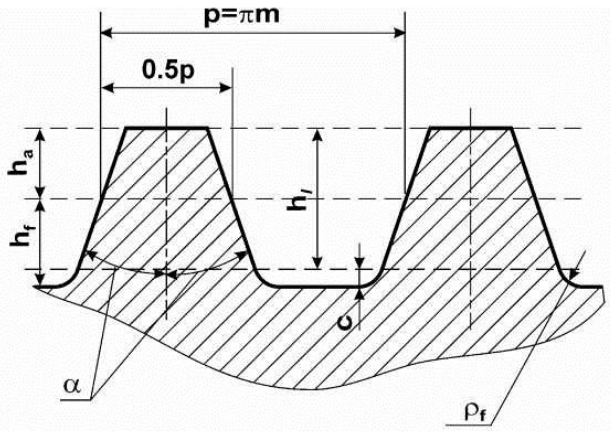


Рис. 7.1.5

Наиболее часто используется профиль, изображенный на рис. 7.1.5, со следующими параметрами:

- угол профиля α;
- коэффициент высоты головки зуба $h_a^* = h_a / m$ (h_a — высота головки);
- коэффициент высоты ножки зуба $h_f^* = h_f / m$ (h_f — высота ножки);
- коэффициент высоты зуба $h^* = h / m$ (h — высота зуба, $h = h_f + h_a$);
- коэффициент рабочей высоты зуба $h_l^* = h_l / m$ (h_l — рабочая высота зуба);
- коэффициент радиального зазора $c^* = c / m$;
- радиус закругления у корня зуба ρ_f;
- шаг рейки p.

Шаг рейки постоянен по высоте, а отношение $m = \dfrac{p}{\pi}$, выраженное в миллиметрах, называется *модулем зацепления*, или просто *модулем*. Вообще говоря, можно изготовить инструмент с любым шагом, но это не оправдано ни технологически, ни экономически. Для того, чтобы ограничить число инструментов для нарезания зубчатых колес, на практике применяются модули стандартных значений, приведенные в таблице 7.1.2.

Т а б л и ц а 7.1.2. Таблица стандартных значений модулей m зубьев зубчатых колес

1-й ряд	1; 1,25; 1,5; 2; 2,5; 3; 4; 5; 6; 8; 10; 12; 16; 20; 25; 32; 40; 50; 60; 80; 100
2-й ряд	1,125; 1,375; 1,75; 2,25; 2,75; 3,5; 4,5; 5,5; 7; 9; 11; 14; 18; 22; 28; 36; 45; 55; 70; 90

Приведем несколько примеров стандартных параметров профиля:

- цилиндрические колеса

$$\alpha = 20^0;\ h_a^* = 1;\ h_l^* = 2;\ c^* = 0{,}25;\ \rho_f = 0{,}38m.$$

- прямозубые конические колеса

$$\alpha = 20^0;\ h_a^* = 1;\ h_l^* = 2;\ c^* = 0{,}2;\ \rho_f = 0{,}20m.$$

Полученный после нарезания зубьев колеса окружной шаг не постоянен по высоте зуба. Окружность колеса, шаг зубьев которой совпадает с шагом инструмента, называется *делительной окружностью.* Диаметры делительных окружностей шес-

терни и колеса обозначим как d_1 и d_2 соответственно, а величину межосевого расстояния для этого случая зацепления назовем *делительным межосевым расстоянием* и обозначим как a.

Средняя линия контура инструментальной рейки называется *делительной прямой*. Расстояние между осями колес называется *межосевым расстоянием* и обозначается как a_W.

а) Передачи без смещения. Если делительная окружность колеса является касательной к средней линии контура инструмента, то имеет место нарезание *без смещения*. В этом случае начальные окружности колес совпадают с делительными. На рис. 7.1.6а показан вариант зацепления колес, нарезанных без смещения. Здесь диаметры делительных окружностей касаются в точке полюса, а угол зацепления равен углу профиля зуба рейки.

Очевидно, что при нарезании без смещения:

- диаметр d_1 делительной окружности колеса с числом зубьев z_1

$$d_1 = mz_1, \tag{7.1.9}$$

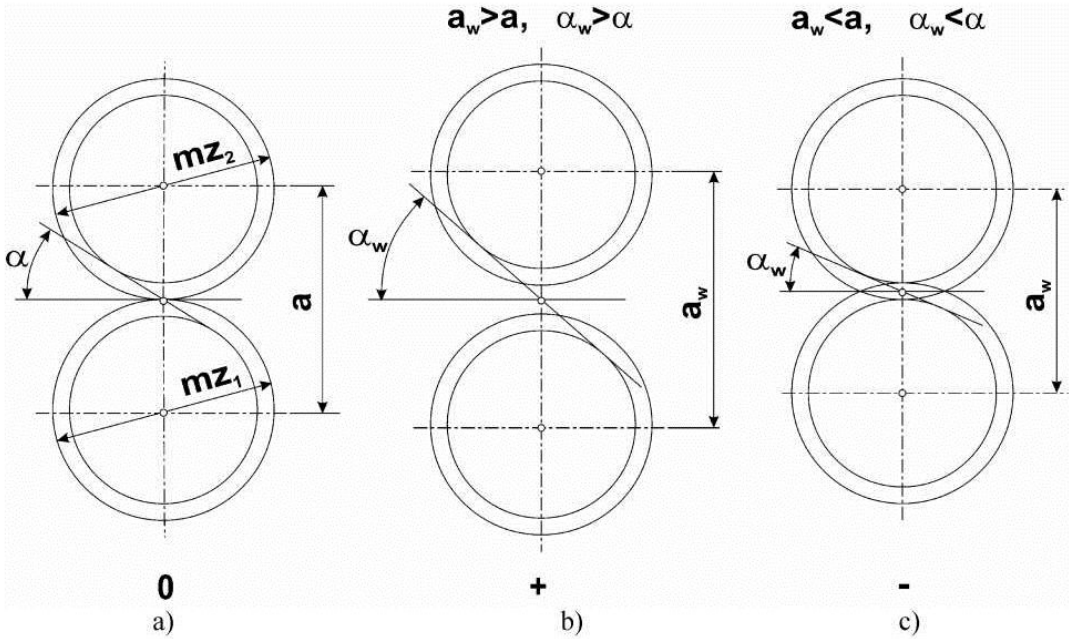
- диаметр d_{a1} окружностей выступов

$$d_{a1} = d_1 + 2h_a = mz_1 + 2mh_a^* = m\left(z_1 + 2h_a^*\right), \tag{7.1.10}$$

- диаметр d_{f1} впадин

$$d_{f1} = d_1 - 2{,}5h_a = mz_1 - 2{,}5mh_a^* = m\left(z_1 - 2{,}5h_a^*\right). \tag{7.1.11}$$

Для второго, сопряженного с первым, колеса зубчатой пары в случае наружного зацепления можно написать:



a) b) c)

Рис. 7.1.6

- делительный диаметр

$$d_2 = mz_2, \tag{7.1.12}$$

- диаметры окружностей выступов и впадин

$$d_{a2} = d_2 + 2h_a = mz_2 + 2mh_a^* = m\left(z_2 + 2h_a^*\right);$$
$$d_{f2} = d_2 - 2{,}5h_a = mz_2 - 2{,}5mh_a^* = m\left(z_2 - 2{,}5h_a^*\right), \tag{7.1.13}$$

где z_2 — число зубьев второго колеса.

Для колеса внутреннего зацепления соотношения (7.1.13) выглядят как

$$d_{a2} = d_2 - 2h_a = mz_2 - 2mh_a^* = m\left(z_2 - 2h_a^*\right);$$
$$d_{f2} = d_2 + 2{,}5h_a = mz_2 + 2{,}5mh_a^* = m\left(z_2 + 2{,}5h_a^*\right). \tag{7.1.14}$$

Межосевое расстояние a_W для прямозубой пары внешнего зацепления равно

$$a_W = 0{,}5m\left(z_2 + z_1\right) \equiv a, \tag{7.1.15}$$

а для внутреннего зацепления —

$$a_W = 0{,}5m\left(z_2 - z_1\right) \equiv a, \tag{7.1.16}$$

где a — делительное межосевое расстояние.

Из (7.1.8), (7.1.9) и (7.1.2) следует, что передаточное отношение можно представить в виде отношения числа зубьев колеса и шестерни:

$$u = \frac{z_2}{z_1}. \tag{7.1.17}$$

Подставляя (7.1.9) и (7.1.17) в (7.1.15), запишем еще одно полезное соотношение для наружного зацепления: $a = 0{,}5d_2\left(\dfrac{u+1}{u}\right)$, откуда следует

$$d_2 = \frac{2au}{u+1}; \qquad d_1 = \frac{2a}{u+1}. \tag{7.1.18}$$

В случае внутреннего зацепления в (7.1.18) следует вместо знака "+" брать знак "–".

Выражение для определения делительного диаметра колеса в форме (7.1.18) понадобится нам в дальнейшем при расчетах на прочность.

b) Передачи со смещением. При нарезании *со смещением* (рис. 7.1.6 b,c) диаметр начальной окружности не касается средней линии контура инструментальной рейки. Смещение рейки позволяет избежать подреза ножки зуба при изготовлении колес с малым числом зубьев и повлиять на прочностные характеристики зубьев.

На рис. 7.1.7 приведено три варианта возможного размещения инструмента относительно центра колеса. Вариант a) соответствует рассмотренному выше случаю нарезания без смещения.

Вариант b) иллюстрирует случай положительного смещения, когда делительная прямая инструментальной рейки 1 лежит *выше* делительной окружности коле-

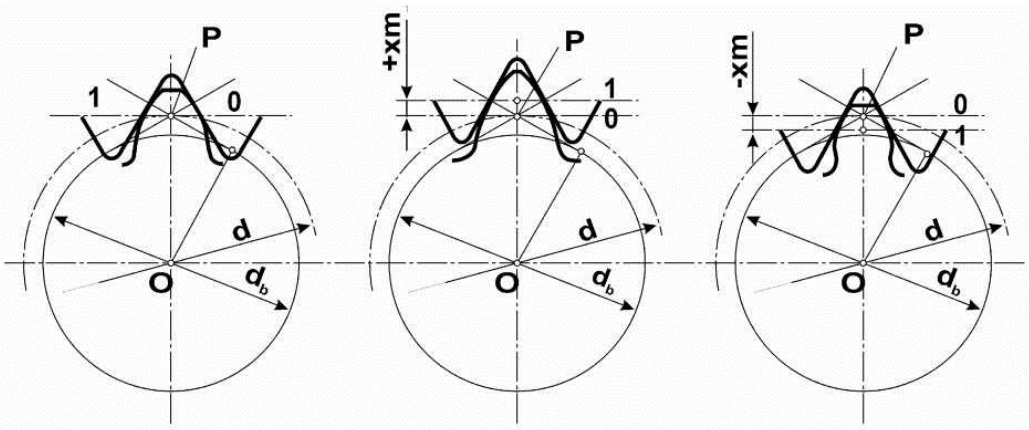


Рис. 7.1.7

са 0. Здесь под смещением понимается расстояние от делительной прямой рейки до делительной окружности колеса.

Вариант с) соответствует отрицательному смещению, при котором делительная прямая инструментальной рейки 1 располагается *ниже* делительной окружности колеса 0.

Если каждое из участвующих в зацеплении колес нарезано с положительным смещением, то межосевое расстояние и угол контакта возрастают (рис. 7.1.6b), и наоборот. Таким образом, выбором смещения каждого из колес можно получить требуемое межосевое расстояние и, следовательно, необходимые значения диаметров начальных окружностей. Очевидно, что при положительном смещении диаметр начальной окружности колеса возрастает, а при отрицательном уменьшается.

В зависимости от положения рейки зуб колеса очерчивается разными участками эвольвенты, и форма зуба при этом меняется. На рис. 7.1.8 изображена качественная картина форм зубьев для различных вариантов смещения. Как видно из рисунка, при положительном смещении толщина зуба по дуге делительной окружности увеличивается, а при отрицательном — уменьшается. Изменение геометрических параметров влечет за собой изменение прочностных характеристик.

Расчет геометрии передачи со смещением проведем на примере внешнего зацепления пары колес.

Радиусы начальных окружностей можно определить с помощью выражений (7.1.7):

$$r_{W1} = \frac{r_{b1}}{\cos\alpha_W}; \quad r_{W2} = \frac{r_{b2}}{\cos\alpha_W}. \qquad (7.1.19)$$

Из рис. 7.1.7 видно, что

$$r_b = 0{,}5\,d\cos\alpha. \qquad (7.1.20)$$

Подставляя в (7.1.19) значения радиусов основных окружностей из (7.1.20), имеем

$$r_{W1} = 0{,}5mz_1\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha_W}; \; r_{W2} = 0{,}5mz_2\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha_W}. \qquad (7.1.21)$$

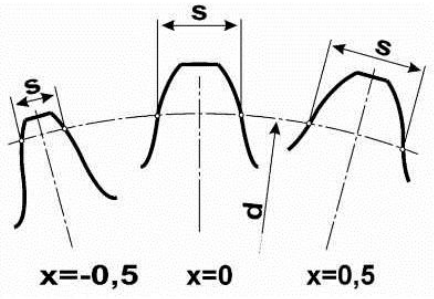


Рис. 7.1.8

Величина межосевого расстояния с учетом (7.1.21) равна

$$a_W = r_{W1} + r_{W2} = 0{,}5m\left(z_1 + z_2\right)\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha_W}. \qquad (7.1.22)$$

Иногда формулу (7.1.22) записывают в следующем виде:

$$a_W = a + ym, \qquad (7.1.23)$$

где y — коэффициент воспринимаемого смещения. Из (7.1.22) и (7.1.23) можно получить

$$y = 0{,}5\left(z_2 + z_1\right)\left(\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha_W} - 1\right). \qquad (7.1.24)$$

Сравнивая (7.1.22) и (7.1.15), видим, что

$$a_W = a\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha_W}. \qquad (7.1.25)$$

Заметим, что в случае внутреннего зацепления вместо суммы $\left(z_2 + z_1\right)$ в формулах (7.1.22) и (7.1.24) следует брать $\left(z_2 - z_1\right)$.

Легко определить также диаметры окружностей выступов d_a и впадин d_f колес. Так как впадина отстоит от делительной линии рейки на расстояние $(h + c)$, то

$$d_{f1} = d_1 - 2m\left(h_a^* + c^* - x_1\right); \qquad d_{f2} = d_2 - 2m\left(h_a^* + c^* - x_2\right). \qquad (7.1.26)$$

$$d_{a1} = d_1 + 2m\left(h_a^* + x_1\right); \qquad d_{a2} = d_2 + 2m\left(h_a^* + x_2\right). \qquad (7.1.27)$$

Здесь x_1 и x_2 — коэффициенты смещения инструмента при нарезании шестерни и колеса соответственно. При таких геометрических размерах у колес, нарезанных со смещением инструмента, радиальный зазор после сборки уменьшается на величину $2\delta_y m$, где $\delta_y = x_1 + x_2 - y$ — коэффициент уравнительного смещения. В таком случае для сохранения радиального зазора в формулы (7.1.27) для определения наружных диаметров следует внести поправки:

$$d_{a1} = d_1 + 2\left(h_a^* + x_1 - \delta_y\right)m, \qquad d_{a2} = d_2 + 2\left(h_a^* + x_2 - \delta_y\right)m;$$

$$h_1 = 0{,}5\left(d_{a1} - d_{f1}\right), \qquad h_2 = 0{,}5\left(d_{a2} - d_{f2}\right). \qquad (7.1.28)$$

Для нахождения угла зацепления необходимо установить зависимость толщины зуба s на диаметре d от толщины s_W на диаметре d_W начальной окружности. Из геометрических соображений (рис. 7.1.9) видно, что

$$s_W = r_W\left(\frac{s}{r} - 2inv\alpha_W + 2inv\alpha\right), \qquad (7.1.29)$$

где

$$r = 0{,}5\,d = 0{,}5\,m\,z\,. \qquad (7.1.30)$$

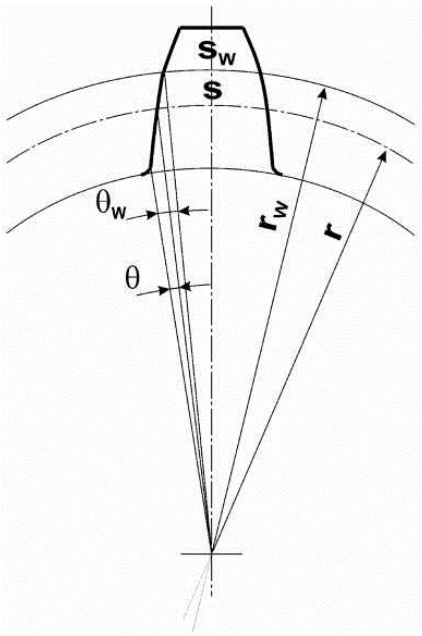


Рис. 7.1.9

Тогда для пары колес в контакте имеем

$$s_{W1} = r_{W1}\left(\frac{s_1}{r_1} - 2inv\alpha_W + 2inv\alpha\right);$$

$$s_{W2} = r_{W2}\left(\frac{s_2}{r_2} - 2inv\alpha_W + 2inv\alpha\right). \qquad (7.1.31)$$

Учитывая, что толщина зуба по делительной окружности равна величине впадины, запишем

$$s_{W1} + s_{W2} = \frac{2\pi r_{W1}}{z_1}. \qquad (7.1.32)$$

Кроме того, из (7.1.30) следуют очевидные соотношения $r_{W2} = r_{W1}\dfrac{z_2}{z_1}$, $r_2 = r_1\dfrac{z_2}{z_1}$. В результате после подстановки (7.1.31) в (7.1.32) и несложных преобразований получаем

$$\frac{2\pi\, r_{W1}}{z_1} = \frac{r_{W1}s_1}{r_1} - 2r_{W1}inv\alpha_W + 2r_{W1}inv\alpha + \frac{r_{W2}s_2}{r_2} - 2r_{W2}inv\alpha_W + 2r_{W2}inv\alpha\,. \qquad (7.1.33)$$

Разрешая (7.1.33) относительно угла зацепления α_W, запишем

$$inv\alpha_W = inv\alpha + \frac{z_1(s_1 + s_2) - 2\pi r_1}{2r_1(z_1 + z_2)}. \qquad (7.1.34)$$

При положительном смещении рейки толщина зуба по делительной окружности увеличивается (рис. 7.1.10; штриховой линией обозначен исходный контур без смещения, сплошной — со смещением) на величину $2|AB| = 2mxtg\alpha$. Тогда

$$s_1 = m\left(\frac{\pi}{2} + 2x_1tg\alpha\right); \qquad s_2 = m\left(\frac{\pi}{2} + 2x_2tg\alpha\right);$$

$$s_1 + s_2 = m\pi + 2mtg\alpha\,(x_1 + x_2). \qquad (7.1.35)$$

С учетом (7.1.35) выражение (7.1.34) переписывается в виде

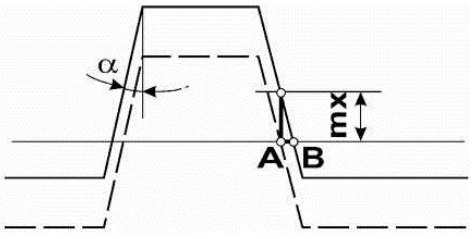


Рис. 7.1.10

$$inv\alpha_W = inv\alpha + \frac{2(x_1 + x_2)tg\alpha}{z_1 + z_2}. \qquad (7.1.36)$$

По полученной инволюте (7.1.36) из таблицы эвольвентных углов (табл. 7.1.1) можно определить угол зацепления α_W, а также с помощью (7.1.25) рассчитать величину межосевого расстояния a_W.

Особенности геометрического расчета косозубых и шевронных колес. Колесо, зуб которого наклонен под углом β к оси вращения, называется *косозубым.* Два косозубых колеса с противоположным направлением зубьев образуют *шевронное колесо.* Прочность косозубых и шевронных колес выше, чем прямозубых, за счет увеличения осевой длины контакта, причем чем больше угол наклона зуба, тем колесо прочнее. С другой стороны, увеличение угла вызывает значительные дополнительные осевые нагрузки, поэтому для косозубых колес рекомендуется принимать угол наклона равным $\beta = (8 \div 15)^0$. Для шевронных колес, в которых осевые нагрузки скомпенсированы противоположным направлением зубьев, диапазон для выбора угла наклона существенно расширяется: $\beta = (30 \div 45)^0$.

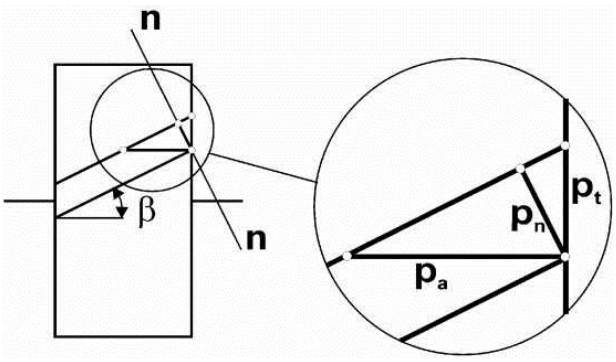


Рис. 7.1.11

Технологически изготовление косозубых колес не отличается от прямозубых. Разница только в том, что инструмент при нарезании перемещается под углом β. Следовательно, параметры косозубого колеса в нормальном сечении совпадают с параметрами прямозубого. Модуль инструмента равен модулю в нормальном сечении. В качестве расчетных параметров косозубых колес принимают параметры торцевого сечения. В дальнейшем признаком нормального сечения будет наличие у соответствующих величин индекса n, а торцевого — t (рис. 7.1.11).

Модули торцевого и нормального сечений связаны соотношением

$$m_t = \frac{m_n}{\cos\beta}, \tag{7.1.37}$$

а углы зацепления —

$$tg\alpha_t = \frac{tg\alpha}{\cos\beta}. \tag{7.1.38}$$

В торцевом сечении меняется также угол контакта α_W, который в этом сечении обозначаем как α_{tW}.

Подрезание профилей зубьев. Если количество зубьев колеса невелико, то может произойти явление, которое получило название *подреза*. В этом случае траектория относительного движения конца профиля зуба одного колеса пересекается с эвольвентной частью профиля зуба сопряженного колеса. Зуб, подрезанный у основания, теряет прочность. Подреза можно избежать, вводя смещение инструментального контура при нарезании. Без доказательства запишем, что в случае реечного зацепления при отсутствии смещения

$$z_{\min} = \frac{2h_a^*}{\sin^2\alpha}, \tag{7.1.39}$$

где $z_{\min}$ — наименьшее число зубьев колеса, при нарезании которых подреза не

произойдет, h_a^* — коэффициент высоты головки зуба. Например, для угла зацепления $\alpha = 20^0$ и $h_a^* = 1$ из (7.1.39) получаем $z_{\min} = 17$.

Избежать подреза можно, меняя угол профиля, для чего обычно применяется нестандартный профиль, выполненный с некоторым смещением. Для стандартного профиля минимальный коэффициент смещения x, при котором нет подреза, можно определить из соотношения

$$x = \frac{h_a^*\left(z_{\min} - z\right)}{z_{\min}}.$$

Для $h_a^* = 1$ отсюда следует, что

$$x = \frac{17 - z}{17}. \qquad (7.1.40)$$

Если взять зуб с укороченной высотой головки, $h_a^* = 0{,}8$, то без подреза можно нарезать меньшее число зубьев: $z_{\min} = 14$.

В современных конструкциях допускается небольшой подрез, а величина коэффициента смещения при $h_a^* = 1$ может быть определена по формуле

$$x = \frac{14 - z}{14}. \qquad (7.1.41)$$

Близкие результаты получаются, если следовать рекомендациям японского стандарта JIS, согласно которому для нарезания без подреза должно быть выполнено условие

$$x > 1 - \frac{z \sin^2 \alpha}{2} = 1 - 0{,}05849z. \qquad (7.1.42)$$

Интерференция зубьев колеса. Для передач внутреннего зацепления наибольшую опасность представляет интерференция зубьев колес, когда зубья большего и меньшего колес касаются друг друга вершинами либо пересекаются. Явление интерференции ограничивает количество зубьев колеса внутреннего зацепления снизу. Это означает, что число зубьев шестерни определяет минимальное число зубьев колеса, которое обеспечивает отсутствие интерференции.

Аналитическое описание явление интерференции зубьев довольно сложно, и приводить их здесь не имеет смысла. Однако в настоящее время разработаны различные программные продукты, способные анимировать как процедуру нарезания зуба, так и собственно процедуру зацепления. В результате аналитическую проверку отсутствия интерференции можно заменить анализом анимационной картинки, построенной по результатам геометрического расчета и виртуального нарезания на компьютере. Кроме того, анимация процесса нарезания дает возможность легко проверить наличие (или отсутствие) таких явлений, как подрез и заострение зуба. Изменяя модуль передачи и другие параметры исходного контура, а также варьируя величину смещения этого контура по отношению к заготовке, можно получать ту форму зуба, которая удовлетворяет проектировщика по всем необходимым критериям.

Торцевое перекрытие. Очевидно, что контакт зуба колеса начинается на линии зацепления в точке a и заканчивается на линии зацепления в точке b (рис. 7.1.12). Угол поворота колеса от положения входа зуба в зацепление до выхода из него называется *углом перекрытия* и обозначается через φ_α. Определим угловой шаг зубьев τ как $\tau = \dfrac{2\pi}{z}$ и введем коэффициент торцевого перекрытия ε_a как отношение угла перекрытия колеса к его угловому шагу:

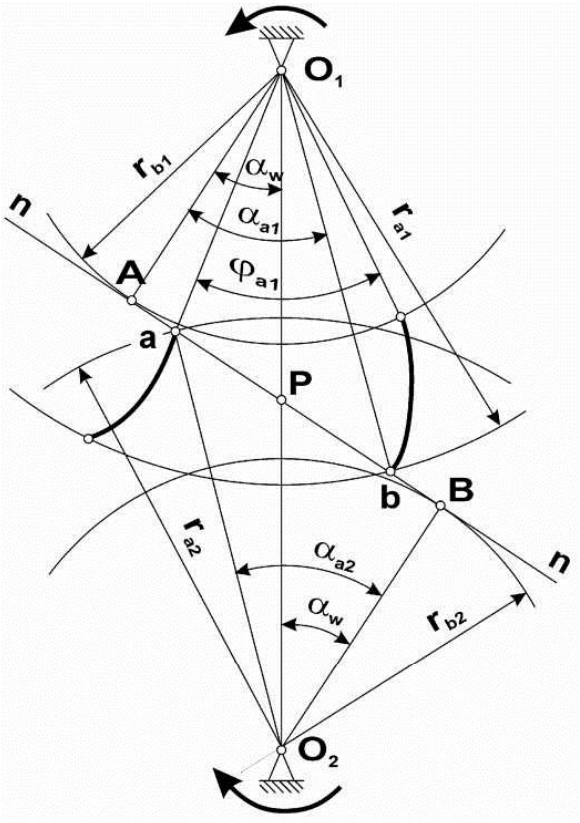


Рис. 7.1.12

$$\varepsilon_\alpha = \frac{\varphi_{\alpha 1}}{\tau_1} = \frac{\varphi_{\alpha 2}}{\tau_2}. \qquad (7.1.43)$$

Смысл коэффициента торцевого перекрытия заключается в следующем: величина $(\varepsilon_\alpha - 1)$ равна числу одновременно зацепляющихся зубьев. Для обеспечения непрерывного контакта зубьев необходимо выполнение условия

$$\varepsilon_\alpha > 1. \qquad (7.1.44)$$

Так как из определения эвольвенты следует, что длина дуги развертки эвольвенты равна длине отрезка касательной, нормальной к поверхности эвольвенты, то

$$\varphi_{\alpha 1} = \frac{|ab|}{r_{b1}}. \qquad (7.1.45)$$

Тогда коэффициент перекрытия (7.1.43) с учетом (7.1.45) определится выражением

$$\varepsilon_\alpha = \frac{|ab| z_1}{2\pi r_{b1}} = \frac{|ab| z_2}{2\pi r_{b2}}. \qquad (7.1.46)$$

Отрезок $|ab|$, как следует из рассмотрения треугольников O_1Ab, O_1AP, O_2Ba и O_2BP на рис. 7.1.12, для внешнего зацепления равен

$$|ab| = |Ab| - |AP| + |Ba| - |BP|,$$

или

$$|ab| = r_{b1}\left(tg\alpha_{a1} - tg\alpha_W\right) + r_{b2}\left(tg\alpha_{a2} - tg\alpha_W\right), \qquad (7.1.47)$$

где

$$\cos\alpha_{a1} = \frac{r_{b1}}{r_{a1}}; \qquad \cos\alpha_{a2} = \frac{r_{b2}}{r_{a2}}. \qquad (7.1.48)$$

С учетом (7.1.4) выражение (7.1.46) представляется в виде

$$\varepsilon_\alpha = \frac{1}{2\pi}\left[z_1\left(tg\alpha_{a1} - tg\alpha_W\right) + z_2\left(tg\alpha_{a2} - tg\alpha_W\right)\right]. \qquad (7.1.49)$$

В общем случае

$$\varepsilon_\alpha = \frac{1}{2\pi}\left[z_1 tg\alpha_{a1} \pm z_2 tg\alpha_{a2} \mp \left(z_2 \pm z_1\right) tg\alpha_W\right]. \qquad (7.1.50)$$

Здесь верхний знак относится ко внешнему зацеплению, а нижний — ко внутреннему.

Для косозубых колес дополнительно имеет место *осевое* перекрытие, которое характеризуется коэффициентом осевого перекрытия ε_β:

$$\varepsilon_\beta = \frac{\varphi_{\beta 1}}{\tau_1} = \frac{\varphi_{\beta 2}}{\tau_2}. \qquad (7.1.51)$$

Здесь φ_β — угол осевого перекрытия, равный углу поворота, при котором точка контакта зубьев перемещается от одного торца колеса до другого. Коэффициент осевого перекрытия можно рассчитать по формуле

$$\varepsilon_\beta = \frac{b}{p_a} = \frac{b\sin\beta}{\pi m_n}, \qquad (7.1.52)$$

где b — ширина колеса (либо полушеврона в случае шевронных колес), p_a — осевой шаг (рис. 7.1.11).

Эффект от применения косозубой передачи считается достигнутым, если выполняется условие $\varepsilon_\beta > 1{,}1$. Общий коэффициент перекрытия ε_γ определяет нагрузочную способность передачи:

$$\varepsilon_\gamma = \varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta. \qquad (7.1.53)$$

Для прямозубой передачи $\varepsilon_\beta = 0$, а общий коэффициент торцевого перекрытия должен быть не менее

$$\varepsilon_\gamma = \varepsilon_\alpha > 1{,}2. \qquad (7.1.54)$$

Практически это означает, что 20% времени работы передачи в контакте будут находиться два зуба, а остальное время — один.

Сводные формулы геометрического расчета цилиндрических зубчатых передач. Подводя итог геометрического расчета прямозубых и косозубых цилиндрических передач наружного и внутреннего зацеплений, приведем сводную таблицу необходимых формул. Отметим, что во всех зависимостях, относящихся к прямозубым передачам, необходимо положить $\beta = 0$, а также вместо нормального модуля m_n брать модуль m.

Таблица 7.1.3. **Сводные формулы геометрического расчета передач**

Название параметра		**Обозначение и расчетные формулы**
Исходные данные		
Число зубьев	шестерни	z_1
	колеса	z_2
Нормальный модуль		m_n
Угол наклона зуба		β
Параметры исходного контура		
Угол профиля		α
Коэффициент высоты головки		h_a^*
Коэффициент радиального зазора		c^*
Коэффициент смещения инструмента	шестерни	x_1
	колеса	x_2
Ширина венца	шестерни	b_1
	колеса	$b_2 = b_W$
Расчетные геометрические зависимости		
Делительное межосевое расстояние		$a = \dfrac{(z_2 \pm z_1)m_n}{2\cos\beta}$ *)
Коэффициент суммы смещений		$x_\Sigma = x_2 \pm x_1$
Угол профиля		$tg\alpha_t = \dfrac{tg\alpha}{\cos\beta}$
Угол зацепления		$inv\alpha_{tW} = \dfrac{2x_\Sigma tg\alpha_t}{z_2 \pm z_1} + inv\alpha_t$
Межосевое расстояние		$a_W = \dfrac{(z_1 \pm z_2)m_n \cos\alpha_t}{2\cos\beta\cos\alpha_{tW}}$
Делительный диаметр	шестерни	$d_1 = \dfrac{z_1 m_n}{\cos\beta}$
	колеса	$d_2 = \dfrac{z_2 m_n}{\cos\beta}$
Передаточное отношение		$u = \dfrac{z_2}{z_1}$

Расчетные геометрические зависимости		
Начальный диаметр	шестерни	$d_{W1} = \dfrac{2a_W}{u \pm 1}$
	колеса	$d_{W2} = \dfrac{2a_W u}{u \pm 1}$
Коэффициент воспринимаемого смещения		$y = \dfrac{a_W - a}{m_n}$
Коэффициент уравнительного смещения		$\delta_y = x_2 \pm x_1 - y$
Диаметр вершин зубьев	шестерни	$d_{a1} = d_1 + 2m_n\left(h_a^* + x_1 - \delta_y\right)$
	колеса	$d_{a2} = d_2 + 2m_n\left(h_a^* + x_2 - \delta_y\right)^{**)}$
Диаметр впадин	шестерни	$d_{f1} = d_1 - 2m_n\left(h_a^* + c^* - x_1\right)$
	колеса	$d_{f2} = d_2 - 2m_n\left(h_a^* + c^* - x_2\right)^{**)}$
Высота зуба	шестерни	$h_1 = 0{,}5\left(d_{a1} - d_{f1}\right)$
	колеса	$h_2 = 0{,}5\left(d_{a2} - d_{f2}\right)$

*) здесь и далее в таблице знак «+» относится к случаю наружного зацепления, а «–» — внутреннего.

**) при изготовлении реального внутреннего зацепления прямозубых передач необходимо учитывать параметры инструмента (долбяка), поэтому в этом смысле формулы для определения диаметров вершин зубьев и впадин являются приближенными; более точные приближенные формулы для определения d_{a2} и d_{f2} имеют вид

$$d_{a2} = d_2 - 2\left(h_a^* - x_2 + \delta_y - k\right)m, \text{ где} \qquad k = 0{,}25 - 0{,}125x_2 \text{ при } x_2 < 2;$$

$$k = 0 \text{ при } x_2 \geq 2;$$

$$d_{f2} \approx 2a_W + d_{a1} + 2cm.$$

7.1.2. Силовой расчет цилиндрических зубчатых передач

Силы, действующие в зацеплении цилиндрических зубчатых колес.

С практической точки зрения важным является вопрос об определении сил, действующих в зубчатом зацеплении, так как картина силового взаимодействия в контакте зубьев является основой для прочностного расчета зубчатых передач (под прочностным понимают расчет контактной прочности и прочности на изгиб). Кроме того, знание значений сил, действующих в зацеплении, необходимо при расчете валов, подшипников и других деталей, сопряженных с зубчатыми колесами.

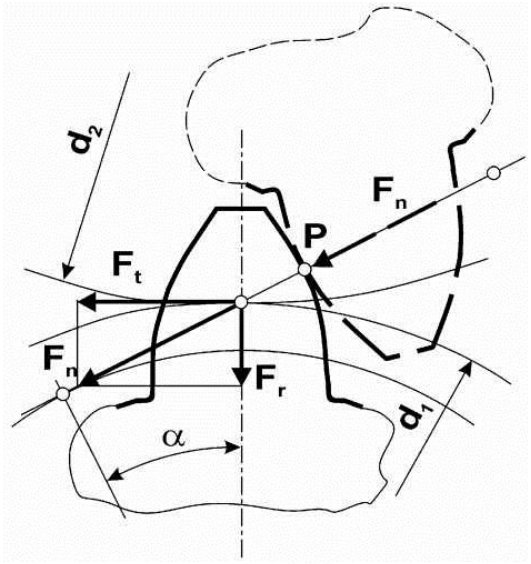


Рис. 7.1.13

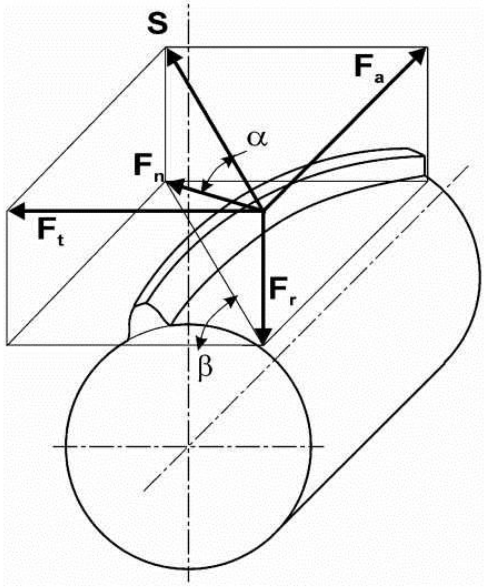


Рис. 7.1.14

Заметим, что при проведении прочностного анализа можно принимать $d_W \approx d$, $\alpha_W \approx \alpha$, поскольку такая замена, как нетрудно убедиться прямыми вычислениями, не вносит существенных погрешностей в расчеты зубчатых колес и связанных с ними деталей. Поэтому в дальнейшем, если противное не оговорено особо, все расчеты, кроме геометрических, будем проводить для делительной окружности колеса.

Рассмотрим контакт двух зубьев *прямозубых колес* (рис. 7.1.13). В контакте приложена сила $\vec{F}_n$, нормальная к поверхности зубьев, которая направлена вдоль линии зацепления. Эта сила может быть разложена на две составляющие, $\vec{F}_t$ и $\vec{F}_r$, первая из которых является касательной к основной окружности и называется *окружной*, а вторая направлена по радиусу к центру вращения и называется *радиальной.* Очевидно, что модули этих составляющих связаны между собой соотношением

$$F_r = F_t \, tg\alpha \, . \tag{7.1.55}$$

Окружную силу F_t удобно записать через передаваемый зацеплением момент:

$$F_t = \frac{2T_1 \cdot 10^3}{d_1} = \frac{2T_2 \cdot 10^3}{d_2}, \tag{7.1.56}$$

где T_1 (T_2) — момент вращения на шестерне (колесе) диаметром начальной окружности d_1 (d_2), связанный с мощностью P_1 (P_2) и частотой вращения n_1 (n_2) соотношением (6.6):

$$T_1 = \frac{9550\, P_1}{n_1}; \quad T_2 = \frac{9550\, P_2}{n_2}.$$

В случае *косозубых колес* нормальная сила $\vec{F}_n$ может быть разложена на три взаимно перпендикулярных направления (рис. 7.1.14). Здесь:

F_t — окружная составляющая общей силы,

F_a — осевая составляющая (направленная вдоль оси колеса),

F_r — радиальная составляющая,

S — проекция полной нормальной силы на горизонтальную плоскость.

Выразим каждую из составляющих результирующей силы через параметры, удобные для практических вычислений. Очевидно, что

$$S = \frac{F_t}{\cos\beta}; \quad F_a = F_t tg\beta; \quad F_r = Stg\alpha = \frac{F_t tg\alpha}{\cos\beta}. \tag{7.1.57}$$

Распределение нагрузки в зубчатых передачах. При проектировании зубчатых передач необходимо знать не только значения действующих в зацеплении сил, но и характер их распределения по длине зуба, т. к. расчет прочности зуба колеса выполняется для наиболее нагруженных участков.

Если предположить, что находящиеся в контакте зубья подвержены только контактным деформациям, а другие детали, прямо или косвенно сопряженные с зубчатой парой, являются абсолютно жесткими, то при условии отсутствия погрешностей изготовления этих деталей распределение давления вдоль контактной линии можно считать равномерным. При этом в случае, когда в зацеплении находится только один зуб, выражение для определения величины удельного нормального давления q_n записывается как

$$q_n = \frac{F_n}{b} = \frac{F_t}{b\cos\alpha}. \tag{7.1.58}$$

Однако в действительности равномерное распределение давления по длине зуба в реальном зацеплении маловероятно. Связано это с тем, что жесткость зубьев переменна по длине. Кроме того, имеет место различная деформация подшипников, валов, элементов корпуса и т. д. Все это приводит к неравномерному распределению давления. Учесть такую неравномерность можно введением некоторых поправочных коэффициентов. Аналогичные поправочные коэффициенты целесообразно применять для учета динамического фактора, влияющего на величину давления на зуб, а также при описании неравномерности нагружения зубьев (последнее относится к многопарным зацеплениям). Рассмотрим эти поправочные коэффициенты подробнее.

а) Коэффициент концентрации нагрузки по контактным напряжениям $K_{H\beta}$. Под коэффициентом концентрации нагрузки $K_{H\beta}$ понимается отношение величины наибольшего давления $q_{\max}$ в контакте зубьев к величине среднего давления q_m, полученного в предположении его равномерного распределения по длине (рис. 7.1.15):

$$K_{H\beta} = q_{\max} / q_m. \tag{7.1.59}$$

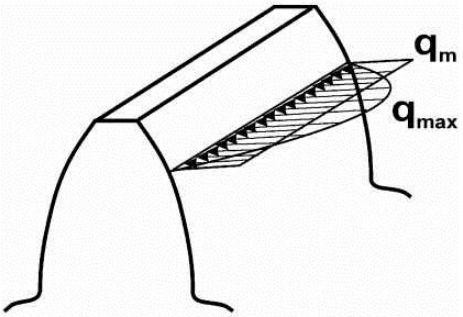


Рис. 7.1.15

Введем далее геометрический коэффициент $\psi_{bd} = b/d_1 < 1{,}6$. Тогда полученные в виде номограмм результаты экспериментальных исследований, выполненных с целью определения коэффициента концентрации, можно представить в виде таблицы удобных для дальнейших численных расчетов приближенных формул (табл. 7.1.4). Еще раз подчеркнем, что приведенные в табл. 7.1.4 формулы являются приближенными, поэтому при наличии более достоверных данных следует использовать именно их.

Таблица 7.1.4. **Коэффициент концентрации нагрузки $K_{H\beta}$**

Размещение шестерни относительно опор	$HRC \geq 35$	$HRC < 35$
	$1{,}0 < \psi_{bd} < 1{,}6$	
Консольное	$1{,}0 + 0{,}766\psi_{bd}$	$1{,}0 + 0{,}3466\psi_{bd}$
Асимметричное	$1{,}0 + 0{,}275\psi_{bd}$	$1{,}0 + 0{,}1275\psi_{bd}$
Симметричное	$1{,}0 + 0{,}1388\psi_{bd}$	$1{,}0 + 0{,}0086\psi_{bd}$
	$\psi_{bd} < 1{,}0$	
Консольное	$1{,}0 + 0{,}766\psi_{bd}$	$1{,}0 + 0{,}4466\psi_{bd}$
Асимметричное	$1{,}0 + 0{,}275\psi_{bd}$	$1{,}0 + 0{,}1\psi_{bd}$
Симметричное	$1{,}0 + 0{,}052\psi_{bd}$	$1{,}0 + 0{,}0373\psi_{bd}$

Отметим также, что более строгий расчет коэффициента концентрации чрезвычайно сложен и не всегда оправдан, поскольку он включает в себя решение контактной задачи методом конечных элементов с учетом жесткости сопряженных деталей и точности их изготовления.

b) Коэффициент концентрации нагрузки по напряжениям изгиба $K_{F\beta}$**.** В отличие от расчета контактных напряжений, когда наибольшие давления напрямую зависят от коэффициента концентрации $K_{H\beta}$, на определение напряжений изгиба характер распределения давлений влияет косвенно. Учесть это обстоятельство можно введением условного коэффициента концентрации нагрузки по напряжениям изгиба $K_{F\beta}$. По аналогии с расчетом на контактную прочность значение коэффициента концентрации напряжений изгиба можно определить, пользуясь таблицей 7.1.5.

Таблица 7.1.5. **Коэффициент концентрации нагрузки** $K_{F\beta}$

Размещение шестерни относительно опор	$HRC \geq 35$	$HRC < 35$
	$1{,}0 < \psi_{bd} < 1{,}6$	
Консольное	$1{,}0 + 1{,}2\psi_{bd}$	$1{,}0 + 0{,}733\psi_{bd}$
Асимметричное	$1{,}0 + 0{,}417\psi_{bd}$	$1{,}0 + 0{,}294\psi_{bd}$
Симметричное	$1{,}0 + 0{,}265\psi_{bd}$	$1{,}0 + 0{,}125\psi_{bd}$
	$\psi_{bd} < 1{,}0$	
Консольное	$1{,}0 + 1{,}2\psi_{bd}$	$1{,}0 + 1{,}1\psi_{bd}$
Асимметричное	$1{,}0 + 0{,}42\psi_{bd}$	$1{,}0 + 0{,}22\psi_{bd}$
Симметричное	$1{,}0 + 0{,}155\psi_{bd}$	$1{,}0 + 0{,}07\psi_{bd}$

c) Коэффициент динамичности нагрузки по контактным напряжениям K_{Hv}. К числу важных факторов, влияющих на величину нагрузки на зуб, следует отнести динамический. Очевидно, что по мере возрастания скорости вращения неравномерность вращения зубчатой пары увеличивается, т. к. сказываются неизбежные погрешности изготовления деталей. В свою очередь, изменение скорости вращения является причиной появления ускорений и, как следствие этого, возникновения динамических сил. Следовательно, на величину динамической составляющей нагрузки основное влияние оказывают точность изготовления и окружная скорость в контакте зубчатых колес.

Следует подробнее остановиться на описании степени точности зубчатого зацепления Np, которая напрямую зависит от многих факторов. Степень точности характеризуется классом, или квалитетом, причем чем выше степень точности, тем меньше значение класса. Наивысшая точность обеспечивается эталонным нулевым классом. Реальные передачи изготавливаются с классом точности не выше 4-го.

Различают *кинематическую точность*, которая определяет отклонение угла поворота колеса от расчетного значения (кинематическая точность особенно важна при проектировании высокоточных передач, следящих систем и т. п.), *ошибку плавности*, описывающую величину колебания скорости, точность по *пятну контакта* для передач больших нагрузок, и точность получения *бокового зазора*. Каждая из ошибок точности может иметь свое значение, но при изготовлении зубчатого зацепления обычно задается равная степень по всем видам точности.

Если степень точности передачи не оговорена заранее, то она может быть представлена как функция скорости. Ниже приведены рекомендации по выбору степени точности изготовления зубчатых передач:

$$Np = \mathrm{int}(10{,}1 - 0{,}2v) \quad \text{при } \beta = 0, \tag{7.1.60}$$

$$Np = \mathrm{int}(10{,}1 - 0{,}12v) \quad \text{при } \beta > 0, \tag{7.1.61}$$

где int — целая часть действительной переменной, v — окружная скорость вращения. Формулы (7.1.60—7.1.61) справедливы в диапазоне точности $Np = 5 \div 8$.

Числовой характеристикой динамической составляющей нагрузки является коэффициент динамичности нагрузки по контактным напряжениям $K_{H\nu}$, под которым понимают отношение фактической силы в контакте, дополненной динамической компонентой ΔF_d, т. е. $F + \Delta F_d$, к средней нагрузке при статическом нагружении F:

$$K_{H\nu} = \frac{F + \Delta F_d}{F}. \qquad (7.1.62)$$

Выражение (7.1.62) для коэффициента динамичности нагрузки можно переписать в иной форме, а именно

$$K_{H\nu} = 1 + \frac{\Delta F_d}{F_t K_{H\beta}} = 1 + \frac{\omega_{H\nu} b d_1}{2T_1 \cdot 10^3 K_{H\beta}}, \qquad (7.1.63)$$

где $\omega_{H\nu}$ — удельная окружная динамическая сила (т. е. сила, приходящаяся на единицу длины зуба), величина которой определяется по эмпирической формуле

$$\omega_{H\nu} = \delta_H g_{OH} v \sqrt{\frac{a}{u}} \le \omega_{\max}. \qquad (7.1.64)$$

d) Коэффициент динамичности нагрузки по напряжениям изгиба $K_{F\nu}$. По аналогии с (7.1.63) запишем

$$K_{F\nu} = 1 + \frac{\Delta F_d}{F_t K_{F\beta}} = 1 + \frac{\omega_{F\nu} b d_1}{2T_1 \cdot 10^3 K_{F\beta}}; \qquad (7.1.65)$$

$$\omega_{F\nu} = \delta_F g_{OF} v \sqrt{\frac{a}{u}} \le \omega_{\max}. \qquad (7.1.66)$$

В (7.1.64) и (7.1.66) δ_H и δ_F — зависящие от геометрии зубчатого зацепления и твердости колеса коэффициенты, значения которых приведены в таблице 7.1.6а (как следует из табл. 7.1.6а, δ_F не зависит от твердости поверхности.); g_{OH} и g_{OF} — некоторые функции точности изготовления и модуля, которые учитывают влияние погрешности шагов (табл. 7.1.6b).

Таблица 7.1.6а. **Коэффициенты δ_H и δ_F**

	$H1 < 350HB$ или $H2 < 350HB$	$H1 > 35HRC$ и $H2 > 35HRC$
Прямозубые колеса	$\delta_H = 0{,}006$, $\delta_F = 0{,}016$	$\delta_H = 0{,}014$, $\delta_F = 0{,}016$
Косозубые колеса	$\delta_H = 0{,}002$, $\delta_F = 0{,}006$	$\delta_H = 0{,}004$, $\delta_F = 0{,}006$

В таблице 7.1.6а под H1 и H2 подразумевается твердость поверхности зуба шестерни и колеса соответственно.

Полученные с помощью (7.1.64) и (7.1.66) значения ω_{Hv} и ω_{Fv} не должны превышать величину $\omega_{\max}$:

$$\omega_{\max} = \left(4Np - 15\right)m + 0{,}1Np^{0{,}4}. \qquad (7.1.67)$$

Таблица 7.1.6b. **Коэффициенты** $g_O = g_{OF} = g_{OH}$

Модуль m, мм	Степень точности					
	4	5	6	7	8	9
$m \le 3{,}55$	17	28	38	47	56	73
$3{,}55 < m \le 10$	22	31	42	53	61	82
$m > 10$	—	37	48	64	73	100

е) Коэффициенты неравномерности нагружения зубьев $K_{H\alpha}$ ***и*** $K_{F\alpha}$ ***(для многопарного зацепления).*** При многопарном зацеплении зубья зубчатых колес нагружены неравномерно, что можно учесть с помощью поправочных коэффициентов $K_{H\alpha}$ и $K_{F\alpha}$. Коэффициент неравномерности нагружения зубьев $K_{H\alpha}$ при расчетах по контактным напряжениям зависит от точности изготовления зубчатой передачи и от окружной скорости вращения колес v. Эта зависимость мало влияет на контактную прочность, и для точно изготовленных передач рассматриваемый коэффициент лежит в пределах $K_{H\alpha} = 1{,}0 \div 1{,}1$. При выполнении расчетов допустимо пользоваться его средним значением, т. е.

$$K_{H\alpha} = 1{,}05. \qquad (7.1.68)$$

Что касается расчетов на изгиб, то значение коэффициента $K_{F\alpha}$ можно принять равным единице,

$$K_{F\alpha} = 1. \qquad (7.1.69)$$

7.1.3. Причины разрушения и критерии расчета зубчатых передач

Наиболее опасной причиной разрушения зубчатых колес является поломка зуба, вызванная изгибом. Этот вид разрушения носит усталостный характер и начинается с зарождения трещины в наиболее напряженной части: у основания зуба в зоне растяжения. Размеры трещины увеличиваются и достигают таких значений, при которых происходит скол части зуба, или *излом*. Для предотвращения такого вида разрушения зубчатые колеса рассчитываются на *прочность по изгибу*.

Еще одной, самой распространенной, причиной разрушения зубчатых колес является так называемое *выкрашивание* контактной поверхности зубьев, которое

характерно для передач, работающих в условиях обильной смазки. Выкрашивание также носит усталостный характер и начинается с образования трещин на контактной поверхности зубьев, рост которых приводит к отслаиванию локальных участков поверхности. Для того чтобы избежать выкрашивания, проводят проверку *контактной прочности* передачи.

При проектировании малонагруженных передач, как металлических, так и изготовленных из неметаллических материалов, необходимо учитывать, что основной причиной нарушения их работоспособности является *износ*. Такое разрушение характерно и для открытых передач, т. е. передач, эксплуатируемых в условиях сильного загрязнения среды, и для передач, работающих при недостаточной смазке. При этом поверхность зуба истирается, а сам зуб истончается и может разрушиться из-за потери прочности. Методика расчета износостойкости таких передаточных механизмов до настоящего времени не разработана, поэтому для определения их основных геометрических размеров проводят расчет прочности на изгиб. Скорость износа при этом определяется соответствующим выбором величины допускаемого напряжения. Очевидно, что износ может повлиять и на другие параметры зубчатого зацепления, такие как потеря точности, повышенный шум, вибрация и т. п.

В отдельных случаях в зубчатых передачах наблюдается явление *заедания*, при котором имеет место межмолекулярное взаимопроникновение частиц зубьев колеса и шестерни из-за повышенных температур в контакте. Повышение температуры, в свою очередь, может быть вызвано большими скоростями относительного скольжения зубьев.

Расчет контактной прочности цилиндрических зубчатых передач с прямым зубом. В точке соприкосновения зубьев возникают контактные напряжения, что, в конечном итоге, приводит к усталостному разрушению контактной поверхности зуба, которое выражается в выкрашивании этой поверхности. Главным фактором, влияющим на процесс выкрашивания, является величина наибольшего напряжения в точках контакта зубьев.

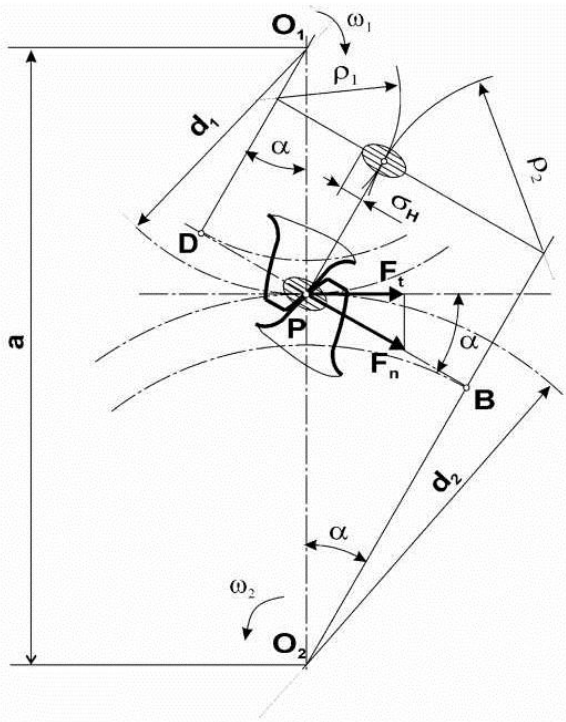


Рис. 7.1.16

Рассмотрим случай контактного взаимодействия зубьев в полюсе зацепления, где существует наибольшая вероятность возникновения усталостных трещин (рис. 7.1.16).

Выберем следующую модель контактного взаимодействия в зацеплении: зубья представляются в виде двух цилиндров с радиусами ρ_1 и ρ_2. При такой интерпретации для характеристики напряженного состояния можно использовать решение контактной задачи теории упругости — задачи Герца (глава 3.2).

Здесь мы приведем некоторые результаты, относящиеся к расчету напряжений в контакте зубьев. Примерная картина напряжений в точках взаимного сопряжения изображена на рис. 7.1.16.

Максимальное напряжение σ_H при линейном касании двух цилиндров, как следует из (3.2.17), в настоящих обозначениях равно

$$\sigma_H = \sqrt{\frac{E_1 E_2}{E_1\left(1-\mu_2^2\right)+E_2\left(1-\mu_1^2\right)}\cdot\frac{q_n}{\pi\rho}}, \qquad (7.1.70)$$

где E_1, E_2 и μ_1, μ_2 — соответственно модули упругости и коэффициенты Пуассона материалов зубчатых колес; q_n — нормальная нагрузка на единицу длины контактной линии зуба. Величина $1/\rho$ имеет смысл суммарной кривизны контактирующих цилиндров:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_1} \pm \frac{1}{\rho_2}. \qquad (7.1.71)$$

Здесь и далее знак " + " отвечает случаю наружного зацепления, а знак " – " — внутреннего.

Из геометрических соображений очевидно, что

$$\rho_1 = |BP| = 0{,}5 d_1 \sin\alpha; \qquad \rho_2 = |DP| = 0{,}5 d_2 \sin\alpha. \qquad (7.1.72)$$

Тогда, с учетом (7.1.72), выражение (7.1.71) для суммарной кривизны приобретает вид

$$\frac{1}{\rho} = \frac{2\left(d_1 \pm d_2\right)}{d_1 d_2 \sin\alpha} = \frac{2\left(u \pm 1\right)}{d_2 \sin\alpha}; \qquad u = d_2 / d_1. \qquad (7.1.73)$$

Если предположить, что в зацеплении находится один зуб, т. е. зацепление однопарное, то введение с помощью (7.1.59) и (7.1.62) поправочных коэффициентов $K_{H\beta}$ и K_{Hv} позволяет уточнить формулу (7.1.58), записав ее для наибольшей удельной нормальной нагрузки на зуб:

$$q_{n\max} = \frac{F_t K_{H\beta} K_{Hv}}{b\cos\alpha}. \qquad (7.1.74)$$

Для многопарного зацепления величина максимального удельного давления в контакте для одной пары зубьев без учета торцевого перекрытия находится как

$$q_{n\max} = \frac{F_t K_{H\alpha} K_{H\beta} K_{Hv}}{b\cos\alpha}. \qquad (7.1.75)$$

Напомним, что определение максимального удельного давления потребовалось потому, что зарождение усталостных трещин начинается в наиболее нагруженных точках, для которых и выполняется прочностной расчет.

Подставляя далее (7.1.73) и (7.1.74) в (7.1.70), получаем выражение для расчета напряжения σ_H в контакте зубьев в случае однопарного зацепления:

$$\sigma_H = Z_M \sqrt{\frac{2F_t\left(u \pm 1\right)K_{H\beta}K_{Hv}}{\pi b\cos\alpha \cdot d_2 \sin\alpha}}. \qquad (7.1.76)$$

Здесь Z_M — постоянная, зависящая от параметров материалов колес:

$$Z_M = \sqrt{\frac{E_1 E_2}{E_1\left(1-\mu_2^2\right)+E_2\left(1-\mu_1^2\right)}}. \qquad (7.1.77)$$

Однако, как было показано выше, если в реальном зацеплении некоторое время в контакте находятся два зуба, то возникает торцевое перекрытие. Это явление можно учесть введением коэффициента Z_ε, учитывающего влияние перекрытия на величину напряжения в контакте. Коэффициент Z_ε является функцией величины торцевого перекрытия, и его значения могут быть определены следующим образом:

- для расчета пары косозубых колес

$$Z_\varepsilon = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon_\alpha}}, \qquad (7.1.78)$$

- для расчета пары прямозубых колес

$$Z_\varepsilon = \sqrt{\frac{4-\varepsilon_\alpha}{3}}. \qquad (7.1.79)$$

Введем коэффициент ширины ψ_{ba}, равный отношению ширины колеса к межосевому расстоянию, $\psi_{ba} = b/\alpha$. Тогда, учитывая формулу (7.1.56) связи окружного усилия F_t с моментом вращения T_2 на колесе, выражение (7.1.75) можно переписать для случая многопарного зацепления, а именно

$$\sigma_H = Z_M Z_\varepsilon Z_h \sqrt{\frac{4T_2\cdot 10^3(u\pm 1)K_{H\beta}K_{Hv}K_{H\alpha}}{d_2^2\psi_{ba}a}}, \qquad (7.1.80)$$

где $Z_h = \sqrt{\frac{2}{\pi \sin 2\alpha}}$ — параметр геометрии зацепления.

Отметим, что множитель 10^3 в формулах типа (7.1.80) появляется из-за соображений размерности, т. е. чтобы перевести размерность момента вращения T_2 из Н·м в Н·мм. Подставляя в (7.1.80) значение d_2 из (7.1.18), получим окончательное выражение для расчета максимального нормального напряжения в контакте зубьев зубчатых колес:

$$\sigma_H = Z_M Z_\varepsilon Z_h \sqrt{\frac{T_2\cdot 10^3(u\pm 1)^3 K_{H\beta}K_{Hv}K_{H\alpha}}{a^3 u^2 \psi_{ba}}} \le \sigma_{Ha}. \qquad (7.1.81)$$

В случае, если зубчатые колеса изготовлены из стали с параметрами $E_1 = E_2 = 2{,}1\cdot 10^5$ Н·мм$^{-2}$ и $\mu_1 = \mu_2 = 0{,}3$, причем угол зацепления равен $\alpha = 20^0$, а

коэффициент учета перекрытия — $Z_\varepsilon = 1{,}0$ и $Z_\varepsilon = 0{,}9$ для прямозубых и косозубых колес соответственно, то формулу (7.1.81) можно переписать в следующем виде:

- для прямозубых колес —

$$\sigma_H = 11 \cdot 10^3 \sqrt{\frac{T_2 (u \pm 1)^3 K_{H\beta} K_{Hv} K_{H\alpha}}{a^3 u^2 \psi_{ba}}} \le \sigma_{Ha};$$

- для косозубых колес —

$$\sigma_H = 9 \cdot 10^3 \sqrt{\frac{T_2 (u \pm 1)^3 K_{H\beta} K_{Hv} K_{H\alpha}}{a^3 u^2 \psi_{ba}}} \le \sigma_{Ha}.$$

Напряжение σ_{Ha} в правой части выражения (7.1.81) называется *допускаемым контактным напряжением*. Оно зависит от материала колес, их термообработки, твердости поверхности зубьев колес и т. д. Подробнее этот вопрос будет рассмотрен ниже.

Выбор коэффициента ширины ψ_{ba} остается за разработчиком. При этом целесообразно пользоваться следующими рекомендациями, выработанными практикой проектирования при различном расположении шестерни относительно опор:

- $\psi_{ba} = 0{,}30 \div 0{,}50$ — симметричном;
- $\psi_{ba} = 0{,}25 \div 0{,}40$ — асимметричном;
- $\psi_{ba} = 0{,}20 \div 0{,}25$ — консольном;
- $\psi_{ba} = 0{,}40 \div 0{,}60$ — для передач шевронными колесами.

Выражение (7.1.81), представляющее собой аналитическую запись условия контактной прочности зубьев, является основой для выполнения проверочного и проектировочного расчетов контактной прочности цилиндрических зубчатых колес. Кроме того, с его помощью можно рассчитать основные геометрические размеры этих передач. Покажем это.

Выражая межосевое расстояние a из условия прочности (7.1.81) и используя усредненные значения константы материала Z_M (7.1.77), коэффициента перекрытия Z_ε (7.1.78) — (7.1.79) и параметра зацепления Z_h, для контакта металлических ($E_1 = E_2 = 2{,}1 \cdot 10^5$ Н·мм$^{-2}$ и $\mu_1 = \mu_2 = 0{,}3$) прямозубых колес стандартного исходного контура ($\alpha = 20^0$) имеем

$$a = 495 (u \pm 1) \sqrt[3]{\frac{T_2 K_{H\alpha} K_{H\beta} K_{Hv}}{\psi_{ba} u^2 \sigma_{Ha}^2}}, \qquad (7.1.82)$$

а для зацепления металлическими косозубыми зубчатыми колесами —

$$a = 430 (u \pm 1) \sqrt[3]{\frac{T_2 K_{H\alpha} K_{H\beta} K_{Hv}}{\psi_{ba} u^2 \sigma_{Ha}^2}}. \qquad (7.1.83)$$

Знак “–” в (7.1.80) — (7.1.83), как обычно, относится к случаю внутреннего зацепления колес.

Расчет прочности зуба прямозубого колеса на изгиб. Установлено, что разрушение, приводящее к излому зуба, всегда начинается в зоне действия напряжения растяжения, причем наибольшее напряжение изгиба возникает в момент начала контакта зубьев. Поэтому все вычисления выполняем для зоны растяжения и момента начала контакта.

В качестве модели зуба выберем жестко закрепленную у основания балку, нагруженную моментом изгиба M_x и сжимающей нормальной силой F_n (рис. 7.1.17a). Предположим также, что нагрузка полностью воспринимается только одним зубом и действует статически. Это в данном случае означает, что коэффициент перекрытия считается равным единице, причем при фактической работе передачи не возникает динамических нагрузок.

Сечение зуба у основания представляет собой прямоугольник (рис. 7.1.17b), ширину которого обозначим через s, а длину — через b, так что его площадь равна $A = sb$. Такое сечение, с точки зрения прочности, называется *опасным сечением*. Заметим, что размеры s и b можно трактовать как толщину зуба и ширину колеса соответственно.

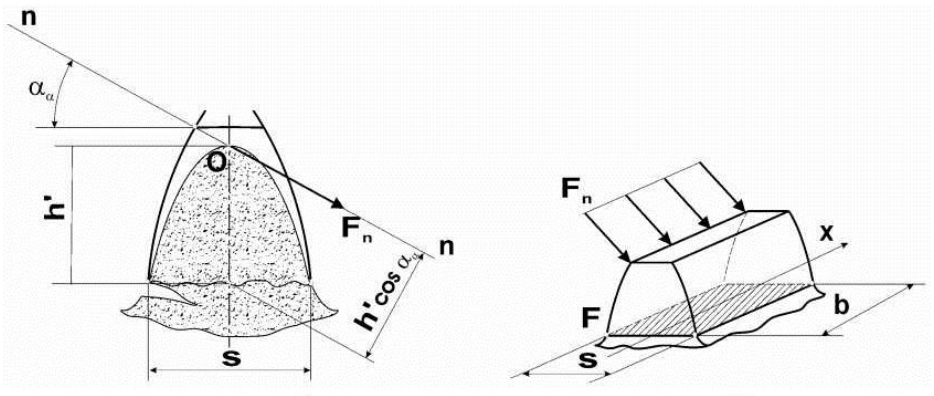
Если угол наклона силы F_n относительно основания зуба обозначить через α_α (угол давления), а высоту зуба — как h', то величина момента изгиба M_x относительно этого основания равна

$$M_x = F_n h' \cos\alpha_\alpha . \qquad (7.1.84)$$

Величина угла давления α_α принимается равной $28^0 \div 30^0$. Изгибающий момент вызывает появление напряжения растяжения у основания зуба, которое достигает максимальной величины σ_F (без учета концентраторов) на внешней поверхности основания:

$$\sigma_F = \frac{F_n h' \cos\alpha_\alpha}{W_x} - \frac{F_n \sin\alpha_\alpha}{A}, \qquad (7.1.85)$$

где $\dfrac{F_n \sin\alpha_\alpha}{A}$ — напряжение сжатия, вызванное радиальной составляющей нор-



a) b)

Рис. 7.1.17

мальной силы в опасном сечении зуба; $W_x = \dfrac{bs^2}{6}$ — момент сопротивления поперечного сечения зуба у его основания. Подставляя (7.1.84) в (7.1.85) и принимая во внимание, что нормальное удельное давление согласно (7.1.58) равно $q_n = \dfrac{F_n}{b}$, получаем

$$\sigma_F = q_n\left(\frac{6h'\cos\alpha_\alpha}{s^2} - \frac{\sin\alpha_\alpha}{s}\right). \qquad (7.1.86)$$

Геометрически толщина зуба s и его высота h' пропорциональны модулю m, т. е.

$$s = m\eta; \quad h' = m\chi\,. \qquad (7.1.87)$$

Здесь η и χ — коэффициенты пропорциональности. С учетом (7.1.87) выражение (7.1.86) принимает вид

$$\sigma_F = \frac{q_n}{m}\left(\frac{6\chi\cos\alpha_\alpha}{\eta^2} - \frac{\sin\alpha_\alpha}{\eta}\right). \qquad (7.1.88)$$

Расчет усталостной прочности на изгиб, также как и расчет контактной прочности, выполняется по наибольшим напряжениям, поскольку, как уже отмечалось выше, зарождение приводящей к разрушению усталостной трещины начинается в наиболее нагруженных точках зуба. В этой связи в расчетную формулу (7.1.88) следует вместо нормального удельного давления q_n подставлять значение наибольшего нормального удельного давления $q_{n\max}$. Кроме того, помимо нормальных напряжений у основания зуба действуют местные, значительно превышающие первые. Влияние местных напряжений учитывается теоретическим коэффициентом концентрации напряжений α_σ, равным отношению наибольшего местного напряжения и наибольшего нормального. В качестве примера на рис. 7.1.18 показано рассчитанное МКЭ распределение напряжений, в том числе и местных, по поверхности зуба. Заметим, что с помощью МКЭ можно определить величину коэффициента концентрации напряжений у основания зуба.

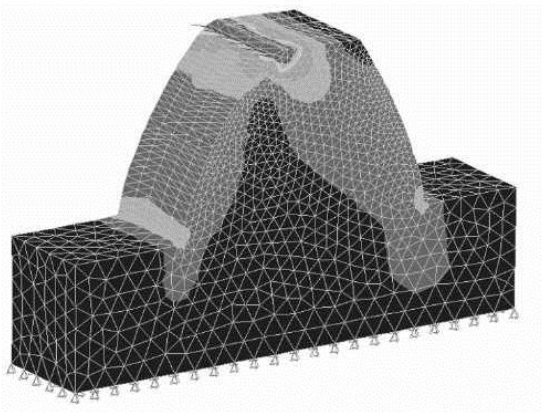


Рис. 7.1.18

Учет отклонений от выбранной идеальной модели осуществляется точно таким же образом, как и при расчете контактной прочности. Так, неравномерность распределения давления по длине зуба описывается коэффициентом концентрации по изгибу $K_{F\beta}$, динамичность приложения нагрузки — коэффициентом динамичности нагрузки по изгибу K_{Fv}. В случае многопарного зацепления неравномерность распределения нагрузки по зубьям учиты-

вается введением коэффициента $K_{F\alpha}$, а наличие перекрытия — коэффициентом торцевого перекрытия Y_ε, который для прямозубых зубчатых колес равен: $Y_\varepsilon = 1$ при степенях точности $Np = 8$ и $Np = 9$; $Y_\varepsilon = 0{,}8$ при степени точности $Np = 5 \div 7$. Используя эти обозначения, запишем выражение для наибольшей удельной нагрузки:

$$q_{n\max} = \frac{F_n K_{F\beta} K_{F\alpha} K_{Fv} Y_\varepsilon}{b}. \qquad (7.1.89)$$

Тогда для напряжения изгиба из (7.1.88) с учетом (7.1.89), (7.1.56) и (7.1.58), получаем

$$\sigma_F = \frac{2 \cdot 10^3 T_2 K_{F\beta} K_{F\alpha} K_{Fv} Y_F Y_\varepsilon}{d_2 b m}, \qquad (7.1.90)$$

где $Y_F = \frac{\alpha_\sigma}{\cos\alpha}\left(\frac{6\chi\cos\alpha_\alpha}{\eta^2} + \frac{\sin\alpha_\alpha}{\eta}\right)$ — коэффициент формы зуба.

Коэффициент формы зуба Y_F представляет собой чисто геометрический параметр, величина которого может быть определена с помощью следующих аппроксимационных зависимостей:

- для колеса внешнего зацепления

$$Y_F = 3{,}6\left(1 - \frac{2{,}8x + 0{,}93}{z} + \frac{112x^2 - 154x + 71}{z^2}\right); \qquad (7.1.91)$$

- для колеса внутреннего зацепления

$$Y_F = 4{,}3 - \frac{8\left(1 + 0{,}23x\right)}{z_0^{0.8}} - 0{,}33 \cdot 10^{-4} z_0 \left(180 - z\right)\left(1 - \frac{56x}{z_0^{0.8}}\right), \qquad (7.1.92)$$

где z и z_0 — число зубьев колеса и долбяка (которым нарезаются зубья внутреннего зацепления) соответственно; x — коэффициент смещения инструмента при нарезании зубчатого колеса. При практических расчетах коэффициент формы зуба для колес внутреннего зацепления приближенно можно принимать равным $Y_F = 3{,}5 \div 4$.

Заменив диаметр d_2 его выражением (7.1.18), получаем окончательное условие прочности зубчатого зацепления прямозубыми колесами на изгиб:

$$\sigma_F = \frac{T_2 \cdot 10^3 (u+1) K_{F\beta} K_{Fv} K_{F\alpha} Y_F Y_\varepsilon}{a u b m} \le \sigma_{Fa}. \qquad (7.1.93)$$

Напряжение σ_{Fa} называется допускаемым напряжением усталостной прочности на изгиб. Его расчет рассмотрен в разделе 7.1.6.

Условие прочности (7.1.93) должно быть выполнено для каждого из колес зуб-

чатой пары. Если на прочность рассчитывается колесо, то в (7.1.93) подставляют Y_{F2} и σ_{Fa2}, а при расчете прочности шестерни — Y_{F1} и σ_{Fa1}.

Для силовых зубчатых передач основным прочностным расчетом является расчет по контактным напряжениям, в то время как расчет прочности на изгиб выполняется как проверочный, главным образом с целью определения модуля зубчатой передачи. Выражая m из (7.1.93), имеем

$$m \geq \frac{T_2 \cdot 10^3 (u+1) K_{F\beta} K_{Fv} K_{F\alpha} Y_F Y_\varepsilon}{aub\sigma_{Fa}}. \qquad (7.1.94)$$

Следует напомнить, что полученное по формуле (7.1.94) значение нужно округлить в б*о*льшую сторону до ближайшего значения из стандартного ряда модулей.

7.1.4. Особенности расчета на изгиб косозубых и шевронных колес

Если воспользоваться свойством геометрического подобия, то рассмотренный выше метод расчета прочности прямозубых передач при изгибе может быть применен также для косозубых и шевронных колес. В прямозубой передаче направление зуба перпендикулярно к торцевой плоскости колеса. Таким образом, для того чтобы косозубое колесо было геометрически подобно прямозубому (т. е. можно было заменить косозубое колесо прямозубым), для него должно выполняться условие перпендикулярности зуба торцевой поверхности колеса. Получить такое эквивалентное прямозубое колесо можно, если рассечь цилиндр наклонной плоскостью, нормальной к направлению зуба. При этом сечение будет иметь эллиптическую форму.

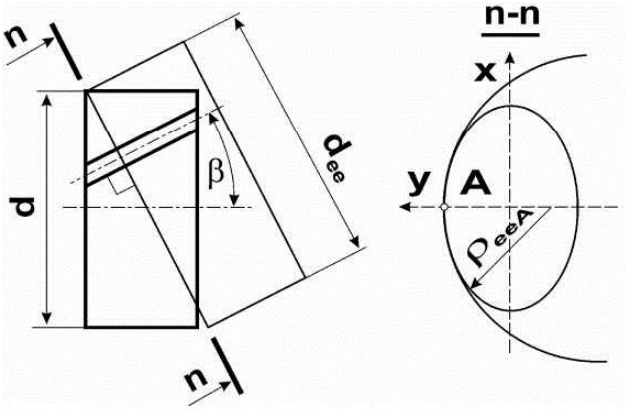


Рис. 7.1.19

Сделаем еще одно упрощение, переходя от эллипса к окружности, радиус которой равен радиусу кривизны ρ_{eeA} эллипса в точке A (рис. 7.1.19). Индекс ee здесь указывает на двойное приведение: сначала к эллиптическому колесу, а затем к цилиндрическому с круговым сечением.

Кривизна кривой k, как известно из дифференциальной геометрии, определяется по формуле

$$k = \frac{\dfrac{d^2y}{dx^2}}{\sqrt[3]{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}} = \frac{1}{\rho_{eeA}}. \qquad (7.1.95)$$

Из (7.1.95) следует, что для расчета кривизны необходимо знать значения производных $\dfrac{dy}{dx}$ и $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ в точке A. Вычислим эти производные.

Уравнение получающегося в сечении эллипса может быть записано в виде

$$\frac{4x^2\cos^2\beta}{d^2}+\frac{4y^2}{d^2}=1, \qquad (7.1.96)$$

где β — угол наклона зуба, d — диаметр косозубого колеса. Дифференцируя обе части уравнения (7.1.96) по x, имеем

$$2x\cos^2\beta+2y\frac{dy}{dx}=0. \qquad (7.1.97)$$

Из (7.1.97) для точки A с координатой $x=0$ получаем

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x\ 0}=0.$$

Продифференцируем уравнение (7.1.96) повторно:

$$2\cos^2\beta+2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+2y\frac{d^2y}{dx^2}=0. \qquad (7.1.98)$$

Так как координаты точки A равны $x=0,\ \ y=\frac{d}{2}$, то из уравнения (7.1.98) следует

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{2\cos^2\beta}{d}. \qquad (7.1.99)$$

Подстановка (7.1.99) в (7.1.95) дает

$$\frac{1}{\rho_{eeA}}=\frac{2\cos^2\beta}{d};\ \ \rho_{eeA}=\frac{d}{2\cos^2\beta}. \qquad (7.1.100)$$

Знак кривизны в выражении (7.1.100) опущен.

Поскольку диаметр косозубого колеса согласно табл. 7.1.3 равен $d=\frac{m_n z}{\cos\beta}$, то диаметр эквивалентного прямозубого колеса записывается в виде

$$d_{ee}=\frac{m_n z}{\cos^3\beta}. \qquad (7.1.101)$$

Напомним, что индекс n является признаком нормального сечения. Выражение (7.1.101) можно переписать как

$$d_{ee}=m_n z_V,$$

где $z_V=\frac{z}{\cos^3\beta}$ — приведенное число зубьев.

С формальной точки зрения расчет прочности косозубого цилиндрического колеса может быть заменен расчетом прямозубого с числом зубьев z_V. По этой

причине формулы (7.1.90), (7.1.93) — (7.1.94) расчета прочности прямозубых колес на изгиб можно использовать и при расчете косозубых колес. Однако при записи окончательной расчетной формулы следует помнить, что для косозубого зацепления характерно осевое перекрытие, которое существенно повышает нагрузочную способность колеса. Величина осевого перекрытия зависит прежде всего от угла β наклона зуба и может быть учтена в окончательном выражении введением поправочного коэффициента Y_β. Тогда условие прочности косозубой зубчатой передачи при изгибе по аналогии с (7.1.90) и с учетом (7.1.101) записывается в виде

$$\sigma_F = \frac{T_2 \cdot 10^3 (u+1) K_{F\beta} K_{F\alpha} K_{Fv} Y_F Y_\varepsilon Y_\beta}{aubm} \le \sigma_{Fa}. \qquad (7.1.102)$$

Исследования показали, что коэффициент Y_β учета осевого перекрытия можно приближенно рассчитать по формуле

$$Y_\beta = 1 - \frac{\beta}{120}, \qquad (7.1.103)$$

где β — угол наклона зубьев в градусах. Коэффициент Y_ε для прямозубых колес равен единице, $Y_\varepsilon = 1$, а для косозубых колес — $Y_\varepsilon = 1/\varepsilon_\alpha$, где ε_α — введенный в (7.1.43) коэффициент торцевого перекрытия.

Что касается коэффициента формы зуба Y_F, то при его вычислении применительно к косозубым колесам следует в формулах (7.1.91) — (7.1.92) заменять число зубьев z на приведенное число зубьев z_V.

7.1.5. Внешняя нагрузка и ее характеристики. Режимы работы зубчатой передачи

Нагрузка на зуб колеса изменяется импульсно, причем продолжительность каждого импульса зависит от числа зубьев и коэффициента перекрытия Y_ε (рис. 7.1.20). Переменный режим нагружения зубьев приводит к их разрушению, которое носит усталостный характер. Продолжительность работы передачи характеризуется временем безотказной работы и *числом циклов нагружений,* которое равно количеству импульсов нагружений, т. е. числу оборотов колеса. Если полное время работы передачи t измерять в часах, а частоту вращения колеса n, как обычно, в об/мин, то число циклов нагружений равно

$$N = 60ntK_n, \qquad (7.1.104)$$

где K_n — число зацеплений зуба колеса за один оборот, равное количеству числу параллельных потоков передачи момента (рис. 7.1.21). В том случае, если нагрузка постоянна во времени, для характеристики нагружения достаточно знать величины внешних нагрузок и количество циклов нагружений.

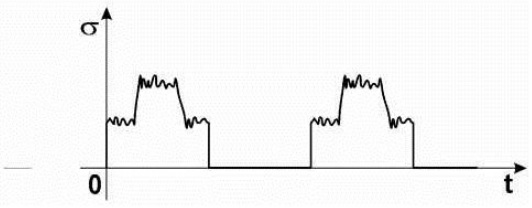
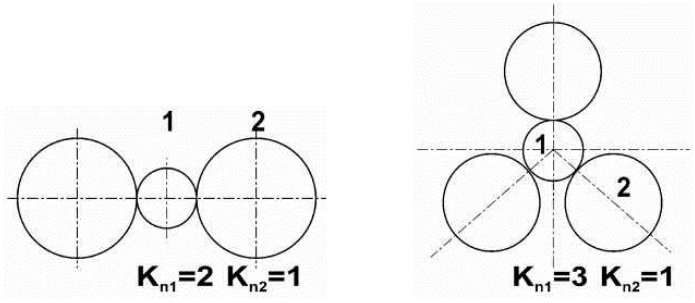


Рис. 7.1.20



a) b)

Рис. 7.1.21

Сложнее обстоит дело в случае переменного внешнего нагружения (глава 2.10). Представим переменную во времени нагрузку в виде графика, изображенного на рис. 7.1.22. Этот график количественно определяет время действия относительного момента (т. е. отношения текущего момента к наибольшему).

Для того, чтобы оценить вклад каждого из напряжений, обратимся к кривой выносливости (2.10.8). Если число циклов действия напряжения σ_i в i-ом режиме нагружения равно N_i, а полное число циклов нагружения (за все время работы до разрушения) при данном уровне напряжений — N_{i0}, то отношение N_i / N_{i0} определяет часть прочности, потерянной при действии напряжений σ_i (рис. 2.10.13). Отсюда следует, что, согласно *гипотезе линейного суммирования повреждений* (2.10.33), разрушение произойдет при выполнении условия $\sum_{i=1}^{k} \frac{N_i}{N_{i0}} = 1$, где k — число режимов нагружения. Записывая уравнение кривой усталости (2.10.8) в виде

$$\sigma_i^m N_{i0} = \sigma_{-1}^m N_G = const, \qquad (7.1.105)$$

из гипотезы линейного суммирования (2.10.33) с учетом (7.1.105) получим

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{\sigma_i^m N_i}{\sigma_{-1}^m N_G} = const, \qquad (7.1.106)$$

где σ_{-1} — напряжение, численно равное пределу длительной прочности; N_G — базовое число циклов нагружения.

Как было показано в главе 2.10, переменный режим нагружения можно привести к эквивалентному нагружению постоянным максимальным моментом, но с меньшим числом циклов его действия N_e. Так как максимальный момент вызывает наибольший уровень напряжений $\sigma_{\max}$, то, согласно уравнению выносливости (7.1.105), имеем

$$\sigma_{-1}^m N_G = \sigma_{\max}^m N_e,$$

или, с учетом (7.1.106),

$$N_e = \sum_{i=1}^{k} N_i \left(\frac{\sigma_i}{\sigma_{\max}} \right)^m . \qquad (7.1.107)$$

Формула (7.1.107) полностью аналогична полученной ранее (2.10.37).

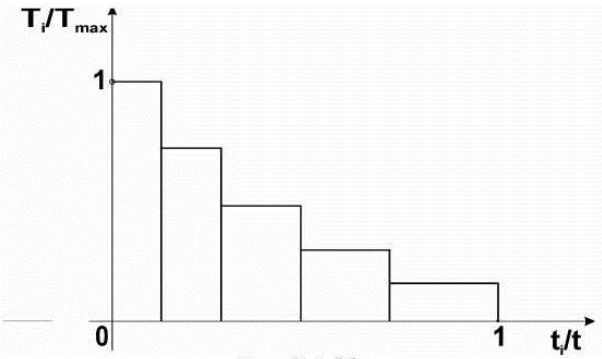


Рис. 7.1.22

Выражая текущее число циклов N_i через время t_i, при условии постоянства частоты вращения перепишем выражение (7.1.107) в виде

$$N_e = N\sum_{i\ 1}^{k}\frac{t_i}{t}\left(\frac{\sigma_i}{\sigma_{\max}}\right)^m . \qquad (7.1.108)$$

Пользуясь полученной при расчете изгибной прочности формулой (7.1.90), можно записать

$$\begin{aligned}\sigma_i &= const_F \cdot T_i,\\ \sigma_{\max} &= const_F \cdot T_{\max}.\end{aligned} \qquad (7.1.109)$$

Константа $const_F$ определяется путем сравнения (7.1.109) с (7.1.90). Подставляя далее (7.1.109) в (7.1.108), получаем

$$N_{Fe} = N\sum_{i\ 1}^{k}\frac{t_i}{t}\left(\frac{T_i}{T_{\max}}\right)^{m_F} . \qquad (7.1.110)$$

Здесь N_{Fe} — эквивалентное число циклов при расчете напряжений изгиба; m_F — показатель степени кривой выносливости при расчете прочности по изгибу, равный $m_F = 6$ либо $m_F = 9$ в зависимости от твердости материала зуба.

При расчете контактной прочности выражение (7.1.110) можно, с учетом (7.1.81), переписать в виде

$$\begin{aligned}\sigma_i &= const_H \cdot \sqrt{T_i},\\ \sigma_{\max} &= const_H \cdot \sqrt{T_{\max}},\end{aligned} \qquad (7.1.111)$$

где константа $const_H$, аналогично $const_F$, определяется исходя из сопоставления с (7.1.81). Тогда эквивалентное число циклов при расчете контактных напряжений, подобно (7.1.109), равно

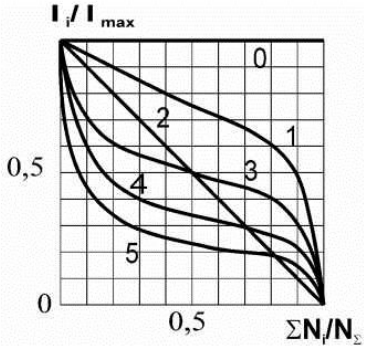
$$N_{He} = N\sum_{i\ 1}^{k}\frac{t_i}{t}\left(\frac{T_i}{T_{\max}}\right)^{\frac{m_H}{2}} . \qquad (7.1.112)$$

Здесь m_H — показатель степени кривой выносливости при расчете контактной прочности, равный $m_H = 6$. Для удобства выполнения практических расчетов можно ввести следующие обозначения:

$$K_{Fe} = \sum_{i=1}^{k}\frac{t_i}{t}\left(\frac{T_i}{T_{\max}}\right)^{m_F};$$

$$K_{He} = \sum_{i\ 1}^{k}\frac{t_i}{t}\left(\frac{T_i}{T_{\max}}\right)^{\frac{m_H}{2}} . \qquad (7.1.113)$$

Константы K_{Fe} и K_{He} называют коэффициентами приведения пе-



Типовые режимы нагружения: *0 — постоянный, 1 — тяжелый, 2 — средний равновероятный, 3 — средний нормальный, 4 — легкий, 5 — особо легкий*

Рис. 7.1.23

ременного режима работы к постоянному соответственно по изгибу и контакту.

В том случае, когда режим работы задается не ступенчатым графиком нагружения (рис. 7.1.21), а плавной кривой (рис. 7.1.23), от конечных сумм в выражениях (7.1.113) следует перейти к интегральным. Тогда

$$K_{Fe} = \int_0^1 \left(\frac{T_i}{T_{\max}}\right)^{m_F} d\left(\frac{t_i}{t_{\max}}\right);$$

$$K_{He} = \int_0^1 \left(\frac{T_i}{T_{\max}}\right)^{\frac{m_H}{2}} d\left(\frac{t_i}{t_{\max}}\right). \qquad (7.1.114)$$

Таблица 7.1.7. **Коэффициенты приведения K_{He} и K_{Fe}**

Режим работы	K_{He}	K_{Fe} **при значении** m_F	
	$m_H = 6$	$m_F = 6$	$m_F = 9$
0	1,0	1,0	1,0
1	0,5	0,3	0,2
2	0,25	0,14	0,1
3	0,18	0,06	0,04
4	0,125	0,038	0,016
5	0,063	0,013	0,004

Для упрощения выполнения расчетов при приведении переменного режима нагружения к постоянному введены типовые режимы работы, перечень которых приведен на графике (рис. 7.1.23) и в таблице 7.1.7.

В отдельных случаях переменный режим нагружения удобнее приводить не к эквивалентному числу циклов, а к эквивалентному моменту. Эта операция также может быть выполнена по описанной выше методике.

7.1.6. Материалы, термообработка и допускаемые напряжения для зубчатых колес

Зубчатые колеса изготавливают из чугуна, стали и некоторых неметаллических материалов. Колеса из неметаллических материалов имеют небольшой вес, они малошумны, но обладают низкой прочностью и используются главным для слабонагруженных передач — преимущественно в приборостроении. Чугун применяют для изготовления крупных колес и для передач, работающих в открытой среде либо без применения смазки, либо в условиях ее дефицита. В подавляющем большинстве случаев в качестве материала для изготовления зубчатых колес используют углеродистые и легированные стали с содержанием угле-

рода $(0{,}1 \div 0{,}6)\%$. Конкретный выбор типа стали зависит от величины передаваемой нагрузки, технологии изготовления и наличия оборудования и материалов у изготовителя. Если зубья нарезаются после термообработки, то твердость материала заготовки не должна быть больше $35HRC$. Такое значение твердости получается после нормализации (закалка с последующим охлаждением на воздухе) или улучшения (закалка и высокий отпуск).

Габариты передачи можно уменьшить, если использовать объемную закалку, закалку по поверхности и химико-термическую обработку (цементацию, азотирование, цианирование и другие). В этих случаях зубья нарезаются до выполнения термообработки, после которой возможны лишь финишные операции.

Закалка по контуру реализуется за счет локальной термообработки токами высокой частоты (ТВЧ) на глубину $3{,}5 \div 4$ мм. Это означает, что выполнить закалку ТВЧ можно только для колес с модулем более 3 мм.

Цементацией называется процесс насыщения поверхности углеродом на глубину до 2 мм с последующей закалкой.

Азотирование — процесс насыщения поверхностного слоя азотом. Процесс азотирования не требует дополнительной механической обработки, но полученный при этом упрочненный слой мал, и есть опасность подслойного разрушения.

Следует отметить, что объемная твердость зависит также от размера заготовки. С увеличением размеров заготовки она уменьшается, поскольку уменьшается скорость охлаждения и, как результат, снижается предел прочности. Между пределом прочности материала и его объемной твердостью установлена приближенная зависимость

$$\sigma_b \approx 3{,}5HB = 35HRC .$$

Колеса диаметром менее 600 мм изготавливаются с помощью *штамповки*. При этом используют стали высокой пластичности. Если диаметр превышает 600 мм, то колеса изготавливаются *литьем*.

Расчет допускаемых напряжений. В основе расчета допускаемых напряжений для стальных колес лежит эксперимент. Допускаемые напряжения определяются с помощью кривой усталости, эмпирически построенной для фиксированных условий. Если фактические условия отличны от тех, для которых построена кривая выносливости, то учет главных факторов, влияющих на величину допускаемого напряжения, можно выполнить введением ряда поправочных коэффициентов.

Для случая, когда базовое число циклов нагружения (N_{HG} — для расчетов на контактную прочность и N_{FG} — изгибную) не превышает соответствующее эквивалентное число циклов, т. е. $N_{FG} \le N_{Fe}$ и $N_{HG} \le N_{He}$, допускаемые напряжения при расчете на контактную прочность определяются по формуле

$$\sigma_{Ha} = \frac{\sigma_{H\lim}}{S_H} Z_R Z_v . \qquad (7.1.115)$$

а допускаемые напряжения изгиба при расчете на выносливость — как

$$\sigma_{Fa} = \frac{\sigma_{F\lim}}{S_F} Y_R Y_S K_{XF} K_{FC} . \qquad (7.1.116)$$

Здесь:

$\sigma_{H\lim}$ — предел контактной выносливости поверхности зубьев при базовом числе циклов нагружения N_{HG};

$\sigma_{F\lim}$ — предел выносливости материала на изгиб в условиях пульсационного нагружения при заданном базовом числе циклов нагружения N_{FG};

S_H и S_F — коэффициенты запаса прочности по контакту и по изгибу соответственно. Рекомендуется пользоваться следующими значениями этих коэффициентов: $S_H = 1{,}1$, если материал зуба имеет однородную структуру и $S_H = 1{,}2$ — если неоднородную.

Z_R и Y_R — коэффициенты учета влияния чистоты обработки сопряженной поверхности зуба на допускаемые контактные и изгибные напряжения, причем $Y_R = 1$ для зубьев с фрезерованными и шлифованными участками у основания и $Y_R = 1{,}2$ — для зубьев после полирования. Значения коэффициента Z_R приведены в табл. 7.1.8.

Таблица 7.1.8. **Значения коэффициента Z_R шероховатости поверхности**

Ra, мкм	0,63 ÷ 1,25	1,25 ÷ 2,5	2,5 ÷ 3,5
Z_R	1	0,95	0,9

Z_v — коэффициент, учитывающий чувствительность материала к окружной скорости: $Z_v = 0{,}85v^{0,1}$, если $HRC < 35$; $Z_v = 0{,}92v^{0,05}$, если $HRC \geq 35$; $Z_v = 1{,}00$ при расчете конических передач (приведенные значения справедливы в диапазоне скоростей $v = (5 \div 24)$ м/с);

Y_S — коэффициент чувствительности материала к концентрации напряжений у основания зуба, $Y_S = 1{,}08 - 0{,}16\lg m_F$;

K_{XF} — коэффициент учета абсолютных размеров заготовки, $K_{XF} = 1{,}00 - 8{,}3 \cdot 10^{-5} d_a$, где d_a — диаметр заготовки зубчатого колеса.

При расчете допускаемого напряжения изгиба для случая реверсивной работы передачи вводят коэффициент чувствительности к реверсу K_{FC}, равный $K_{FC} = 1 - \gamma_{FC}\frac{T''}{T'}$, где $\gamma_{FC} = 0{,}35$, если $HRC < 35$; $\gamma_{FC} = 0{,}25$, если $HRC \geq 35$; $\gamma_{FC} = 0{,}1$, если термообработка зубьев проведена азотированием; T', T'' — моменты, действующие в прямом и в реверсивном направлениях.

Базовые числа циклов нагружения N_{HG} и N_{FG} контактной и изгибной прочности можно определить выражениями

$$N_{HG} = 30(HB)^{2,4} \approx 340 \cdot (HRC)^{3,15} + 8 \cdot 10^6;$$

$$N_{FG} = 4 \cdot 10^6.$$

Пределы выносливости $\sigma_{H\,\lim}$ и $\sigma_{F\,\lim}$ в зависимости от термообработки и твердости приведены в таблицах 7.1.9 и 7.1.10.

В случае, если базовое число циклов нагружения больше, чем эквивалентное число циклов, то формулы (7.1.115) и (7.1.116) переписываются в виде

$$\sigma_{Fa} = \frac{\sigma_{F\lim}}{S_F} Y_R Y_S K_{XF} K_{FC} \sqrt[m_F]{\frac{N_{FG}}{N_{Fe}}},$$

$$\sigma_{Ha} = \frac{\sigma_{H\lim}}{S_H} Z_R Z_v \sqrt[m_H]{\frac{N_{HG}}{N_{He}}}. \qquad (7.1.117)$$

Отметим, что при приближенном расчета передач в (7.1.115) — (7.1.117) можно считать $Z_R Z_v \cong 1$, $Y_R Y_S K_{XF} K_{FC} \cong 1$.

Таблица 7.1.9. **Пределы выносливости $\sigma_{H\,\lim}$ зубьев стальных зубчатых колес (при расчете на выносливость по контакту)**

Вид обработки	$\sigma_{H\,\lim}$, МПа
Нормализация Улучшение Твердость менее 350 НВ	2 НВ + 70
Объемная закалка (38 ÷ 50) HRC	18 HRC + 150
Поверхностная закалка (40 ÷ 50) HRC	17 HRC + 200
Цементация (более 56) HRC	23 HRC
Азотирование (550 ÷ 750) HV	1050

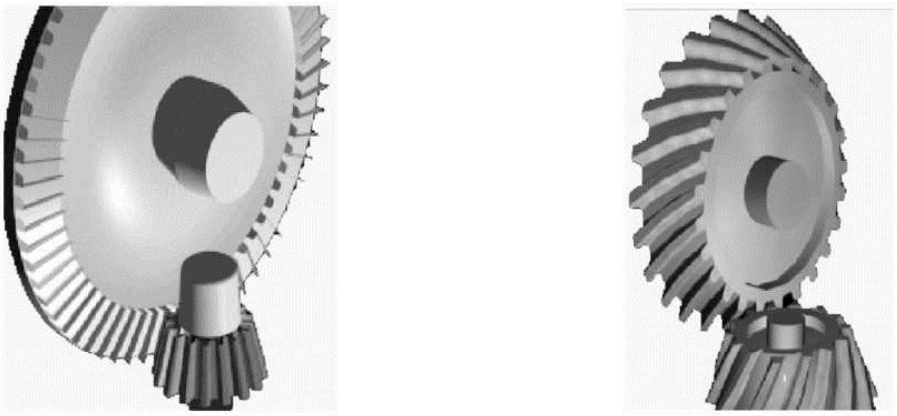
Таблица 7.1.10. **Пределы выносливости $\sigma_{F\,\lim}$ зубьев стальных зубчатых колес (при расчете на выносливость по изгибу)**

Термическая либо химико-термическая обработка	Твердость зубьев		$\sigma_{F\,\lim}$, МПа	S_F
	Поверхность	*Сердцевина*		
Нормализация, улучшение	$(180 \div 300)\,HB$	$(180 \div 300)\,HB$	$1{,}8\,HB$	1,7
Закалка ТВЧ по контуру зуба	$(48 \div 55)\,HRC$	$(250 \div 320)\,HB$	600	1,7
Объемная закалка	$(48 \div 55)\,HRC$		600	1,7
Азотирование	$(550 \div 750)\,HV$	$(32 \div 42)\,HRC$	$300 + 12\,HRC$	1,7
Цементация	$(56 \div 62)\,HRC$	$(32 \div 45)\,HRC$	800	1,6

Глава 7.2. Передачи коническими зубчатыми колесами

Конические передачи обеспечивают передачу и преобразование момента вращения между осями, пересекающимися в пространстве под некоторым углом Σ. Наибольшее распространение получили *ортогональные передачи,* у которых $\Sigma = 90^0$. Разумеется, в практике проектирования встречаются передачи и с другим значением угла расположения осей, но их применение крайне ограничено. В этой связи в данной главе мы будем рассматривать только ортогональные передачи.

Нагрузочная способность конических передач меньше, чем цилиндрических, кроме того, они сложнее в изготовлении. Однако использование конических передач часто продиктовано компоновкой машины, что и обеспечивает их широкое применение в машиностроении.



a) b)

Рис. 7.2.1

По форме зуба конические колеса подразделяются на *прямозубые* и *кривозубые*. Чаще всего применяются колеса с *прямым* (рис. 7.2.1a) и *круговым* (рис. 7.2.1b) зубом.

В прямозубых колесах линия зуба совпадает с образующей конуса, а линии кругового зуба представляют собой дуги окружностей (рис. 7.2.2). Здесь d_0 — диаметр траектории, вычерчиваемой инструментом при нарезании зуба.

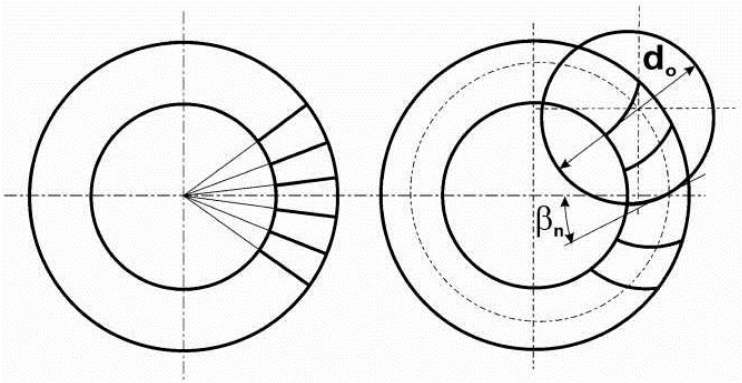


Рис. 7.2.2

Первый тип колес (прямозубые) рекомендуется использовать для передач, работающих в условиях малых окружных скоростей — до 2÷3 м/с. При более высоких скоростях целесообразно применять передачи с круговым зубом, которые при тех же размерах имеют более высокую по сравнению с прямозубыми нагрузочную способность за счет увеличения длины контакта и наличия многопарности зацепления. Кроме того, передачи с круговым зубом работают плавно и имеют меньший уровень шума. Как правило, их изготавливают с большим углом наклона зуба, среднее расчетное значение которого равно $\beta_n \approx 35^0$.

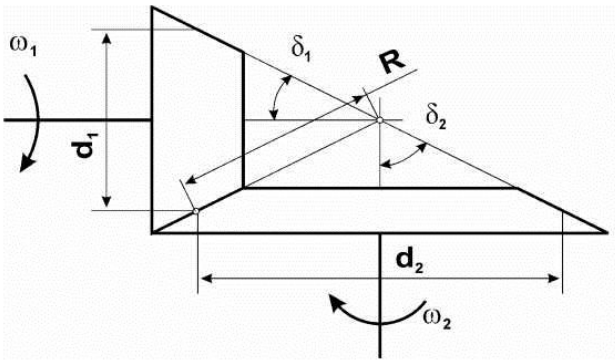


Рис. 7.2.3

Профиль зуба конического колеса очерчен эвольвентой, и в этом отношении оно является аналогом цилиндрического.

Работа конической передачи может быть проиллюстрирована на примере перекатывания без скольжения двух усеченных конусов с углами при вершине $2\delta_1$ и $2\delta_2$ (рис. 7.2.3).

Обозначим угловую скорость ведущего конуса через ω_1, а ведомого — ω_2, тогда передаточное отношение u можно записать как

$$u = \frac{\omega_1}{\omega_2}. \qquad (7.2.1)$$

Если средние диаметры усеченных ведущего и ведомого конусов равны соответственно d_1 и d_2, то линейная скорость точки контакта v определяется выражением

$$v = \omega_1 \frac{d_1}{2} = \omega_2 \frac{d_2}{2}. \qquad (7.2.2)$$

Из рисунка (7.2.3) видно, что

$$\frac{d_1}{2} = R\sin\delta_1; \quad \frac{d_2}{2} = R\sin\delta_2, \qquad (7.2.4)$$

где R — среднее конусное расстояние. Тогда передаточное отношение (7.2.1) принимает вид

$$u = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{d_2}{d_1} = \frac{\sin\delta_2}{\sin\delta_1}. \qquad (7.2.3)$$

Поскольку для ортогональных передач выполняется соотношение $\Sigma = \delta_1 + \delta_2 = 90^\circ$, то формулу (7.2.3) можно переписать как

$$u = tg\delta_2 = ctg\delta_1. \qquad (7.2.5)$$

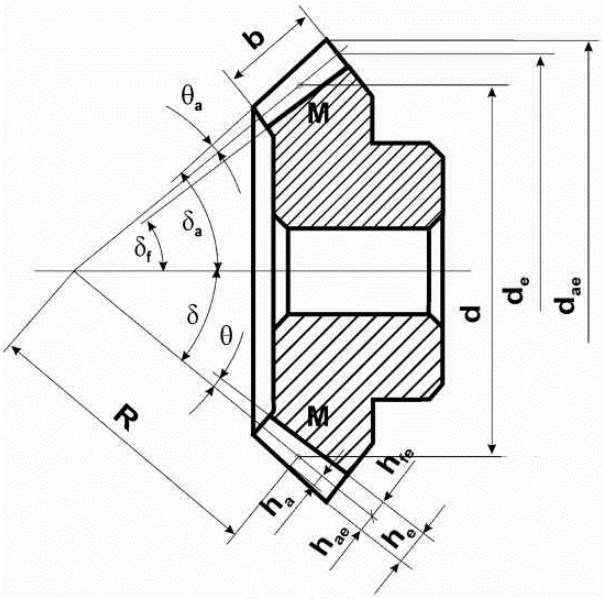


Рис. 7.2.4

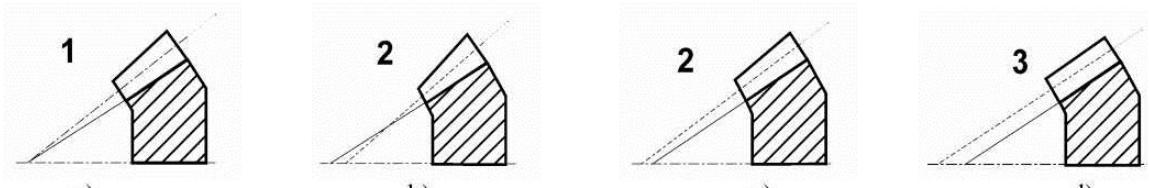
Геометрия конических зубчатых передач. Коническое колесо представляет собой усеченный конус, на поверхности которого нарезаны зубья (рис. 7.2.4). Зуб конического колеса, в отличие от цилиндрического, имеет разные геометрические размеры по ширине колеса в зависимости от точки замера. В этой связи для геометрической оценки используют параметры, измеренные на внешней торцевой поверхности. Признаком этих размеров при дальнейшем рассмотрении будет служить индекс e. Выполнение ряда расчетов удобнее проводить, если геометрические размеры задавать относительно точки M, находящейся на половине ширины колеса. Получаемые в этом случае размеры называются *средними*. Эти параметры далее будем записывать без индекса.

Остальные обозначения на рис. 7.2.4 (как и везде далее, если противное не оговорено особо) соответствуют принятым в главе 7.1 и в таблице 7.2.1.

Наиболее распространенной формой зуба является следующая: зуб конического колеса пропорционально уменьшается в зависимости от расстояния до торца (рис. 7.2.5a, форма 1). Существуют также конструкции, у которых вершины делительного конуса и конуса впадин не совпадают (рис. 7.2.5b,c форма 2). Встречаются колеса с равновысоким зубом (рис. 7.2.5d, форма 3). Осевая форма 1, являющаяся частным случаем формы 2, применяется для колес с прямым зубом и в отдельных случаях — с круговым. Однако для колес с круговым зубом чаще всего используют форму 2. Форма 3 применяется реже предыдущих, в основном для неортогональных передач.

Важными геометрическими параметрами прямозубых конических передач являются внешний окружной модуль m_e, выбор которого следует согласовывать со стандартным значением, и средний модуль m. Для характеристики передач с круговым зубом, кроме окружного модуля m_{te}, используются нормальный модуль m_{ne} и средний нормальный модуль m_n. Исходя из этого, внешний делительный диаметр прямозубых колес определяется как

$$d_{e1} = m_e z_1; \qquad d_{e2} = m_e z_2,$$



a) b) c) d)

Рис. 7.2.5

а для колес с круговым зубом —

$$d_{e1} = m_{te} z_1;\ d_{e2} = m_{te} z_2, \quad (7.2.6)$$

где индексы 1 и 2 относятся соответственно к шестерне и колесу. Напомним, что z — число зубьев.

Одной из важнейших геометрических характеристик конической передачи служит внешнее конусное расстояние R_e (рис. 7.2.6), которое определяет ее основные геометрические размеры. Так, например, ширину венца рекомендуется принимать $b = K_{be} R_e$, где K_{be} — коэффициент ширины. Внешнее конусное расстояние для конической передачи имеет такой же смысл, что и межосевое расстояние для цилиндрической. Из рис. 7.2.6 видно, что параметр R_e равен

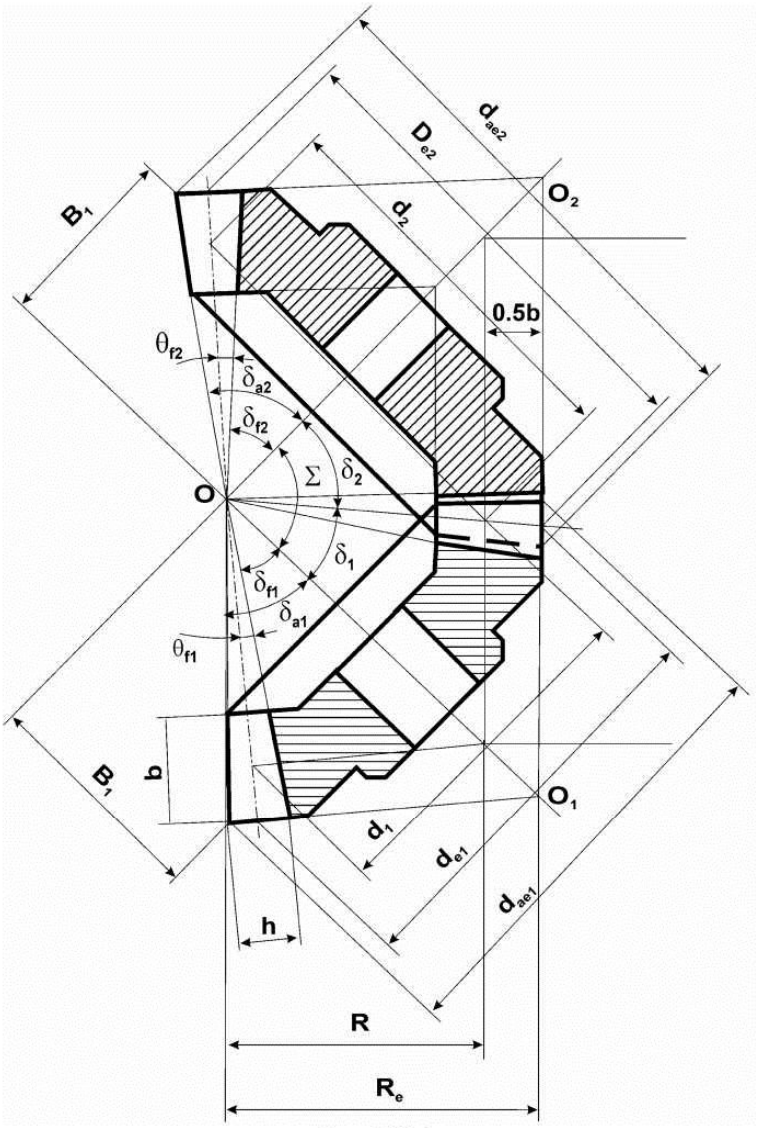


Рис. 7.2.6

$$R_e = \frac{d_{e1}}{2\sin\delta_1} = \frac{d_{e2}}{2\sin\delta_2}, \quad 7.2.7)$$

или

$$R_e = \sqrt{\frac{d_{e1}^2}{4} + \frac{d_{e2}^2}{4}} = \frac{m_e\sqrt{z_1^2 + z_2^2}}{2} = \frac{m_e z_1\sqrt{1+u^2}}{2}.$$

При расчете R_e (как и всех остальных геометрических параметров) для колес с круговым зубом следует в соответствующих формулах заменить m_e на m_{te}.

Среднее конусное расстояние R вычисляется с помощью соотношения

$$R = R_e - 0{,}5b, \quad (7.2.8)$$

а для среднего окружного модуля m имеем

$$m = \frac{m_e R}{R_e}. \quad (7.2.9)$$

Если говорить об исходном контуре, то следует отметить, что наибольшее применение получили контуры со следующими параметрами:

- для конических колес с прямым зубом

$$\alpha_n = 20^0;\ h_a^* = 1;\ c^* = 0{,}20;\ \rho_f^* = 0{,}20;$$

- для конических колес с круговым зубом

$$\alpha_n = 20^0;\ h_a^* = 1;\ c^* = 0{,}25;\ \rho_f^* = 0{,}25. \qquad (7.2.10)$$

Здесь ρ_f^* — коэффициент радиуса закругления ножки зуба.

Чаще всего конические передачи изготавливаются без смещения или с равным смещением для шестерни и колеса. Под равным смещением имеется в виду равенство абсолютных смещений, при котором коэффициент смещения шестерни x_1 принимается положительным, а колеса x_2 — отрицательным, а именно

$$x_1 = -x_2. \qquad (7.2.11)$$

Абсолютная величина коэффициента смещения для колес с круговым зубом при исходном контуре с параметрами (7.2.10) может быть рассчитана по формуле

$$x_1 = 2\left(1 - 1/u^2\right)\sqrt{\cos^3\beta_n / z_1}\ . \qquad (7.2.12)$$

Для прямозубых колес в (7.2.11) следует положить $\beta_n = 0$.

Существуют также и другие рекомендации по выбору коэффициентов смещения исходного контура инструмента. Кроме того, иногда в практике проектирования встречаются и неравносмещенные конические передачи. Однако происходит это крайне редко, поэтому в рамках данной книги эти аспекты мы рассматривать не будем.

Нарезание конических колес с прямыми зубьями ведется методом обкатки. Поскольку при таком нарезании имитируется процесс зацепления, то одно из колес можно считать инструментальным. Инструментальное колесо обычно изготавливается *плоским*. Для того чтобы получить плоское колесо, необходимо выполнить предельный переход от обычного колеса, с произвольным углом δ_1 при вершине, к колесу с $\delta_1 = 90^0$. Переходя в (7.2.7) к пределу, с помощью (7.2.6) получаем

$$\lim_{\delta_{e1}\to 90}(\sin\delta_{e1}) = \lim\left(\frac{d_{e1}}{2R}\right) = \lim\left(\frac{z_1}{\sqrt{z_1^2 + z_2^2}}\right) \to 1,$$

откуда число зубьев плоского колеса z_s определяется выражением

$$z_1 = z_s = \sqrt{z_1^2 + z_2^2}\ .$$

Так как плоское колесо является воображаемым, и при нарезании используется только часть этого колеса, то полученное число зубьев не округляется до целого.

Особенностью нарезания конических колес является возможность независимого расположения и движения инструмента для каждой из сторон зуба, что позволяет изменять толщину зуба и размер впадины. В свою очередь, возможность варьи-

рования толщины зуба позволяет решить проблему различной прочности зубьев колеса и шестерни. Дело в том, что зубья шестерни менее прочны по изгибу, чем зубья колеса, и для достижения равнопрочности следует увеличивать толщину зубьев шестерни за счет соответствующего уменьшения толщины зубьев колеса. Числовой характеристикой такой модификации толщины зубьев служит коэффициент изменения толщины $x_{\tau 1}$ (положительный для шестерни и отрицательный для колеса), который рекомендуется определять следующим образом:

- для прямозубых колес

$$x_{\tau 1} = 0{,}03 + 0{,}008\left(u - 2{,}5\right), \quad u > 2{,}5;$$

$$x_{\tau 1} = 0, \quad u \le 2{,}5.$$

- для колес с круговым зубом

$$x_{\tau 1} = 0{,}03 + 0{,}008\left(u - 2{,}5\right) + 0{,}0025\beta_n, \quad u > 2{,}5;$$

$$x_{\tau 1} = 0, \quad u \le 2{,}5. \qquad (7.2.13)$$

Здесь угол наклона зуба β_n выражается в градусах. Коэффициент смещения $x_{\tau 1}$ для колес обоих типов подчиняется соотношению $x_{\tau 2} = -x_{\tau 1}$.

Основные геометрические размеры ортогональных зубчатых колес с прямым зубом можно рассчитать, пользуясь формулами из таблицы 7.2.1.

Таблица 7.2.1. **Условные обозначения и расчетные формулы для определения основных геометрических размеров прямозубых ортогональных конических передач**

Параметр		Обозначения и расчетные формулы
1. Число зубьев плоского колеса		$z_s = \sqrt{z_1^2 + z_2^2}$
2. Внешний окружной модуль		m_e
3. Внешнее конусное расстояние		$R_e = 0{,}5 m_e z_s$
4. Ширина зубчатого венца		$b \le 0{,}3 R_e$
5. Коэффициент ширины зубчатого венца		$K_{be} = b / R_e$
6. Среднее конусное расстояние		$R = R_e - 0{,}5b$
7. Средний окружной модуль		$m = m_e R / R_e$
8. Средний делительный диаметр	Шестерня	$d_1 = mz_1$
	Колесо	$d_2 = mz_2$
9. Передаточное число		$u = z_2 / z_1$

Параметр		Обозначения и расчетные формулы
10. Угол делительного конуса	Шестерня	$tg\delta_1 = 1/u$
	Колесо	$\delta_2 = 90^0 - \delta_1$
11. Коэффициент смещения	Шестерня	x_1 и x_2 — по формулам (7.2.12, 7.2.11)
	Колесо	$x_2 = -x_1$;
12. Коэффициент изменения толщины зубьев	Шестерня	$x_{\tau 1} = 0{,}03 + 0{,}008(u - 2{,}5)$ при $u > 2{,}5$ $x_{\tau 1} = 0$ при $u \le 2{,}5$
	Колесо	$x_{\tau 2} = -x_{\tau 1}$
13. Внешняя высота головки зуба	Шестерня	$h_{ae1} = (h_a^* + x_{e1})m_e$
	Колесо	$h_{ae2} = (h_a^* + x_{e2})m_e$
14. Внешняя высота ножки зуба	Шестерня	$h_{fe1} = (h_a^* + c^* - x_{e1})m_e$
	Колесо	$h_{fe2} = (h_a^* + c^* - x_{e2})m_e$
15. Внешняя высота зуба	Шестерня	$h_{e1} = h_{ae1} + h_{fe1}$
	Колесо	$h_{e2} = h_{ae2} + h_{fe2}$
16. Внешняя окружная толщина зубьев	Шестерня	$s_{e1} = (0{,}5\pi + 2x_{e1}tg\alpha + x_{\tau 1})m_e$
	Колесо	$s_{e2} = (0{,}5\pi + 2x_{e2}tg\alpha + x_{\tau 2})m_e$
17. Угол ножки зубьев	Шестерня	$\theta_{f1} = arctg(h_{fe1}/R_e)$
	Колесо	$\theta_{f2} = arctg(h_{fe2}/R_e)$
18. Угол головки зубьев	Шестерня	$\theta_{a1} = \theta_{f2}$
	Колесо	$\theta_{a2} = \theta_{f1}$
19. Угол вершины конуса	Шестерня	$\delta_{a1} = \delta_1 + \theta_{a1}$
	Колесо	$\delta_{a2} = \delta_2 + \theta_{a2}$
20. Угол конуса впадин	Шестерня	$\delta_{f1} = \delta_1 - \theta_{f1}$
	Колесо	$\delta_{f2} = \delta_2 - \theta_{f2}$

Параметр		Обозначения и расчетные формулы
21. Внешний делительный диаметр	Шестерня	$d_{e1} = m_e z_1$
	Колесо	$d_{e2} = m_e z_2$
22. Внешний диаметр вершин зубьев	Шестерня	$d_{ae1} = d_{e1} + 2h_{ae1}\cos\delta_1$
	Колесо	$d_{ae2} = d_{e2} + 2h_{ae2}\cos\delta_2$
23. Расстояние от вершины конуса до плоскости вершин зубьев	Шестерня	$B_1 = 0{,}5d_{e2} - h_{ae1}\sin\delta_1$
	Колесо	$B_2 = 0{,}5d_{e1} - h_{ae2}\sin\delta_2$

Таблица 7.2.2. **Условные обозначения и основные формулы геометрического расчета параметров ортогональной конической передачи с круговыми зубьями, изготовленными по форме 1**

Параметр		Обозначения и расчетные формулы
1. Число зубьев плоского колеса		$z_s = \sqrt{z_1^2 + z_2^2}$
2. Внешнее конусное расстояние		$R_e = 0{,}5m_{te}z_s$
3. Ширина зубчатого венца		b
4. Среднее конусное расстояние		$R = R_e - 0{,}5b$
5. Коэффициент ширины		$K_{be} = b / R_e$
6. Средний нормальный модуль		$m_n = \left(m_{te} - b/z_s\right)\cos\beta_n$
7. Передаточное число		$u = z_2/z_1$
8. Угол делительного конуса	Шестерня	$tg\delta_1 = 1/u$
	Колесо	$\delta_2 = 90^\circ - \delta_1$
9. Коэффициент смещения	Шестерня	x_{n1} — по формулам (7.2.12, 7.2.11)
	Колесо	$x_{n2} = -x_{n1}$
10. Коэффициент изменения толщины зубьев шестерни		$x_{\tau 1}$ — по формуле 7.2.13
11. Внешний окружной модуль		$m_{te} = 2R_e/z_s$
12. Высота ножки зуба в среднем сечении	Шестерня	$h_{f1} = \left(h_a^* + c^* - x_{n1}\right)m_n$
	Колесо	$h_{f2} = \left(h_a^* + c^* - x_{n1}\right)m_n$

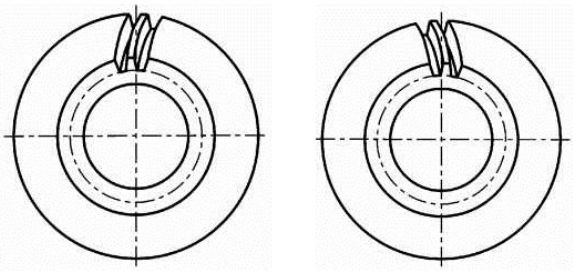
Параметр		Обозначения и расчетные формулы
13. Нормальная толщина зуба в среднем сечении	Шестерня	$s_{n1} = \left(0{,}5\pi + 2x_{n1}tg\alpha_n + x_{\tau 1}\right)m_n$
	Колесо	$s_{n2} = \pi\, m_n - s_{n1}$
14. Угол ножки зуба	Шестерня	$tg\theta_{f1} = h_{f1}/R$
	Колесо	$tg\theta_{f2} = h_{f2}/R$
15. Угол головки зуба	Шестерня	$\theta_{a1} = \theta_{f2}$
	Колесо	$\theta_{a2} = \theta_{f1}$
16. Увеличение высоты головки зуба при переходе от среднего сечения на внешний торец	Шестерня	$\Delta h_{ae1} = 0{,}5btg\theta_{a1}$
	Колесо	$\Delta h_{ae2} = 0{,}5btg\theta_{a2}$
17. Увеличение высоты ножки зуба при переходе от среднего сечения на внешний торец	Шестерня	$\Delta h_{fe1} = 0{,}5btg\theta_{f1}$
	Колесо	$\Delta h_{fe2} = 0{,}5btg\theta_{f2}$
18. Высота головки зуба в среднем сечении	Шестерня	$h_{a1} = \left(h_a^* + x_{n1}\right)m_n$
	Колесо	$h_{a2} - \left(h_a^* + x_{n2}\right)m_n$
19. Внешняя высота головки зуба	Шестерня	$h_{ae1} = h_{a1} + \Delta h_{ae1}$
	Колесо	$h_{ae2} = h_{a2} + \Delta h_{ae2}$
20. Внешняя высота ножки зуба	Шестерня	$h_{fe1} = h_{f1} + \Delta h_{fe1}$
	Колесо	$h_{fe2} = h_{f2} + \Delta h_{fe2}$
21. Внешняя высота зуба	Шестерня	$h_{e1} = h_{ae1} + h_{fe1}$
	Колесо	$h_{e2} = h_{ae2} + h_{fe2}$
22. Угол конуса вершин	Шестерня	$\delta_{a1} = \delta_1 + \theta_{a1}$
	Колесо	$\delta_{a2} = \delta_2 + \theta_{a2}$
23. Угол конуса впадин	Шестерня	$\delta_{f1} = \delta_1 - \theta_{f1}$
	Колесо	$\delta_{f2} = \delta_2 - \theta_{f2}$
24. Средний делительный диаметр	Шестерня	$d_1 = m_n z_1/\cos\beta_n$
	Колесо	$d_2 = m_n z_2/\cos\beta_n$

Параметр		Обозначения и расчетные формулы
25. Внешний делительный диаметр	Шестерня	$d_{e1} = m_{te} z_1$
	Колесо	$d_{e2} = m_{te} z_2$
26. Внешний диаметр вершин	Шестерня	$d_{ae1} = d_{e1} + 2h_{ae1}\cos\delta_1$
	Колесо	$d_{ae2} = d_{e2} + 2h_{ae2}\cos\delta_2$
27. Расстояние от вершины зуба до плоскости внешней окружности вершин	Шестерня	$B_1 = 0{,}5d_{e2} - h_{ae1}\sin\delta_1$
	Колесо	$B_2 = 0{,}5d_{e1} - h_{ae2}\sin\delta_2$
28. Коэффициент осевого перекрытия		$\varepsilon_\beta = \dfrac{b\sin\beta_n}{\pi m_n}$

Силы в зацеплении конических зубчатых колес. Нормальная сила F_n в зацеплении конической передачи, также как и цилиндрической, может быть разложена на три взаимно перпендикулярные составляющие: окружную F_t, радиальную F_r и осевую F_a. Величину окружной составляющей можно рассчитать как

$$F_t = \frac{2\cdot 10^3 T}{d}. \qquad (7.2.14)$$

Что касается радиальной и осевой сил, то их значения для колес с круговыми зубьями принципиально отличаются от аналогичных значений для прямозубых колес, поскольку зависят от направлений вращения колеса и линии наклона зуба (относительно вершины конуса). Дело в том, что конические колеса с круговым зубом могут иметь правое и левое направления линии зуба (рис. 7.2.7). Если при наблюдении с вершины конуса линия зуба разворачивается по часовой стрелке, то такое направление линии зуба считается правым (рис. 7.2.7a), при противоположном — левым (рис. 7.2.7b).



a) b)

Рис. 7.2.7

Рассмотрим силы, действующие в контактах прямозубых колес и колес с круговыми зубьями.

- контакт прямозубых конических колес (рис. 7.2.8).

$$F_V = F_t tg\alpha;$$

$$F_r = F_V\cos\delta = F_t\, tg\alpha\cos\delta;$$

$$F_a = F_V\sin\delta = F_t\, tg\alpha\sin\delta. \qquad (7.2.15)$$

Отметим, что если рассматривается ведущее колесо, то в (7.2.15) силы F_r и F_a, а также угол δ, как обычно, снабжаются индексом 1, величинам же, относящимся к ведомому колесу, приписываем индекс 2. Из формул (7.2.15) и ортогональности конической передачи ($\sum = \delta_1 + \delta_2 = 90^0$) следует, что имеют место равенства $F_{a1} = F_{r2}$ и $F_{a2} = F_{r1}$. Кроме того, направления сил на шестерне и колесе противоположны.

- контакт конических колес с круговыми зубьями (рис. 7.2.9).

Вектор нормальной силы $\vec{F}_n$, действующей в зацеплении конических колес с круговыми зубьями, представим в виде $\vec{F}_n = \vec{F}_V + \vec{F}_Q$. В свою очередь, $\vec{F}_Q = \vec{F}_t + \vec{F}_U$. Тогда, как видно из рисунка,

$$F_Q = \frac{F_t}{\cos\beta_n};\ \ F_V = F_Q tg\alpha_n = \frac{F_t tg\alpha_n}{\cos\beta_n};$$

$$F_U = F_Q \sin\beta_n = F_t tg\beta_n.$$

Следовательно, модули радиальной $\vec{F}_r$ и осевой $\vec{F}_a$ сил равны

$$F_r = F_{Vy} \mp F_{Uy} = \frac{F_t}{\cos\beta_n}\left(tg\alpha_n \cos\delta \mp \sin\beta_n \sin\delta\right);$$

$$F_a = F_{Vz} \pm F_{Uz} = \frac{F_t}{\cos\beta_n}\left(tg\alpha_n \sin\delta \pm \sin\beta_n \cos\delta\right). \qquad (7.2.16)$$

Знак “+“ берется в случае, когда направления вращения соответствующего колеса и линия наклона зуба совпадают, а “–“ — если противоположны. Напомним, что α_n — угол зацепления в нормальном сечении.

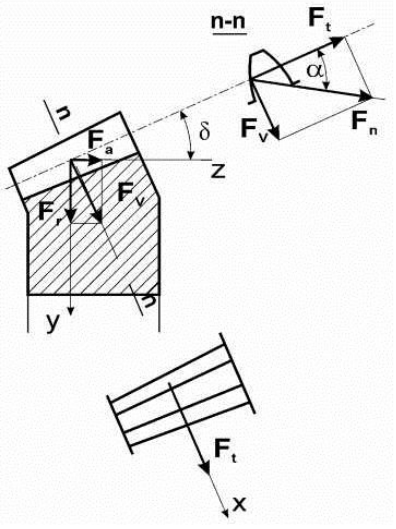


Рис. 7.2.8

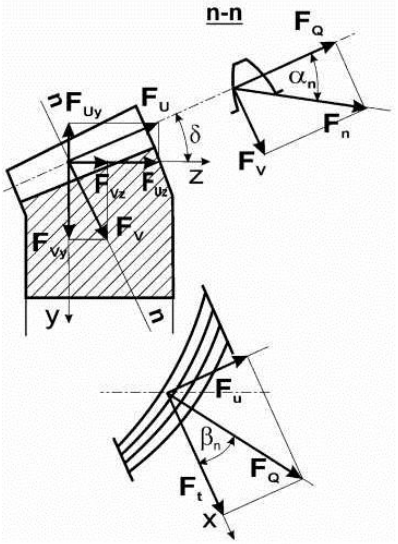


Рис. 7.2.9

Расчет контактной прочности передачи коническими колесами с прямым зубом. Основными причинами выхода из строя конических колес являются *усталостное выкрашивание* рабочих поверхностей зуба и их *усталостный излом,* что полностью соответствует характеру разрушения цилиндрических зубчатых колес. Следовательно, можно найти такое цилиндрическое колесо, которое по контакту и изгибу оказывается равнопрочным коническому. Цилиндрическая пара, равнопрочная конической, называется *эквивалентной*. При обозначении эквивалентных величин будем использовать индекс ee.

Расчет конического зацепления выполняется путем сведения конической пары к эквивалентной цилиндрической. В основу эквивалентного приведения можно положить принцип геометрического подобия, в соответствии с которым плоскость зуба эквивалентного колеса должна быть перпендикулярна торцевой поверхности. Как видно из рис. 7.2.10, значения эквивалентных радиусов колес конической пары равны

$$r_{ee1} = \frac{r_1}{\cos\delta_1}; \qquad r_{ee2} = \frac{r_2}{\cos\delta_2}, \tag{7.2.17}$$

где r_1 и r_2 — средние радиусы конических шестерни и колеса. Модель контактного взаимодействия зубьев конических колес (рис. 7.2.11) выберем точно такую же, которая рассматривалась при изучении цилиндрического зацепления. Такой подход позволяет использовать уже полученные ранее в главе 7.1 зависимости.

Итак, контакт зубьев эквивалентных цилиндрических колес может быть смоделирован контактом двух соприкасающихся цилиндров с радиусами ρ_{ee1} и ρ_{ee2}:

$$\rho_{ee1} = |PP'| = r_{ee1}\sin\alpha; \qquad \rho_{ee2} = |PP''| = r_{ee2}\sin\alpha. \tag{7.2.18}$$

Наибольшее напряжение в контакте двух зубьев определяется формулой, аналогичной (7.1.70), записанной в главе 7.1для линейного контакта двух цилиндров, а именно

$$\sigma_H = \sqrt{\frac{E_1E_2}{E_1\left(1-\mu_2^2\right)+E_2\left(1-\mu_1^2\right)}\cdot\frac{q_n}{\pi\rho_{ee}}}. \tag{7.2.19}$$

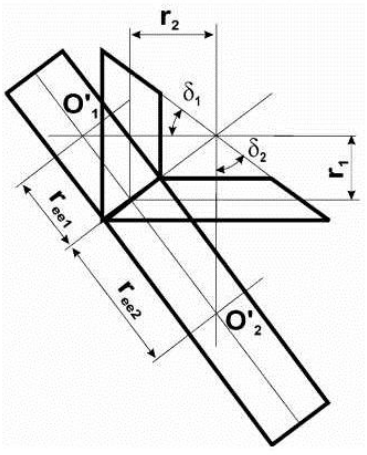


Рис. 7.2.10

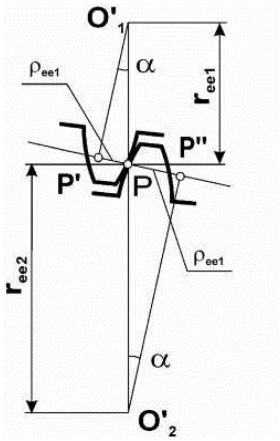


Рис. 7.2.11

Здесь все величины имеют тот же смысл, что и в (7.1.70), а ρ_{ee} — приведенный радиус, значение которого с учетом (7.2.17) и (7.2.18) равно

$$\frac{1}{\rho_{ee}} = \frac{1}{\rho_{ee1}} + \frac{1}{\rho_{ee2}} = \frac{r_{ee1} + r_{ee2}}{r_{ee1} r_{ee2} \sin\alpha} = \frac{r_1 \cos\delta_2 + r_2 \cos\delta_1}{r_1 r_2 \sin\alpha}. \qquad (7.2.20)$$

Поскольку, как следует из рис. 7.2.3,

$$r_2 = R\cos\delta_1; \quad r_1 = R\cos\delta_2,$$

то выражение (7.2.20) при условии $\delta_1 = 90^0 - \delta_2$ можно переписать в виде

$$\frac{1}{\rho_{ee}} = \frac{R}{r_1 r_2 \sin\alpha}. \qquad (7.2.21)$$

Далее полагаем, что в зацеплении находится один зуб. В этом случае, как было показано в главе 7.1, с помощью введения поправочных коэффициентов концентрации $K_{H\beta}$ и динамичности K_{Hv} нагрузки можно записать формулу для вычисления наибольшей удельной нормальной нагрузки на зуб $q_{n\max}$ в виде (7.1.74). Подставляя (7.2.21) в (7.2.19) и принимая во внимание (7.1.74), получаем

$$\sigma_H = Z_M Z_h Z_\varepsilon \sqrt{\frac{F_t u K_{H\beta} K_{Hv} R}{b d_2^2}}, \qquad (7.2.22)$$

где Z_M — введенная в (7.1.77) константа материалов; $Z_h = \sqrt{\frac{8}{\pi \sin 2\alpha}}$ — константа геометрии; $Z_\varepsilon = 1{,}0$ — коэффициент учета торцового перекрытия; $u = d_2 / d_1$ — передаточное отношение.

Если проектировочный расчет проводится для металлических колес ($E_1 = E_2 = 2{,}1 \cdot 10^5$ МПа, $\mu_1 = \mu_2 = 0{,}3$) и стандартного контура (угол зацепления $\alpha = 20^0$), то, используя усредненное значение константы Z_M (7.1.77) и учитывая (7.2.14), выражение для расчета контактного напряжения (7.2.22) можно записать как

$$\sigma_H = 670 \sqrt{\frac{F_t u K_{H\beta} K_{Hv} R}{b d_2^2}} = 3 \cdot 10^4 \sqrt{\frac{T_2 u K_{H\beta} K_{Hv} R}{b d_2^3}}, \qquad (7.2.23)$$

а условие контактной прочности конического зацепления —

$$\sigma_H = 3 \cdot 10^4 \sqrt{\frac{T_2 u K_{H\beta} K_{Hv} R}{b d_2^3}} \le \sigma_{Ha}, \qquad (7.2.24)$$

где σ_{Ha} — допускаемое контактное напряжение.

Для последующего упрощения (7.2.24) введем коэффициент ширины зубчатого венца $K_{be} = \dfrac{b}{R_e}$, так что соотношение (7.2.8) переписывается как

$$R = R_e\left(1 - 0{,}5\,K_{be}\right). \qquad (7.2.25)$$

Аналогично для диаметра d_2 имеем

$$d_2 = d_{e2} - b\sin\delta_2 = d_{e2} - \frac{bd_{e2}}{2R_{e2}} = d_{e2}\left(1 - 0{,}5K_{be}\right). \qquad (7.2.26)$$

Значение коэффициента K_{be} задается проектировщиком конической передачи в соответствии с выработанными практикой проектирования рекомендациями: $K_{be} = 0{,}25 \div 0{,}3$. Чаще всего выбирают среднее значение K_{be} из этого диапазона, а именно $K_{be} = 0{,}285$. По принятому значению коэффициента ширины венца и конусному расстоянию определяют ширину венца, которую в конечном итоге согласуют со значением, взятым из нормального ряда $R40$.

Необходимо отметить еще одно обстоятельство. Условие контактной прочности конического зацепления (7.2.24) получено приведением последнего к эквивалентному цилиндрическому. Однако такое, чисто геометрическое, приведение не совсем отражает физическую суть процесса усталостного разрушения. Последующие эксперименты показали, что эквивалентное цилиндрическое зацепление оказывается более прочным по отношению к реальной конической передаче. Это несоответствие можно устранить введением поправочного коэффициента изменения прочности $\vartheta_H = 0{,}85$. Тогда окончательно формулу (7.2.23) для расчета контактного напряжения, с учетом (7.2.25 — 7.2.26), можно представить в форме

$$\sigma_H = \frac{3\cdot 10^4}{\left(1 - 0{,}5K_{be}\right)}\sqrt{\frac{T_2 u K_{H\beta} K_{Hv}}{0{,}85 d_{e2}^3 K_{be}}}, \qquad (7.2.27)$$

а условие контактной прочности по допускаемым контактным напряжениям (7.2.24) —

$$\sigma_H = \frac{3\cdot 10^4}{\left(1 - 0{,}5K_{be}\right)}\sqrt{\frac{T_2 u K_{H\beta} K_{Hv}}{0{,}85 d_{e2}^3 K_{be}}} \le \sigma_{Ha}. \qquad (7.2.28)$$

Обычно из условия контактной прочности находят один из характерных геометрических параметров, например, внешний диаметр d_{e2}. Из (7.2.28) легко получить

$$d_{e2} = 970\sqrt[3]{\frac{T_2 u K_{H\beta} K_{Hv}}{0{,}85\left(1 - 0{,}5K_{be}\right)^2 K_{be}\sigma_{Ha}^2}}. \qquad (7.2.29)$$

Заметим, что иногда в литературе формула (7.2.29) встречается в несколько

иной форме, получаемой при разложении выражения $(1-0{,}5K_{be})^2$ в степенной ряд: $(1-0{,}5K_{be})^2 \approx 1{,}03(1-K_{be})$. Тогда имеем

$$d_{e2} = 960\sqrt[3]{\frac{T_2 u K_{H\beta} K_{Hv}}{0{,}85(1-K_{be})K_{be}\sigma_{Ha}^2}}.$$

Другие геометрические размеры конической передачи могут быть определены как функции внешнего диаметра (7.2.29). Величина допускаемого напряжения контактной прочности σ_{Ha} определяется по той же методике, которая была разработана для цилиндрических передач.

Особенности расчета контактной прочности конического зацепления с круговым зубом. Как уже было упомянуто ранее, прочность конических колес с круговым зубом выше, чем аналогичная прочность прямозубых передач. С увеличением угла наклона зуба улучшается также плавность работы передачи вследствие возрастания длины контактной линии и коэффициента перекрытия ε_γ. Расчетный угол наклона должен находится в пределах $\beta_n = 0^0 \div 45^0$. При его выборе следует придерживаться ряда рекомендованных углов наклона (в градусах): 0, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45. Кроме того, выбором угла наклона зуба необходимо обеспечить перекрытие с коэффициентом $\varepsilon_\gamma > 1{,}6$. Для выполнения всех этих условий, благоприятно влияющих на работу конического зацепления с круговым зубом, желательно выбирать значение угла, равное $\beta_n = 35^0$. Следует отметить также, что при $\varepsilon_\gamma < 1{,}25$ эффекта от применения кругового зуба нет.

Условие прочности при расчете конических колес с круговым зубом записывается аналогично (7.2.28), с той лишь разницей, что повышенная по отношению к прямозубым передачам прочность учитывается введением иного по величине поправочного коэффициента ϑ_H:

$$\sigma_H = \frac{3\cdot 10^4}{(1-0{,}5K_{be})}\sqrt{\frac{T_2 u K_{H\beta}.K_{Hv}}{\vartheta_H d_{e2}^3 K_{be}}} \le \sigma_{Ha}; \qquad (7.2.30)$$

$$d_{e2} = 970\sqrt[3]{\frac{T_2 u K_{H\beta} K_{Hv}}{\vartheta_H (1-0{,}5K_{be})^2 K_{be}\sigma_{Ha}^2}}. \qquad (7.2.31)$$

Расчет коэффициента ϑ_H рекомендуется выполнять по следующим формулам:

- $\vartheta_H = 1{,}22 + 0{,}21u$ — при твердости зубьев каждого из колес $HRC \le 35$;
- $\vartheta_H = 1{,}13 + 0{,}13u$ — при твердости зубьев одного из колес $HRC \ge 45$, а другого — $HRC \le 35$;
- $\vartheta_H = 0{,}81 + 0{,}15u$ — при твердости зубьев каждого из колес $HRC \ge 35$.

Расчет прочности конического зацепления с прямым зубом на изгиб. Расчет изгибной прочности прямозубых конических передач проводится аналогично их расчету на контактную прочность в том смысле, что конические колеса также заменяются эквивалентными цилиндрическими с диаметрами

$$d_{e1} = \frac{d_1}{\cos\delta_1} = m\, z_{V1}; \qquad d_{e2} = \frac{d_2}{\cos\delta_2} = m\, z_{V2}, \tag{7.2.32}$$

где $z_{V1} = \frac{z_1}{\cos\delta_1}$ и $z_{V2} = \frac{z_2}{\cos\delta_2}$ — приведенное число зубьев шестерни и колеса соответственно. Тогда условие изгибной прочности конического зацепления, по аналогии с (7.1.90) и с учетом тех же соображений, что и при рассмотрении контактной прочности, имеет вид

$$\sigma_F = \frac{2\cdot 10^3 T_2 K_{F\beta} K_{Fv} Y_F}{\vartheta_F d_2 b m_e} \le \sigma_{Fa}. \tag{7.2.33}$$

Значения Y_{F1} и Y_{F2} (коэффициентов формы зуба цилиндрических колес с числами зубьев z_{V1} и z_{V2} соответственно), а также коэффициенты $K_{F\beta}$ и K_{Fv} выбираются по методике, описанной в главе 7.1 для расчета цилиндрических колес. Числовой коэффициент изменения нагрузочной способности по изгибу $\vartheta_F = 0{,}85$ вводится по аналогии с контактом.

Особенности расчета на изгиб конических пар с круговым зубом. При расчете конических колес с круговым зубом необходимо выполнить двойное приведение: во-первых, коническую пару с круговым зубом следует привести к цилиндрической косозубой, которая в результате второго приведения может быть заменена прямозубой цилиндрической парой. Результат такого приведения записывается как следствие аналогичных операций, подробно рассмотренных при приведении цилиндрических колес с косым зубом к эквивалентным прямозубым (глава 7.1.4) и конических колес к эквивалентным цилиндрическим. Тогда

$$d_{ee1} = \frac{d_1}{\cos\delta_1 \cos^2\beta_n} = m_{te} z_{V1}; \qquad d_{ee2} = \frac{d_2}{\cos\delta_2 \cos^2\beta_n} = m_{te} z_{V2}, \tag{7.2.34}$$

где $z_{V1} = \frac{z_1}{\cos\delta_1 \cos^3\beta_n}$ — приведенное число зубьев шестерни; $z_{V2} = \frac{z_2}{\cos\delta_2 \cos^3\beta_n}$ — приведенное число зубьев колеса.

Условие прочности на изгиб, аналогично (7.2.33), записывается как

$$\sigma_F = \frac{2\cdot 10^3 T_2 K_{F\beta} K_{Fv} Y_F}{d_2 b m_{te} \vartheta_F} \le \sigma_{Fa}. \tag{7.2.35}$$

Коэффициент ϑ_F рекомендуется рассчитывать по формулам:

- $\vartheta_F = 0{,}94 + 0{,}080u$ — при твердости зубьев каждого из колес $HRC \le 35$;
- $\vartheta_F = 0{,}85 + 0{,}043u$ — при твердости зубьев одного из колес $HRC \ge 45$,

а другого — $HRC \le 35$;

- $\vartheta_F = 0{,}65 + 0{,}110u$ — при твердости зубьев каждого из колес $HRC \ge 35$.

Глава 7.3. **Червячные передачи**

Червячные передачи обеспечивают передачу вращательного движения между валами со скрещивающимися осями. Чаще всего угол скрещивания равен 90^0.

По конструкции червячная передача является зубчато-винтовым механизмом, сочетающим в себе свойства обоих механизмов. Она состоит из двух основных деталей: ведущего звена — *червяка* и ведомого — *червячного колеса* (рис. 7.3.1).

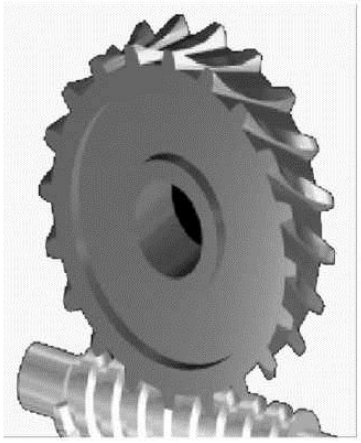


Рис. 7.3.1

Червяк представляет собой винт с резьбой трапецеидального либо близкого к нему профиля с малым числом заходов $z_1 = 1 \div 4$. Под числом заходов (или *заходностью*) понимают число винтовых поверхностей, исходящих из поперечного по отношению к оси червяка сечения. Червяк, нарезание которого происходит таким образом, что из его торцевой поверхности берут начало несколько винтовых линий, называется *многозаходным* (рис. 7.3.2).

Колесо червячной передачи — это косозубое зубчатое колесо, профиль зуба которого формируется огибанием витков червяка. Взаимный контакт зубьев в червячной передаче является линейным, что обеспечивает ей высокую грузоподъемность.

В зависимости от формы червяки подразделяются на *цилиндрические* (рис. 7.3.3b) и *глобоидные* (рис. 7.3.3a).

В передаче с *цилиндрическим* червяком делительные и начальные поверхности как червяка, так и колеса представляют собой круговые цилиндры, а в *глобоидных* — части вогнутой поверхности тора для червяка и круговые цилиндры для колеса. Глобоидные передачи способны передавать б*о*льшие моменты вращения, чем цилиндрические, за счет увеличения длины линии контакта. Однако они сложны в изготовлении и поэтому применяются реже.

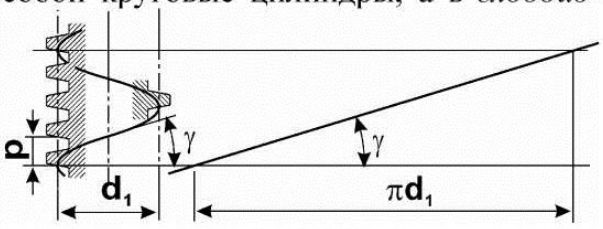
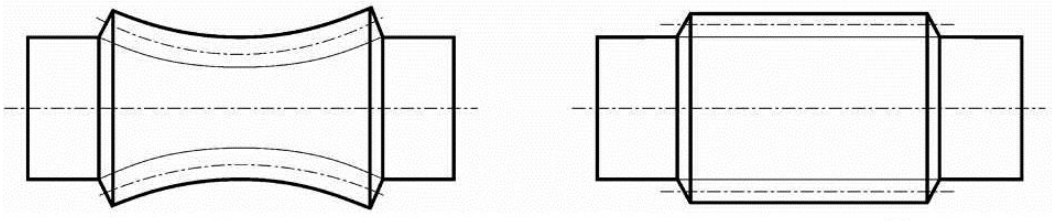


Рис. 7.3.2

Форма винтовой поверхности резьбы цилиндрического червяка также бывает различной. Существуют передачи с *архимедовым, конволютным* и *эвольвентным* червяками (рис. 7.3.4).



a) b)

Рис. 7.3.3

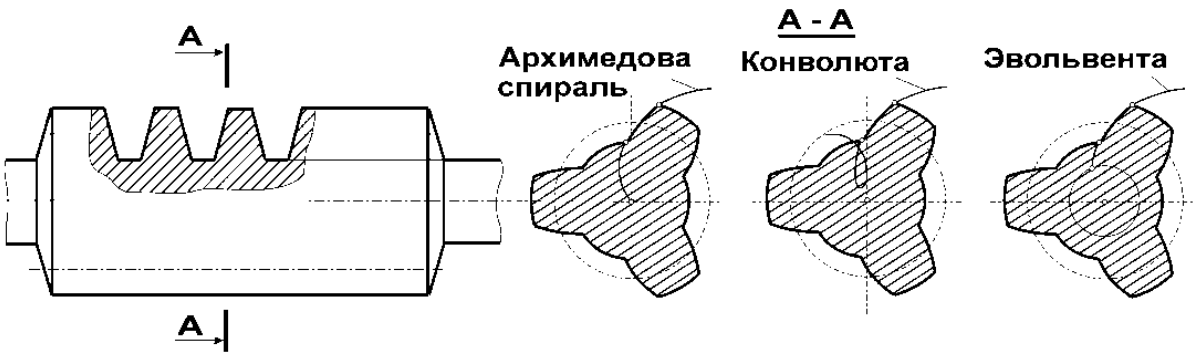


Рис. 7.3.4

Архимедов червяк имеет нормальное сечение в виде спирали Архимеда, а осевое — в виде трапецеидального профиля, аналогичного инструментальной рейке. Если в нормальном сечении витка плоскостью получается прямолинейный профиль, то червяк называется *конволютным*. Архимедов и конволютный червяки нарезаются на винторезных станках и, как правило, используются для мелкосерийного и единичного производства, поскольку передачи с такими червяками имеют меньший ресурс и повышенный износ по сравнению с эвольвентными. *Эвольвентный* червяк в нормальном к оси сечении имеет эвольвентный профиль. Его можно отождествить с зубчатым колесом с малым числом зубьев, имеющих большой угол наклона. Эти передачи технологичны и могут изготавливаться крупносерийно.

Достоинства червячных передач, при точном их изготовлении, заключаются в плавности и бесшумности работы, а также в возможности обеспечить большую величину передаточного отношения. Червячные механизмы имеют более высокую кинематическую точность по сравнению с другими зубчатыми передачами и потому используются при проектировании высокоточных кинематических цепей. Кроме того, червячные передачи конструктивно могут быть выполнены *самотормозящимися*.

Главным их недостатком является низкий КПД и, как следствие этого, существенный нагрев элементов, который вынуждает проводить специальные мероприятия для отвода выделенного в передаче тепла.

Далее мы остановимся более подробно на передачах с цилиндрическим червяком, т. к. из всех червячных именно они получили наибольшее распространение в машиностроении.

Основные геометрические параметры червячной передачи с цилиндрическим червяком. Прежде всего следует заметить, что поскольку червячное зацепление являются разновидностью зубчатого, то при расчете геометрии червяка и червячного колеса можно использовать соотношения, полученные для цилиндрических зубчатых передач (глава 7.1.1).

С целью уменьшения трудоемкости изготовления червячные колеса нарезают рейкой, параметры которой (в тех же обозначениях, что и в главе 7.1) равны $\alpha = 20^0$; $h_a^* = 1$; $h^* = 2{,}2$; $c^* = 0{,}2$ (не исключается, правда, применении исходного контура с иными размерами).

Основные геометрические параметры червячного колеса приведены на рис. 7.3.5, а червяка — на рис. 7.3.6. Рассмотрим их более подробно.

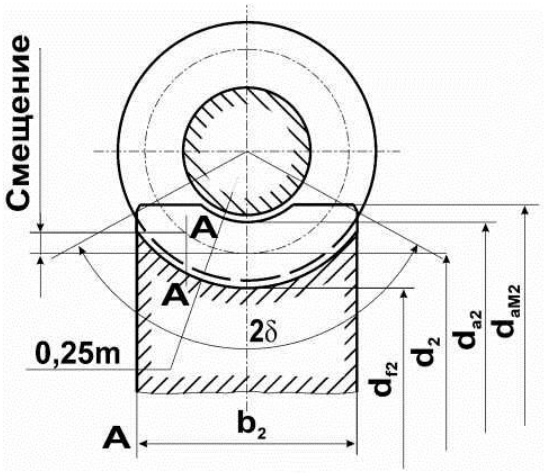


Рис. 7.3.5

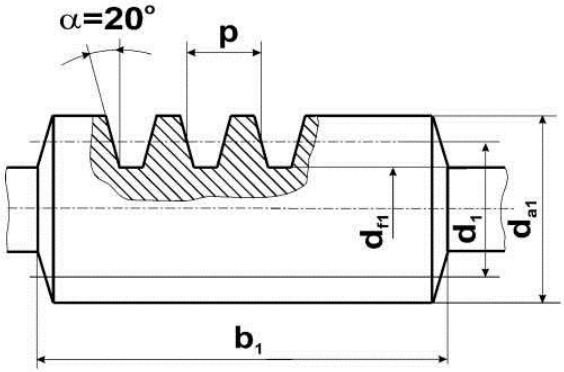


Рис. 7.3.6

При нарезании без смещения инструмента диаметр d_2 делительной окружности колеса с числом зубьев z_2 равен

$$d_2 = mz_2, \tag{7.3.1}$$

где $m = p/\pi$ — осевой модуль червяка, p — шаг винта в мм. Значения модуля m с целью ограничения номенклатуры необходимого для нарезания колес инструмента стандартизованы: m = 2,0; 2,50; 3,15; 4,0; 5,0; 6,3; 8,0; 10,0; 12,5; 16,0; 20,0; 25,0. Допускается использование модулей второго ряда: m = 3,0; 3,5; 6,0; 7,0; 12,0 (здесь не указаны модули величиной менее 2 мм).

Выбор модуля червячного зацепления целесообразно проводить по следующей схеме. Вначале по эмпирической формуле

$$m' = (1{,}4 \div 1{,}7)\frac{a}{z_2},$$

где a — делительное межосевое расстояние, определяется предварительное значение модуля m', которое затем округляется до ближайшего из нормального ряда модулей.

По аналогии с червячным колесом диаметр делительной окружности червяка d_1 равен

$$d_1 = mq. \tag{7.3.2}$$

Здесь q — коэффициент диаметра червяка, значения которого также стандартизованы: значения первого ряда q = 6,3; 8,0; 10,0; 12,5; 16,0; 20,0; 25,0; значения второго ряда q = 7,1; 9,0; 11,2; 14,0; 18,0; 22,4. Фактическую величину коэффициента диаметра следует выбирать исходя из условия обеспечения достаточной жесткости червяка, первоначально рассчитывая q по приближенной зависимости $q = 0{,}25z_2$, а затем уточняя полученное значение в соответствии с нормальным рядом. Для подбора коэффициента диаметра можно также использовать данные таблицы 7.3.1, связывающей q с величиной модуля m. Из (7.3.1) и (7.3.2) следует, что

$$d_2 = d_1\frac{z_2}{q}. \tag{7.3.3}$$

Таблица 7.3.1. **Модули m и коэффициенты диаметра червяка q**

m	q	m	q	m	q
1,6	10;12,5 16; 20	3,15	8; 10; 12,5; 16; 20	6,3; 8; 10; 12,5	8; 10; 12,5; 14; 16; 20
2	8	4	8; 10; 12,5; 16; 20	16	8;10; 12,5; 16
2,5	8; 10 12,5; 16; 20	5	8; 10; 12,5; 16; 20	20	8; 10

Важным геометрическим параметром для червяка является угол подъема винтовой линии γ. Если обозначить через z_1 число заходов на червяке, то, как следует из рисунка 7.3.2,

$$tg\gamma = \frac{pz_1}{\pi d_1} = \frac{z_1}{q}. \qquad (7.3.4)$$

Далее будет показано, что с увеличением числа заходов возрастает КПД передачи. Для червячных передач рекомендуется использовать одно-, двух- и четырехзаходные червяки, причем z_1 целесообразно выбирать в зависимости от передаточного отношения червячной пары, пользуясь данными таблицы 7.3.2.

Таблица 7.3.2. **Зависимость передаточного отношения u от числа заходов червяка z_1**

u	8 ÷ 14	14 ÷ 30	Свыше 30
z_1	4	2	1

Другие геометрические параметры червячного зацепления определяются в зависимости от основных геометрических размеров по формулам, аналогичным полученным ранее для цилиндрических зубчатых передач (глава 7.1.1).

В общем случае нарезание червячной передачи может происходить со смещением инструмента x. При таком варианте исполнения червячного зацепления диаметр делительной окружности червяка полагают не равным его начальному диаметру, а именно:

делительный диаметр червяка $d_1 = mq$;

начальный диаметр червяка $d_{W1} = m(q + 2x)$. (7.3.5)

Колеса червячных передач нарезают со смещением, а диаметр начальной окружности для обеспечения постоянства передаточного отношения полагают равным диаметру делительной окружности:

$$d_{W2} \equiv d_2 = mz_2. \qquad (7.3.6)$$

Наружные диаметры червяка и червячного колеса:

$$d_{a1} = m\left(z_1 + 2h_a^*\right); \qquad d_{a2} = m\left(z_2 + 2x + 2h_a^*\right).$$

Внутренние диаметры:

$$d_{f1} = m(z_1 - 2h_f^*); \qquad d_{f2} = m(z_2 + 2x - 2h_f^*). \qquad (7.3.7)$$

Для того чтобы избежать подреза и заострения, значение коэффициента смещения ограничивается диапазоном $-1 \le x \le 1$.

Величина наибольшего диаметра d_{aM2} червячного колеса определяется углом обхвата 2δ витка червяка зубом колеса:

$$d_{aM2} = d_2 + d_1(1 - \cos\delta). \qquad (7.3.8)$$

Значение угла обхвата 2δ можно выбрать исходя из следующих рекомендаций, основанных на практике проектирования:

- $2\delta = 90^0 \div 110^0$ — для силовых передач;
- $2\delta = 70^0 \div 90^0$ — для кинематических передач и передач, используемых в приборостроении.

Межосевое расстояние a для передач без смещения исходного контура равно

$$a = 0{,}5\left(d_1 + d_2\right) = 0{,}5m\left(q + z_2\right), \qquad (7.3.9)$$

а для передач, изготовленных со смещением,

$$a_W = 0{,}5m\left(q + z_2 + 2x\right). \qquad (7.3.10)$$

С учетом (7.3.2) формулу (7.3.9) можно переписать в виде

$$a = 0{,}5d_1\left(1 + \frac{z_2}{q}\right),$$

откуда

$$d_1 = \frac{2a}{1 + \frac{z_2}{q}}. \qquad (7.3.11)$$

Аналогично с помощью (7.3.9) и (7.3.11) определяется диаметр d_2:

$$d_2 = 2a - d_1 = \frac{2az_2}{q\left(1 + \frac{z_2}{q}\right)}. \qquad (7.3.12)$$

Из (7.3.10) находится коэффициент смещения x, необходимый для обеспечения заданного межосевого расстояния,

$$x = \frac{a_W}{m} - 0{,}5\left(q + z_2\right), \qquad -1 \le x \le 1. \qquad (7.3.13)$$

Длина нарезанной части червяка (ширина червяка) b_1 зави-

сит от заходности и величины смещения. Ее значение должно быть таким, чтобы обеспечить зацепление наибольшего числа витков (табл. 7.3.3).

Таблица 7.3.3. **Длина нарезанной части червяка** b_1

x	$z_1 = 1$ и 2	$z_1 = 3$ и 4
–1,0	$b_1 \geq (10{,}5 + 0{,}06z_2)m$	$b_1 \geq (10{,}5 + 0{,}09z_2)m$
–0.5	$b_1 \geq (8 + 0{,}06z_2)m$	$b_1 \geq (9{,}5 + 0{,}09z_2)m$
0.0	$b_1 \geq (11 + 0{,}06z_2)m$	$b_1 \geq (12{,}5 + 0{,}09z_2)m$
0.5	$b_1 \geq (11 + 0{,}1z_2)m$	$b_1 \geq (12{,}5 + 0{,}1z_2)m$
1,0	$b_1 \geq (12 + 0{,}1z_2)m$	$b_1 \geq (13 + 0{,}1z_2)m$

Ширину венца b_2 червячного колеса можно определить как

$$b_2 = (0{,}315 \div 0{,}355)a, \qquad (7.3.14)$$

причем чем меньше заходность z_1, тем больший коэффициент из указанного диапазона следует выбирать, и наоборот.

Кинематика червячных передач. Как уже упоминалось выше, одним из главных недостатков червячной передачи является большая величина относительной скорости элементов зацепления в контакте, что приводит к повышенному уровню тепловыделения и, следовательно, к относительно низкому КПД.

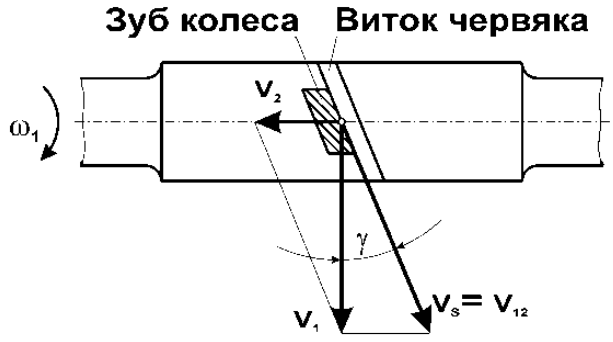


Рис. 7.3.7

На рис. 7.3.7 показан в разрезе зуб червячного колеса, контактирующий с витком червяка. Векторы окружных скоростей точек контакта, относящиеся к червяку и червячному колесу, обозначим соответственно как $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$. Эти скорости (в отличие от аналогичных скоростей для зубчатых передач) не равны между собой ни по модулю, ни по направлению. Направления векторов $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ составляют между собой так называемый угол скрещивания, обычно равный 90^0. Относительная скорость $\vec{v}_{12} = \vec{v}_s$, равная

$$\vec{v}_{12} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2, \qquad (7.3.15)$$

называется скоростью скольжения. Она существенно влияет на выбор размеров элементов червячного зацепления. Из рисунка видно, что

$$v_s = \frac{v_1}{\cos\gamma} = \frac{v_2}{\sin\gamma}. \qquad (7.3.16)$$

Окружные скорости в контакте можно выразить через угловые, а именно

$$v_1 = 0{,}5\omega_1 d_1;\ v_2 = 0{,}5\omega_2 d_2. \qquad (7.3.17)$$

Тангенс угла подъема винтовой линии, как следует из рис. 7.3.7 и (7.3.17), можно представить в виде

$$tg\gamma = \frac{v_2}{v_1} = \frac{\omega_2 d_2}{\omega_1 d_1}. \qquad (7.3.18)$$

С другой стороны, для $tg\gamma$ справедливо выражение (7.3.4). Приравнивая между собой правые части (7.3.18) и (7.3.4), с учетом (7.3.6) для передаточного отношения $u = \frac{\omega_1}{\omega_2}$ имеем

$$u = \frac{d_2}{mz_1} = \frac{z_2}{z_1}. \qquad (7.3.19)$$

Формула (7.3.19) получена для передач без смещения. Из нее видно, что значение передаточного отношения не зависит от диаметра червяка, а определяется только диаметром колеса. В свою очередь, если имеет место смещение инструмента, то для обеспечения постоянства передаточного отношения следует принять $d_{W2} \equiv d_2$, а d_{W1} вычислять по формуле (7.3.5).

Из сравнения формул (7.3.19) с (7.1.17) ясно, что число заходов червяка играет ту же роль, что и число зубьев шестерни в цилиндрической зубчатой передаче. Но поскольку конструктивно червяк в отличие от шестерни может быть изготовлен с небольшим числом заходов (напомним, что $z_1 = 1 \div 4$), то передаточное отношение червячной пары может быть значительно больше, чем цилиндрической (в силовых червячных передачах, как правило, $u = 10 \div 60$, а в кинематических цепях приборов и делительных механизмов — $u \le 300$).

Силы в червячном зацеплении. В контакте червячного зацепления при передаче внешнего момента вращения T_1 возникает сила F_n, направленная вдоль линии зацепления. Эта сила может быть представлена в виде суммы проекций на три взаимно перпендикулярных направления. В качестве такой системы координат можно взять направления осей червяка и червячного колеса и ось, взаимно им перпендикулярную. Тогда составляющие общего усилия можно представить как совокупность осевой F_{a1}, F_{a2}, окружной F_{t1}, F_{t2} и радиальной F_{r1}, F_{r2} сил (рис. 7.3.8).

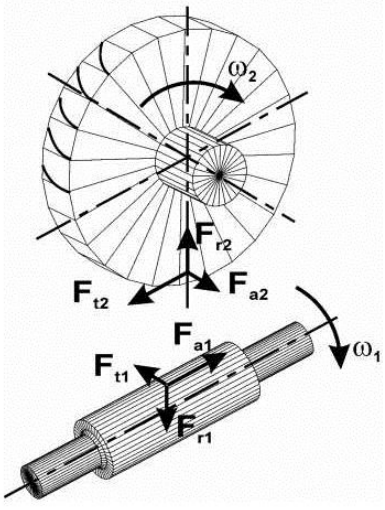


Рис. 7.3.8

Для определения этих составляющих рассмотрим картину контактного взаимодействия в нормальном к направлению витка сечении (рис. 7.3.9). Обозначим через α_n' угол зацепления в

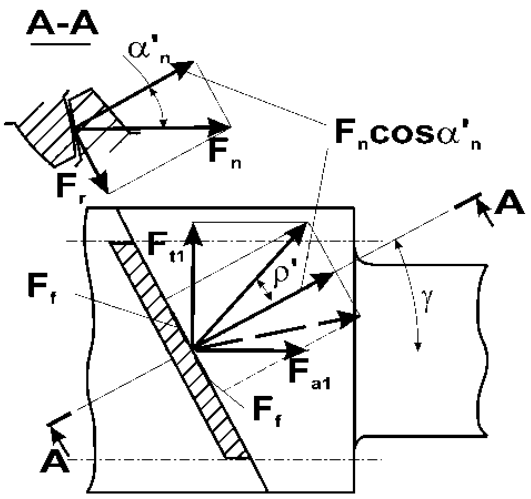


Рис. 7.3.9

нормальном сечении, f — коэффициент трения, $f' = f / \cos\alpha'_n = tg\rho'$ — приведенный коэффициент трения (по аналогии с резьбовыми соединениями, см. главу 4.1), ρ' — угол трения. Тогда проекция вектора нормальной силы $\vec{F}_n$ в этом сечении на горизонтальную плоскость равна $F_n \cos\alpha'_n$, а модуль силы трения имеет вид $F_f = F_n f' \cos\alpha'_n$.

Из геометрических соображений (рис. 7.3.8) очевидно, что окружная сила F_{t1} на червяке будет равна осевой силе F_{a2} на колесе, и наоборот, т. е.

$$F_{t1} = F_{a2} = \frac{2T_1 \cdot 10^3}{d_1}; \qquad F_{t2} = F_{a1} = \frac{2T_2 \cdot 10^3}{d_2}. \tag{7.3.20}$$

Связь окружной и осевой сил задается точно так же, как и для резьбовых соединений, а именно соотношением (4.1.3):

$$F_{t1} = F_{a2} = F_{t2} tg(\gamma + \rho'). \tag{7.3.21}$$

Осевая сила на червяке, как следует из рис.7.3.9, имеет вид

$$F_{a1} = \frac{F_n \cos\alpha'_n}{\cos\rho'} \cos(\gamma + \rho'). \tag{7.3.22}$$

Принимая во внимание (7.3.20), из (7.3.22) определяем значение нормальной силы:

$$F_n = \frac{F_{t2} \cos\rho'}{\cos\alpha'_n \cos(\gamma + \rho')}. \tag{7.3.23}$$

Обычно сила трения мала, и ее наличием в формуле (7.3.23) можно пренебречь (т.е. положить $\rho' = 0$). Тогда, учитывая, что в нормальном сечении червяка допустимо положить $\alpha'_n \approx \alpha$, где α — угол зацепления, получаем

$$F_n = \frac{F_{t2}}{\cos\alpha \cos\gamma}; \qquad F_r = F_n \sin\alpha = \frac{F_{t2} tg\alpha}{\cos\gamma}. \tag{7.3.24}$$

Коэффициент полезного действия червячной передачи. Потери мощности в червячном передаче складываются из: потерь в зацеплении, потерь в зубьях и сопряженных с зацеплением деталях (таких как валы, подшипники и т.д.), потерь на разбрызгивание масла и т.п. Однако все виды потерь, кроме присутствующих в зацеплении, довольно малы, и их наличием можно пренебречь. При этом коэффи-

циент полезного действия передачи η можно определить как отношение мощностей на выходе и на входе:

$$\eta = \frac{T_2\omega_2}{T_1\omega_1} = \frac{F_{t2}d_2\omega_2}{F_{t1}d_1\omega_1}. \qquad (7.3.25)$$

Выражение (7.3.25) с учетом (7.3.21) и (7.3.4) записывается в форме

$$\eta = \frac{tg\gamma}{tg(\gamma + \rho')}. \qquad (7.3.26)$$

Если в качестве ведущего звена используется не червяк, а червячное колесо, то

$$\eta = \frac{tg(\gamma - \rho')}{tg\gamma}. \qquad (7.3.27)$$

Таблица 7.3.4. **Приведенные коэффициенты трения f' и углы трения ρ' между стальным червяком и колесом**

v_s, м/с	f'	ρ'	v_s, м/с	f'	ρ'
0,01	0,1 ÷ 0,12	$5^0 40' \div 6^0 50'$	2,5	0,03 ÷ 0,04	$1^0 40' \div 2^0 20'$
0,1	0,08 ÷ 0,09	$4^0 30' \div 5^0 10'$	3,0	0,028 ÷ 0,035	$1^0 30' \div 2^0 00'$
0,25	0,065 ÷ 0,075	$3^0 40' \div 4^0 20'$	4,0	0,023 ÷ 0,030	$1^0 20' \div 1^0 40'$
0,5	0,055 ÷ 0,085	$3^0 10' \div 3^0 40'$	7,0	0,018 ÷ 0,026	$1^0 00 \div 1^0 30'$
1,0	0,045 ÷ 0,055	$2^0 30' \div 3^0 10'$	10,0	0,016 ÷ 0,024	$0^0 55 \div 1^0 20'$
1,5	0,04 ÷ 0,05	$2^0 20' \div 2^0 50'$	15,0	0,014 ÷ 0,020	$0^0 50' \div 1^0 10'$
2,0	0,035 ÷ 0,045	$2^0 00' \div 2^0 30'$			

Как видно из (7.3.26) и (7.3.27), КПД червячных передач зависит от приведенного угла трения ρ', который, в свою очередь, определяется скоростью скольжения. Расчет углов и коэффициентов трения рекомендуется проводить с помощью данных таблицы 7.3.4.

При приближенных расчетах коэффициент полезного действия червячной передачи для различных значений числа заходов червяка можно принимать равным:

- $z_1 = 1 \qquad \eta \approx 0,70 \div 0,75$;
- $z_1 = 2 \qquad \eta \approx 0,75 \div 0,82$;
- $z_1 = 4 \qquad \eta \approx 0,87 \div 0,92$.

Критерии работоспособности и расчеты червячных передач. Основными причинами выхода из строя червячных передач, в противоположность другим зубчатым передачам, являются *заедание* и *износ*. Заедание представляет собой про-

цесс, при котором частицы металла, находящиеся на внешней поверхности червячного колеса, вырываются из нее и привариваются к поверхности червяка. Происходит это вследствие высокой температуры на поверхности колеса, которая пропорциональна работе силы трения в единицу времени и скорости теплоотвода.

Характер возможных разрушений определяет выбор материалов, используемых для изготовления червяка и червячного колеса. В подавляющем большинстве случаев в качестве материала для червяка применяется сталь, а колесо, как правило, изготавливается из бронзы (иногда, для снижения себестоимости колеса, используется чугун).

Как и при заедании, в случае износа главным фактором, влияющим на процесс разрушения, является наличие *контактных напряжений*. В этой связи в основе анализа червячных передач лежит расчет *усталостной прочности по контактным напряжениям.*

Еще одной вероятной причиной разрушения червячных передач вследствие процессов усталостного характера является *излом* зубьев. Такое разрушение характерно только для червячных колес, которые изготавливаются из менее прочного материала, чем червяки, и потому (а также в силу своей геометрической формы) оказываются менее прочными на изгиб. Проверка *усталостной прочности на изгиб* выполняется в качестве проверочного расчета.

Расчет контактной прочности червячного зацепления и определение основных геометрических размеров передачи. На рис. 7.3.10 изображен контакт зуба колеса с витком червяка. В нормальном сечении контакт зубьев может быть заменен контактом цилиндров с радиусами ρ_{e1} и ρ_{e2}. В результате такого контакта возникают напряжения, максимальная величина которых, как и в случае зубчатых передач (см. 7.1.70), определяется формулой

$$\sigma_H = \sqrt{\frac{E_1 E_2}{E_1\left(1-\mu_2^2\right)+E_2\left(1-\mu_1^2\right)}\cdot\frac{q_n}{\pi\rho_e}}, \qquad (7.3.28)$$

где $1/\rho_e$ — приведенная кривизна, которая вычисляется как

$$\frac{1}{\rho_e}=\frac{1}{\rho_{e1}}+\frac{1}{\rho_{e2}}.$$

Очевидно, что радиус кривизны витка червяка $\rho_{e1}=\infty$, тогда как для колеса

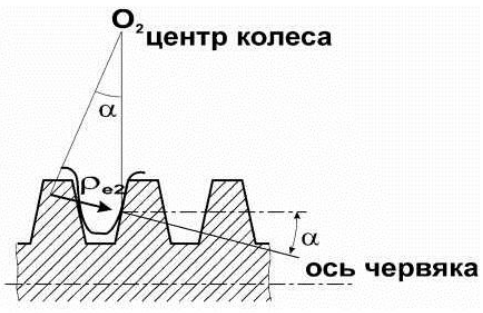


Рис. 7.3.10

$$\rho_{e2}=\frac{d_2\sin\alpha}{2}. \qquad (7.3.29)$$

Рассматриваем далее червячное колесо как аналог косозубого цилиндрического, в том смысле, что его можно привести к эквивалентному прямозубому колесу. Выполнив эту операцию, для приведенной кривизны $1/\rho_e$ при помощи (7.3.29) аналогично (7.1.100) получим

$$\frac{1}{\rho_e} = \frac{2\cos^2\gamma}{d_2 \sin\alpha}. \qquad (7.3.30)$$

Удельная нормальная нагрузка на единицу длины зуба в предположении равномерного ее распределения по длине зуба в соответствии с (7.3.24) равна

$$q_n = \frac{F_n'}{l_s} = \frac{F_{t2}}{l_s \cos\alpha \cos\gamma}, \qquad (7.3.31)$$

где l_s — полная длина контакта, которая определяется геометрически с введением ряда поправок:

$$l_s = \frac{\xi b_2'}{\cos\gamma}\varepsilon_\alpha. \qquad (7.3.32)$$

Здесь $\xi = 0{,}75$ — коэффициент, который учитывает уменьшение длины контактной линии из-за того, что реальный угол обхвата меньше 2δ; ε_α — коэффициент торцевого перекрытия, величина которого лежит в пределах $\varepsilon_\alpha \cong 1{,}8 \div 2{,}2$. При дальнейших расчетах полагаем $\varepsilon_\alpha = 2$, угол подъема винтовой линии $\gamma = 10^0$, угол обхвата $2\delta = 100^0 \cong 1{,}75$ рад. Через b_2' обозначена проекция геометрической длины линии контакта, равная проекции ширины колеса. Величина b_2' определяется через параметры червяка как $b_2' = 2\delta\,\frac{d_1}{2} \cong 0{,}87 d_1$. Если подставить в формулу (7.3.32) принятые значения входящих в нее параметров, получим

$$l_s = \frac{1{,}3 d_1}{\cos\gamma}. \qquad (7.3.33)$$

Удельная сила q_n, рассчитанная по формуле (7.3.31), соответствует средней статической нагрузке, что не совсем верно отражает суть процесса разрушения. Напомним, что разрушение начинается в наиболее напряженных точках, поэтому расчет прочности следует вести по наибольшим напряжениям. Это может быть обеспечено введением поправочных коэффициентов $K_{H\beta}$ (коэффициент концентрации нагрузки) и K_{Hv} (коэффициент динамичности нагрузки) – подробно об этом говорилось в главе 7.1 при рассмотрении расчета зубчатых передач. Тогда для максимального контактного напряжения σ_H из (7.3.28) с учетом (7.3.30), (7.3.31) и (7.3.33) имеем

$$\sigma_H = Z_M Z_h \sqrt{\frac{F_t K_{H\beta} K_{Hv}}{d_2 d_1}}, \qquad (7.3.34)$$

где

$$Z_M = \sqrt{\frac{E_1 E_2}{E_1\left(1-\mu_2^2\right)+E_2\left(1-\mu_1^2\right)}};\ Z_h = \sqrt{\frac{4\cos^2\gamma}{1{,}3\pi\sin 2\alpha}}.$$

Далее полагаем, что червяк изготовлен из стали ($E_1 = 2{,}1\cdot 10^5$ Н/мм^2, $\mu_2 = 0{,}3$), червячное колесо — из бронзы ($E_2 = 0{,}9\cdot 10^5$ Н/мм^2, $\mu_2 = 0{,}3$), угол подъема винтовой линии $\gamma \approx 10^0$, а расчет контактной прочности выполняется для стандартного контура с $\alpha = 20^0$. Тогда выражение (7.3.34) преобразуется как

$$\sigma_H = 320\sqrt{\frac{2T_2\cdot 10^3 K_{H\beta}K_{Hv}}{d_2^2 d_1}}. \qquad (7.3.35)$$

Подставляя в (7.3.35) d_1 из (7.3.11) и d_2 из (7.3.12), окончательно получаем формулу для наибольшего контактного напряжения:

$$\sigma_H = \frac{5300q}{z_2}\sqrt{\left(\frac{z_2+q}{aq}\right)^3 T_2 K_{H\beta}K_{Hv}}.$$

Условие контактной прочности при этом приобретает вид

$$\sigma_H = \frac{5300q}{z_2}\sqrt{\left(\frac{z_2+q}{aq}\right)^3 T_2 K_{H\beta}K_{Hv}} \le \sigma_{Ha}, \qquad (7.3.36)$$

где σ_{Ha} — допускаемое контактное напряжение для червячных колес. Здесь уместно напомнить, что все расчеты на прочность проводятся в предположении $d_W \cong d;\ a_W \cong a$.

Если нарезание зубьев происходит со смещением инструмента, условие прочности (7.3.36) переписывается как

$$\sigma_H = \frac{5300(q+2x)}{z_2}\sqrt{\left(\frac{z_2+q+2x}{a(q+2x)}\right)^3 T_2 K_{H\beta}K_{Hv}} \le \sigma_{Ha}. \qquad (7.3.37)$$

Удобно записать условие прочности несколько в иной форме, а именно, разрешив (7.3.36) и (7.3.37) относительно межосевого расстояния a, которое представляет собой один из важнейших геометрических параметров:

- нарезание без смещения

$$a = \left(\frac{z_2}{q}+1\right)\sqrt[3]{\left(\frac{5300}{\sigma_{Ha}\dfrac{z_2}{q}}\right)^2 K_{H\beta}K_{Hv}T_2}; \qquad (7.3.38)$$

- нарезание со смещением

$$a_W = \frac{z_2 + q + 2x}{q + 2x}\sqrt[3]{\left(\frac{5300(q + 2x)}{\sigma_{Ha} z_2}\right)^2 K_{H\beta} K_{Hv} T_2}\ . \qquad (7.3.39)$$

Расчет на прочность при изгибе. Расчет прочности червячной передачи на изгиб, проводимый в форме проверочного, принципиально не отличается от аналогичного расчета цилиндрического колеса с косым зубом.

Таблица 7.3.5. **Коэффициенты формы зуба червячного колеса Y_F**

z_v	Y_F	z_v	Y_F	z_v	Y_F	z_v	Y_F
20	1,98	30	1,76	40	1,55	80	1,34
24	1,88	32	1,71	45	1,48	100	1,30
26	1,85	35	1,64	50	1,45	150	1,27
28	1,80	37	1,61	60	1,40	300	1,24

Учитывая сказанное выше, определим напряжение растяжения у основания зуба σ_F так же, как и в главе 7.1 для случая косозубых зубчатых колес. Особенности формы зубьев червячного колеса учтем с помощью коэффициента формы зуба Y_F, значения которого приведены в таблице 7.3.5. Подчеркнем, что коэффициент формы зуба Y_F зависит от приведенного числа зубьев z_v, равного $z_v = \dfrac{z}{\cos^3\gamma}$. Тогда согласно (7.1.90) и (7.3.20) имеем

$$\sigma_F = \frac{F_{t2} K_{F\beta} K_{Fv} Y_F}{m l_s}. \qquad (7.3.40)$$

Подстановка в (7.3.40) выражения (7.3.33) приводит к следующему условию прочности зубьев колеса на изгиб:

- при нарезании без смещения инструмента

$$\sigma_F = \frac{F_{t2} K_{F\beta} K_{Fv} Y_F \cos\gamma}{1{,}3 m^2 q} \le \sigma_{Fa};$$

- при нарезании со смещением

$$\sigma_F = \frac{F_{t2} K_{F\beta} K_{Fv} Y_F \cos\gamma}{1{,}3 m^2 (q + 2x)} \le \sigma_{Fa}. \qquad (7.3.41)$$

где σ_{Fa} — допускаемое напряжение изгиба.

Выбор коэффициентов нагрузки. Следует отметить, что для червячных передач значения коэффициентов нагрузки, входящих в формулы для прочностного анализа передач, существенно меньше, чем для остальных типов зубчатых передач.

Это объясняется особенностью компоновки червячных механизмов и тем обстоятельством, что абсолютные скорости работы червячного зацепления намного ниже, чем зацеплений других типов.

Для определения коэффициентов концентрации нагрузки имеются эмпирические формулы, но точность таких вычислений мала. Кроме того, в червячных передачах имеет место так называемая *приработка*, которая в конечном итоге значительно уменьшает значения $K_{H\beta}$ и $K_{F\beta}$ (приработка как физическое явление представляет собой способность находящихся в контакте материалов изнашиваться пропорционально контактной нагрузке, что по истечении времени приводит к равномерному распределению контактных давлений). Разумным выходом из этой ситуации является выбор средних значений коэффициентов концентрации из диапазона $K_{H\beta} = K_{F\beta} = 1{,}05 \div 1{,}15$.

Что касается коэффициентов динамичности нагрузки, то, как показывает практика проектирования, без существенных погрешностей при расчетах можно принимать $K_{Hv} = K_{Fv} = 1$.

Допускаемые напряжения. Величины допускаемых напряжений σ_{Ha} и σ_{Fa} зависят от материалов, из которых изготовлены элементы червячного зацепления. Материалы червячных пар, вследствие особенностей червячного зацепления, должны быть прочными, иметь низкий коэффициент трения и обладать способностью к приработке. Как уже упоминалось выше, наилучшим выбором с этой точки зрения является сочетание стали и бронзы (сплав на основе меди), когда червяк изготавливается из стали, а колесо — из бронзы. Для повышения износостойкости и стойкости к задиру червяки должны иметь высокую твердость поверхности за счет применения закалки либо использования других методов поверхностного упрочнения. Необходимо также добиваться высокой чистоты обработки поверхности червяка шлифованием или полированием. При выборе материала для изготовления червячного колеса предпочтение следует отдавать сплавам меди, легированной оловом (несколько худшие показатели у меди, легированной алюминием). В передачах малой мощности применяют колеса из капрона и других неметаллических материалов.

Механические свойства материалов, используемых для изготовления венцов червячных колес, приведены в таблице 7.3.6.

Допускаемое контактное напряжение σ_{Ha} для колес из бронзы с содержанием олова и при твердости червяка $HRC \geq 45$ равно

$$\sigma_{Ha} = 0{,}9\sigma_b \sqrt[8]{\frac{10^7}{N_{He}}}, \qquad (7.3.42)$$

где σ_b — предел прочности бронзы; N_{He} — эквивалентное число циклов нагружения колеса. Границы применимости выражения (7.3.42) следующие: $0{,}55\sigma_b \leq \sigma_{Ha} \leq 0{,}95\sigma_b$. При твердости $HRC \leq 45$ в формуле (7.3.42) вместо числового коэффициента 0,9 нужно брать 0,7.

Контактные напряжения, возникающие в червячных колесах, изготовленных из не содержащей олова бронзы, зависят еще и от скорости скольжения v_s (напомним,

что большая величина этой скорости вызывает износ или заедание, что, в конечном итоге, заставляет снижать величину допускаемого напряжения):

$$\sigma_{Ha} = \frac{0{,}7\sigma_b}{\sqrt[4]{1+v_s}} \sqrt[8]{\frac{10^7}{N_{He}}}, \qquad (7.3.43)$$

причем

$$0{,}50\sigma_b \le \sigma_{Ha} \le 0{,}80\sigma_b .$$

В некоторых случаях вместо (7.3.43) используют другую формулу:

$$\sigma_{Ha} = (200 \div 300) - 25v_s .$$

Здесь $[\sigma_{Ha}]$=МПа, $[v_s]$=м/с.

Таблица 7.3.6. **Механические характеристики материалов для венцов червячных колес**

Материал	Способ отливки	σ_b	σ_r	E·10^{-5}	Твердость, НВ	Максимальная скорость скольжения v_s, м/с
		МПа				
Бр010Ф1	З К	200 260	120 150	0,74 1,01	80—100 100—120	25
БрОНФ	Ц	290	170	0,98	100—120	35
Бр06Ц6С3	З К	160 180	108 78	0,93	60 60—76	12
Бр05Ц5С5	З К	147 200	80 100	0,88 0,88	60—68 60—66	12
БрА9Ж3Л	З К, Ц Ц	390 500 500	— 200 200	— 1,1	110 110—140	10 10
БрА10Ж4Н4Л	К ,Ц	600	400	0,98	170—225	10
ЛЦ38Мц2С2	К	300	130	0,9	80—96	10
СЧ 15	З	314	—	0,9	163—229	3
СЧ 18	З	353	—	1	170—241	2

Примечание. Способ отливки: З — в землю, К — в кокиль, Ц — центробежный.

Допускаемые напряжения изгиба σ_{Fa} при расчете червячных колес с коэффициентом запаса $S_F = 1{,}75$ рекомендуется определять как

$$\sigma_{Fa} = \frac{(0{,}44\sigma_r + 0{,}14\sigma_b)}{S_F} \sqrt[9]{\frac{10^6}{N_{Fe}}}; \qquad (7.3.44)$$

$$1{,}70\sigma_{-1} \le \sigma_{Ha} \le 1{,}20\sigma_r .$$

Здесь σ_{-1} и σ_r — пределы выносливости и текучести материала колеса соответственно.

Расчет допускаемых напряжений при переменном режиме работы совпадает с аналогичным расчетом, описанным в главе 7.1 для цилиндрических зубчатых передач, когда переменный режим работы приводится к постоянному с эквивалентным числом циклов N_e, равным:

- по контактным напряжениям

$$N_{He} = K_{He} N_S; \qquad (7.3.45)$$

- по напряжениям изгиба

$$N_{Fe} = K_{Fe} N_S, \qquad (7.3.46)$$

где N_S — полное число циклов нагружения. Коэффициенты приведения по контакту и по изгибу, K_{He} и K_{Fe}, вычисляются с помощью формул

$$K_{He} = \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{T_{2i}}{T_{2\max}} \right)^{\frac{m}{2}} \frac{t_i n_{2i}}{t_s n_2}; \qquad K_{Fe} = \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{T_{2i}}{T_2} \right)^{m} \frac{t_i n_{2i}}{t_s n_2}. \qquad (7.3.47)$$

Здесь T_{2i}, t_i, n_{2i} — текущие моменты вращения на валу червячного колеса и соответствующие им время действия и частота вращения; i — число возможных режимов работы передачи; m — показатель степени (табл. 7.3.7); T_2, n_2 — максимальный номинальный момент и соответствующая ему частота вращения. Значения коэффициентов приведения для типовых режимов нагружения степени даны в таблице 7.3.7.

Таблица 7.3.7. **Коэффициенты приведения K_{He} и K_{Fe}**

Расчет зубьев червячного колеса	m	K_{H}	**Режим работы**					
			0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
На прочность рабочих поверхностей	8	K_{He}	1,0	0,416	0,20	0,171	0,081	0,034
На изгибную выносливость	9	K_{Fe}	1,0	0,2	0,10	0,04	0,016	0,004

Примечание. Обозначение режимов работы: *0 — постоянный; 1 — тяжелый; 2 — средний равновероятный; 3 — средний нормальный; 4 — легкий; 5 — особо легкий.*

Если при определении эквивалентного числа циклов колеса N_{He} по формуле (7.3.45) окажется, что $N_{He} > 25 \cdot 10^7$, то принимают $N_{He} = 25 \cdot 10^7$. Что же касается эквивалентного числа циклов N_{Fe}, то для него $10^6 < N_{Fe} < 25 \cdot 10^7$. Если при расчетах по формуле (7.3.46) выходит $N_{Fe} < 10^6$, то принимают $N_{Fe} = 10^6$, а при $N_{Fe} > 25 \cdot 10^7$ следует брать значение $N_{Fe} = 25 \cdot 10^7$.

Тепловой расчет червячного редуктора. Червячная передача — одна из немногих, для которых следует проводить тепловой расчет. Объясняется это тем, что передача, как уже упоминалось выше, работает с большим тепловыделением. В результате такое состояние при недостаточном теплоотводе может привести к чрезмерному нагреву масла.

Тепловой расчет является проверочным и сводится к определению температуры масла внутри передачи в режиме установившегося теплообмена. Основой расчета является уравнение теплового баланса, согласно которому количество тепла, выделенное передачей в процессе работы, равно количеству тепла, излученного через стенки корпуса.

Введем следующие обозначения: Q_i — количество тепла, выделенное передачей в единицу времени, $[Q_i]$ = [Вт]; Q_0 — количество тепла, излученное с поверхности редуктора в единицу времени, $|Q_0|$ = |Вт|; P_1 — мощность ведущего вала, $|P_1|$ = |кВт|; $K_t = 12 \div 18$ — коэффициент теплоотдачи, $|K_t|$ = |Вт/(м^2·град·с)|, численно равный количеству тепла, излученному с единицы поверхности в единицу времени при разности температур в один градус Цельсия; t — температура масла в установившемся режиме, ^{0}C; t_0 — температура окружающей среды, ^{0}C; A — площадь поверхности теплоизлучения за вычетом площади поверхности основания, $[A]$ = [м^2]. Тогда можно написать, что

$$Q_i = 10^3 \left(1 - \eta\right) P_1, \tag{7.3.48}$$

$$Q_0 = K_t \left(t - t_0\right) A, \tag{7.3.49}$$

причем, как следует из уравнения теплового баланса,

$$Q_i = Q_0. \tag{7.3.50}$$

Площадь поверхности теплоизлучения A можно определить по приближенной формуле $A = 12a^{1,7}$, где a — межосевое расстояние передачи, измеренное в метрах.

С учетом (7.3.48) и (7.3.49) уравнение (7.3.50) записывается как

$$10^3 \left(1 - \eta\right) P_1 = K_t \left(t - t_0\right) A$$

откуда

$$t = \frac{10^3 \left(1 - \eta\right) P_1}{K_t A} + t_0 \le t_a. \tag{7.3.51}$$

Фактическая температура t, рассчитанная по формуле (7.3.51), не должна быть выше предельно допустимой температуры t_a для выбранного сорта масла (предельно допустимой считается такая температура, выше которой масло теряет свои свойства). Максимально допустимая температура масла t_a зависит от сорта масла, но для большинства современных масел можно принимать $t_a = 95^0 C$.

Если подсчитанная из уравнения теплового баланса температура масла (7.3.51) оказывается больше допустимой, используют вентилятор, который увеличивает скорость теплообмена. При этом возрастает коэффициент теплоотдачи, величина которого зависит от частоты вращения вентилятора (табл. 7.3.8).

Таблица 7.3.8. **Приближенные значения коэффициента теплоотдачи K_t при использовании вентилятора**

Частота вращения вентилятора n, об/мин	750	1000	1500	3000
K_t, Вт/(м^2·град·с)	17	21	29	40

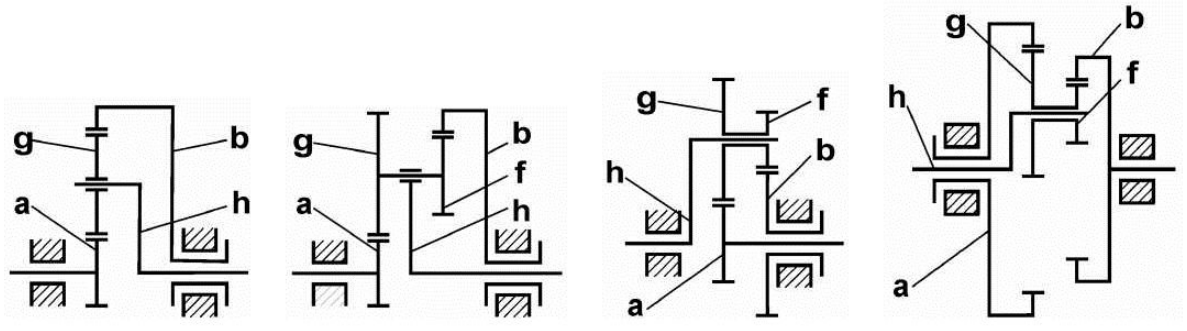
В том случае, когда использование вентилятора оказывается недостаточным для снижения температуры до допустимого уровня, следует применять принудительное охлаждение. Кроме того, температура масла понижается при увеличении площади поверхности теплоотдачи. Такое увеличение может быть достигнуто, например, за счет применения ребер на корпусе червячного редуктора.

Глава 7.4. **Планетарные и дифференциальные передачи**

Геометрические оси колес в рассмотренных ранее видах зубчатых передач неподвижны. Однако в практике проектирования передаточных механизмов часто используются передачи, у которых хотя бы одна ось перемещается. Эти передачи называются планетарными. Если же подвижными являются все оси, то передача называется дифференциальной. Планетарные и дифференциальные передачи имеют широкие кинематические возможности. Они более компактны и имеют меньший вес по сравнению с остальными зубчатыми, что позволяет применять планетарные передачи в летательных аппаратах, аппаратах электронной техники и на других объектах, для которых существенна экономия места и веса. И планетарные, и дифференциальные передачи широко распространены при проектировании машин, и в этой связи на их описании необходимо остановиться подробнее.

Следует отметить, что рассмотренные выше методы расчета прочности зубчатых передач с неподвижными осями можно полностью перенести на процесс проектирования планетарных и дифференциальных передач, но существует ряд особенностей, характерных именно для этого типа передаточных механизмов. Рассмотрим сначала эти особенности применительно к планетарным передачам, а затем укажем, как от планетарных передач перейти к дифференциальным.

Основные кинематические схемы планетарных передач. Конструктивно планетарные передачи состоят из зубчатых колес с подвижными осями — *сателлитов*. Оси сателлитов закреплены на *водиле* (на схемах обозначается как h). Зубчатые колеса, по которым обкатываются сателлиты, носят название *центральных*. Неподвижное центральное колесо называется *опорным*. Можно сконструировать большое количество разнообразных схем планетарных передач с различными силовыми, энергетическими, кинематическими и другими характеристиками, но в практике проектирования используют довольно ограниченный набор планетарных механизмов. Ниже (рис. 7.4.1) приведены кинематические схемы наиболее распространенных планетарных передач, на примере которых мы рассмотрим общие методы их проектирования.



1 2 3 4

- схема 1 — с одним внутренним зацеплением;
- схема 2 — с внутренним и с внешним зацеплениями;
- схема 3 — с двумя внешними зацеплениями;
- схема 4 — с двумя внутренними зацеплениями.

Рис. 7.4.1

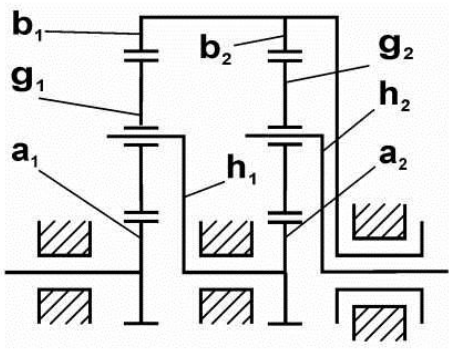


Рис. 7.4.2

Важным конструктивным фактором планетарных передач является условие закрепления их звеньев. Одна и та же кинематическая схема планетарного редуктора может иметь различные характеристики в зависимости от того, которое из ее звеньев является неподвижным. Например, из представленных на рис. 7.4.1 схем наиболее распространенной является схема 1, причем при условии, что ведущим звеном служит колесо a, а неподвижным — b. Эта схема применяется для передач с передаточным отношением $u \le 8$ и имеет высокий КПД. Когда же ведущим звеном становится колесо b, то значение передаточного отношения уменьшается в $2 \div 4{,}5$ раза (см. табл. 7.4.1), в связи с чем такое конструктивное решение применяется довольно редко.

Если необходимо обеспечить более высокое передаточное отношение, чем в схеме 1 с ведущим звеном a, то можно последовательно установить несколько таких передач (рис. 7.4.2), тогда, согласно (6.11), передаточное отношение кинематической цепи будет равным произведению передаточных отношений ее элементов. Для передачи, выполненной по схеме 2, можно получить $u \le 16$, при этом ее размеры будут несколько меньше, чем для передачи по схеме 1, но и КПД тоже ниже.

Значительно б*о*льшее передаточное отношение можно получить, если в качестве ведущего звена использовать водило. Правда, такая схема имеет существенно более низкий КПД.

Схемы 3 и 4 применяются намного реже схем 1 и 2, и только для малых нагрузок, так как они имеют небольшой КПД.

Передаточное отношение планетарных передач. Наиболее простым и вместе с тем распространенным методом расчета передаточного отношения планетарных передач является метод *обращенного движения*, при котором водило мысленно останавливается, а планетарный редуктор преобразуется в редуктор с фиксированными осями. Продемонстрируем этот метод на примере передачи, выполненной по схеме 1 с неподвижным ведомым звеном b.

Для остановки водила необходимо сообщить ему дополнительную угловую скорость, равную $-\omega_h^b$. В результате такой остановки остальные звенья, участвующие в движении — колеса a и b — приобретают угловые скорости ω_a^h и ω_b^h:

$$\omega_a^h = \omega_a^b - \omega_h^b; \qquad \omega_b^h = -\omega_h^b, \tag{7.4.1}$$

где ω_a^b — угловая скорость колеса a до остановки водила. Передаточное отношение редуктора u_{ah}^b, по определению, равно

$$u_{ah}^b = \frac{\omega_a^b}{\omega_h^b}, \tag{7.4.2}$$

поскольку при ведущем колесе a и ведомом b выходным звеном служит водило.

Здесь и далее верхний индекс обозначает неподвижное звено, первая буква нижнего индекса — ведущее, а вторая — ведомое звенья.

Передаточное отношение колес u_{ab}^{h} с учетом (7.4.2) имеет вид

$$u_{ab}^{h} = \frac{\omega_a^h}{\omega_b^h} = \frac{\omega_a^b - \omega_h^b}{-\omega_h^b} = 1 - u_{ah}^{b}. \qquad (7.4.3)$$

Так как передаточное отношение u_{ab}^{h} определяется по обычной для зубчатых редукторов методике, то $u_{ab}^{h} = -\frac{z_b}{z_a}$, где z_a, z_b — числа зубьев колес a и b, что при подстановке в (7.4.3) даст

$$u_{ah}^{b} = 1 + \frac{z_b}{z_a}. \qquad (7.4.4)$$

Описанный метод расчета передаточного отношения остановкой водила можно успешно использовать для определения передаточных чисел всего многообразия конструкций планетарных передач. В частности, для схемы 2 в случае, если звено b неподвижно, а числа зубьев звеньев g и f равны соответственно z_g и z_f, имеем

$$u_{ab}^{h} = \frac{\omega_a^h}{\omega_b^h} = \frac{\omega_a^b - \omega_h^b}{-\omega_h^b} = 1 - u_{ah}^{b} = 1 - \frac{z_g}{z_a} \cdot \frac{z_b}{z_f},$$

откуда

$$u_{ah}^{b} = 1 + \frac{z_g}{z_a} \cdot \frac{z_b}{z_f}. \qquad (7.4.5)$$

Значения передаточных отношений и других параметров планетарных передач основных кинематических схем приведены в таблице 7.4.1.

Таблица 7.4.1. **Кинематические параметры типовых планетарных передач**

Схема	Передаточное отношение		Формулы для определения КПД
	Расчетная формула	*Интервалы*	
1	$u_{ah}^{b} = 1 + \frac{z_b}{z_a}$	2,8—8	$\eta_{ah}^{b} = 1 - \left(1 - \frac{1}{u_{ah}^{b}}\right)\left(1 - \eta_{ab}^{h}\right) \approx 0.98$
	$u_{bh}^{a} = 1 + \frac{z_a}{z_b}$	1,28—1,6	$\eta_{bh}^{a} = 1 - \left(1 - \frac{1}{u_{bh}^{a}}\right)\left(1 - \eta_{ab}^{h}\right)$
2	$u_{ah}^{b} = 1 + \frac{z_g}{z_a} \cdot \frac{z_b}{z_f}$	<16	$\eta_{ah}^{b} = 1 - \left(1 - \frac{1}{u_{ah}^{b}}\right)\left(1 - \eta_{ab}^{h}\right) \approx 0.96$ $\eta_{ab}^{h} = \eta_{ag}^{h}\eta_{fb}^{h}$

Схема	Передаточное отношение		Формулы для определения КПД
	Расчетная формула	*Интервалы*	
3	$u_{ah}^{b} = 1 - \frac{z_g}{z_a} \cdot \frac{z_b}{z_f}$	<25	$\eta_{ah}^{b} = 1 - \left(1 - \frac{1}{u_{ah}^{b}}\right)\left(1 - \eta_{ab}^{h}\right) \approx 0.96$
	$u_{ha}^{b} = \frac{1}{u_{ah}^{b}}$	1600 и более	$\eta_{ha}^{b} = \frac{1}{1 + \left(\frac{1 - \eta_{ab}^{h}}{\eta_{ab}^{h}}\right)\left(u_{ha}^{b} - 1\right)}$
4	$u_{ah}^{b} = 1 - \frac{z_g}{z_a} \cdot \frac{z_b}{z_f}$	<16	$\eta_{ah}^{b} = 1 - \left(1 - \frac{1}{u_{ah}^{b}}\right)\left(1 - \eta_{ab}^{h}\right) \approx 0.96$
	$u_{ha}^{b} = \frac{1}{u_{ah}^{b}}$	31,5—1600 и более	$\eta_{ha}^{b} = \frac{1}{1 + \left(\frac{1 - \eta_{ab}^{h}}{\eta_{ab}^{h}}\right)\left(u_{ha}^{b} - 1\right)}$

Подбор чисел зубьев планетарных передач. В силу конструктивных особенностей планетарных передач их расчет проводится при соблюдении ряда дополнительных ограничений. Так, если при проектировании обычных зубчатых передач достаточно обеспечить удовлетворительное значение коэффициента перекрытия, отсутствие подреза и заострения зуба, а также отсутствие интерференции, то для планетарных передач список ограничений расширяется. В процессе конструирования планетарных передач должны быть выполнены следующие специальные условия:

- соосности;
- соседства;
- сборки.

Условие соосности предусматривает равенство межосевых расстояний различных пар зубчатых колес передачи, что может быть обеспечено выбором соответствующего числа зубьев и наличием смещения инструмента. Это условие применительно к схеме 1 имеет вид

$$a_W^{a-g} = a_W^{b-g}, \tag{7.4.6}$$

а для схем 2—4 —

$$a_W^{a-g} = a_W^{b-f}. \tag{7.4.7}$$

Условие соосности будет выполнено, если подобрать числа зубьев звеньев таким образом, что при нарезании колес без смещения выполняются следующие соотношения:

- схема 1 $z_b - z_a = 2z_g$;
- схема 2 $(z_a + z_g)m_1 = (z_b - z_f)m_2$;

- схема 3 $(z_a + z_g)m_1 = (z_b + z_f)m_2$;
- схема 4 $(z_a - z_g)m_1 = (z_b - z_f)m_2$.

Здесь m_1 и m_2 — модули зубьев пар $a-g$ и $b-f$ соответственно.

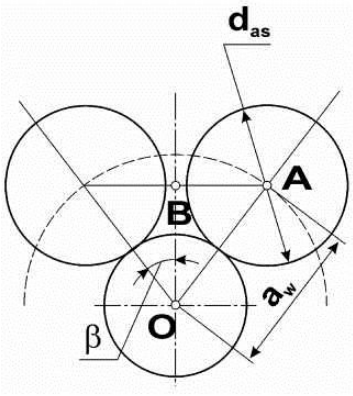


Рис. 7.4.3

Условие соседства проверяет наличие зазора между сателлитами в передаче (рис. 7.4.3). Для того чтобы обеспечить такой зазор, необходимо выполнение следующего неравенства:

$$AB = a_W \sin\beta > d_{as}/2, \qquad (7.4.8)$$

где $\beta = \pi / n_s$ — угол между осями сателлитов; n_s и d_{as} — число сателлитов и их внешний диаметр; $OA = a_W$ — межосевое расстояние.

Условие сборки заключается в определенном взаимном расположении сателлитов и центральных колес. Очевидно, что после установки первого из сателлитов установка последующих оказывается возможной, только если зубья сателлита расположены строго напротив впадин сопряженных с этим сателлитом колес. Аналитически это условие для различных схем записывается следующим образом:

- схема 1 $$\frac{z_a + z_b}{n_s} = N;$$
- схема 2 $$\frac{z_a z_f + z_b z_g}{n_s d_{fg}} = N;$$
- схемы 3 и 4 $$\frac{z_a z_f - z_b z_g}{n_s d_{fg}} = N, \qquad (7.4.9)$$

где N — любое целое число; d_{fg} — наибольший общий делитель чисел зубьев z_f и z_g.

КПД планетарных передач. При расчете коэффициента полезного действия планетарной передачи можно воспользоваться методом обращенного движения. В качестве примера определим КПД планетарного редуктора, сконструированного по схеме 3 с двумя внешними зацеплениями. Рассмотрим вариант, когда энергия передается от центрального колеса к водилу, а неподвижным звеном является колесо b. Тогда согласно определению КПД передачи равен

$$\eta_{ah}^{b} = \frac{P_h}{P_a} = \frac{P_a - P_p}{P_a} = 1 - \frac{P_p}{P_a}, \qquad (7.4.10)$$

где P_a, P_h и P_p — соответственно мощности на осях центрального колеса и водила и мощность потерь в редукторе. После мысленной остановки водила планетарная

передача превращается в простой редуктор с фиксированными осями, так что можно записать

$$\eta_{ab}^{h} = \frac{P_b}{P_a} = \frac{P_a^h - P_p}{P_a^h} = 1 - \frac{P_p}{P_a^h},$$

откуда

$$P_p = \left(1 - \eta_{ab}^{h}\right) P_a^h, \tag{7.4.11}$$

где $P_a^h = T_a\left|\omega_a - \omega_h\right|$; $P_a = T_a\left|\omega_a\right|$; T_a — вращающий момент на звене a.

Очевидно, что потери мощности не зависят от величин и знака скоростей относительного движения. Тогда из (7.4.10) с помощью (7.4.11) имеем

$$\eta_{ah}^{b} = 1 - \frac{\left(1 - \eta_{ab}^{h}\right) P_a^h}{P_a} = 1 - \left(1 - \eta_{ab}^{h}\right)\left(1 - 1/u_{ah}^{b}\right). \tag{7.4.12}$$

Метод расчета, изложенный применительно к одной из возможных кинематических схем планетарных редукторов, можно использовать для определения КПД и других схем (см. табл. 7.4.1).

Силовые и энергетические параметры планетарных передач. Рассмотрим силы, действующие на сателлит планетарного редуктора, выполненного по схеме 1, при передаче вращающего момента от входного вала к водилу при неподвижном звене b. Контуры колес и приложенные к ним нагрузки изображены на рис. 7.4.4.

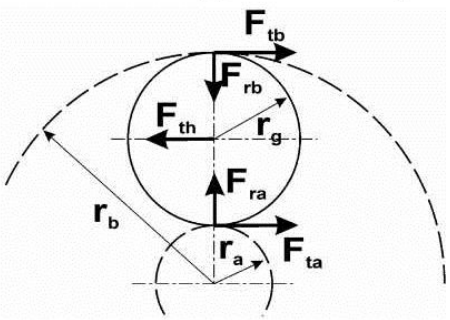


Рис. 7.4.4

В зацеплении зубьев прямозубых колес сила, нормальная к поверхности зуба, может быть разложена на две составляющие — касательную (окружную) к цилиндру колеса F_{ta}, F_{tb} и перпендикулярную к ней радиальную F_{ra}, F_{rb}. Эти силовые факторы легко определяются из уравнений равновесия. Если момент вращения на входе редуктора обозначить через T_a, то

$$F_{ta} = T_a / r_a, \tag{7.4.13}$$

где r_a — радиус основной окружности центрального колеса. Так как сателлит вращается с постоянной угловой скоростью, то алгебраическая сумма моментов всех действующих на него сил относительно оси вращения будет равна нулю, следовательно, $F_{ta} = F_{tb}$, а действующее на водило окружное усилие записывается как

$$F_{th} = F_{ta} + F_{tb} = 2F_{ta}. \tag{7.4.14}$$

Момент вращения водила T_h

$$T_h = 2F_{ta}\frac{r_a + r_b}{2}. \tag{7.4.15}$$

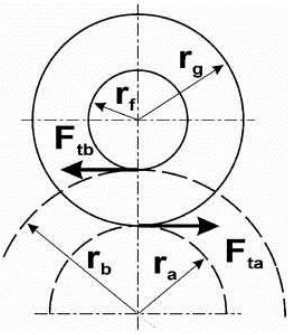


Рис. 7.4.5

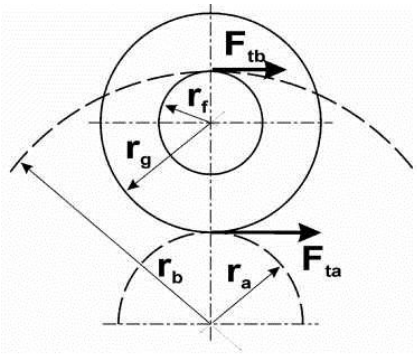


Рис. 7.4.6

Здесь r_b — радиус основной окружности неподвижного звена. Радиальные составляющие в полюсах зацепления имеют вид

$$F_{ra} = F_{ta} tg\alpha; \quad F_{rb} = F_{tb} tg\alpha\,, \tag{7.4.16}$$

где α — угол зацепления в зубчатой паре. Реактивный момент T_b, воспринимаемый крепежными элементами звена b, равен

$$T_b = F_{tb} r_b = F_{ta} r_b\,. \tag{7.4.17}$$

Силы в зацеплении зубьев можно определить другим способом, воспользовавшись уравнением равновесия моментов вращения, а именно

$$T_a + T_h + T_b = 0\,. \tag{7.4.18}$$

Можно обратиться также к уравнению закона сохранения энергии, которое применительно к рассматриваемому случаю имеет вид

$$T_a\omega_a + T_h\omega_h + T_b\omega_b = 0\,. \tag{7.4.19}$$

Обычно один из моментов T_a, T_b и T_h является известным, а остальные можно определить совместным решением уравнений (7.4.18) и (7.4.19). По известным величинам моментов легко находятся окружные составляющие нагрузки и, как следствие, радиальные составляющие нагрузок в контакте.

Определим усилия в планетарном редукторе с двумя внешними зацеплениями (схема 3, рис. 7.4.5). Из уравнения равновесия имеем $F_{ta} r_g = F_{tb} r_f$, или

$$F_{tb} = F_{ta}\frac{r_g}{r_f}; \qquad F_{th} = F_{ta} - F_{tb}\,. \tag{7.4.20}$$

Для случая редуктора с одним внешним и одним внутренними зацеплениями (схема 2, рис. 7.4.6) получаем

$$F_{ta} r_g = F_{tb} r_f; \qquad F_{tb} = F_{ta}\frac{r_g}{r_f}; \qquad F_{th} = F_{ta} + F_{tb}\,. \tag{7.4.21}$$

Аналогично определяются силы в зацеплениях для других схем планетарных передач.

Особенности прочностного расчета планетарной передачи. Проектировочный расчет планетарных передач в основном не отличается от расчета обычной передачи, за некоторым исключением. Дело в том, что в планетарной передаче момент вращения передается по нескольким потокам, и из-за наличия погрешностей изготовления и монтажа моменты, передаваемые каждым из потоков, оказываются различными. Это явление можно охарактеризовать введением коэффициента неравномерности нагрузки по потокам K_p. Значение коэффициента неравномерности зависит от точности изготовления элементов передачи, их деформаций и ряда других факторов. Полученные при этом аналитические решения, основанные на анализе простых моделей, малодостоверны и могут быть определены только с помощью проверочного расчета. При проектировании новых конструкций для выбора коэффициента неравномерности нагрузки по потокам можно воспользоваться эмпирическими рекомендациями, принимая его равным $K_p = 1{,}35 \div 1{,}5$.

Для снижения неравномерности нагрузки по потокам иногда применяют конструкцию с «плавающим» центральным колесом, без использования жестких опор. Тогда $K_p = 1{,}10 \div 1{,}15$.

При определении числа циклов нагружения зубчатых колес необходимо помнить, что преобразование планетарного редуктора в редуктор с неподвижными осями достигается остановкой водила, так что угловые скорости всех участвующих в кинематической цепи колес уменьшаются на величину угловой скорости водила.

Дифференциальная передача. Дифференциальная передача получается из планетарной, если освободить центральное опорное колесо. Образованный таким образом передаточный механизм с дополнительной степенью свободы позволяет суммировать два движения или, напротив, разделять одно на два. На практике дифференциальные передачи в основном используют для преобразования движения от двигателя на два ведомых вала, реже — когда движение от двух двигателей передается на один ведомый вал. Дифференциальные механизмы можно встретить и в совокупности с обычными передачами.

В качестве примера дифференциальной передачи рассмотрим механизм, спроектированный по схеме 1, но не имеющий закрепленных звеньев. В обращенном движении имеем следующее передаточное отношение u_{ab}^h редуктора в относительном движении:

$$u_{ab}^h = \frac{\omega_a - \omega_h}{\omega_b - \omega_h}. \qquad (7.4.22)$$

Разрешая (7.4.22) относительно угловой скорости ω_b, получаем

$$\omega_b = \frac{\omega_a + \omega_h(u_{ab}^h - 1)}{u_{ab}^h}. \qquad (7.4.23)$$

Выражение (7.4.23) можно переписать через углы поворота звеньев:

$$\varphi_b = \frac{\varphi_a + \varphi_h(u_{ab}^h - 1)}{u_{ab}^h}. \qquad (7.4.24)$$

Согласно (7.4.24), зная законы изменения углов поворота каждого из двух независимых звеньев, можно получить закон изменения угла поворота третьего звена.

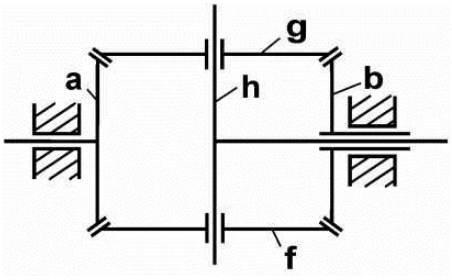


Рис. 7.4.7

Если $u_{ab}^{h} = 2$, то $\varphi_b = (\varphi_a + \varphi_h)/2$, а полученный дифференциальный механизм позволяет суммировать два независимых движения. Результат такого суммирования определится как среднее арифметическое от составляющих движений.

В качестве другого примера можно рассмотреть конструкцию конического дифференциала (рис. 7.4.7), который поворотом водила на угол, рассчитанный по формуле (7.4.24), суммирует два независимых движения конических шестерен. Такой механизм также называют *суммирующим*, так как результирующий угол поворота равен сумме сигналов, умноженных на постоянные коэффициенты, зависящие от геометрии механизма.

Методика прочностного и силового расчета дифференциальных механизмов та же, что и для планетарных передач.

Раздел 8. ПЕРЕДАЧИ ГИБКОЙ СВЯЗЬЮ

Глава 8.1. Ременные передачи

Ременная передача конструктивно проста (рис. 8.1.1). Она состоит из двух шкивов диаметрами d_1 и d_2, вращающихся с угловыми скоростями ω_1 и ω_2, и охватывающего их ремня (в отдельных случаях применяют и большее число ремней). Передача момента вращения T_1 при этом происходит за счет трения ремня о шкив, что требует предварительного натяга, который обеспечивается специальными натяжными устройствами. Ремни передач изготавливаются из прорезиненной ткани, резинокордных материалов, капроновых нитей и других синтетических материалов.

Для ременных передач характерны плавность работы, отсутствие шума, возможность перемещения момента на значительное расстояние и т. д.

Основными недостатками передачи являются: большие габариты, что заставляет использовать ее исключительно для малонагруженных и высокооборотных передач; малая долговечность ремней, составляющая в среднем $1000 \div 5000$ часов; наличие скольжения, приводящего к непостоянству передаточного отношения.

По форме сечения ремней передачи подразделяются на *плоскоременные* (рис. 8.1.2a), *клиноременные* (рис. 8.1.2b) и *круглоременные* (рис. 8.1.2c), а также передачи с *поликлиновым ремнем* (рис. 8.1.2d).

Иногда применяют *зубчато-ременные* передачи, шкивы которых имеют на наружной поверхности выступы трапецеидальной формы. Это позволяет повысить нагрузочную способность передаточного механизма за счет наличия зацепления.

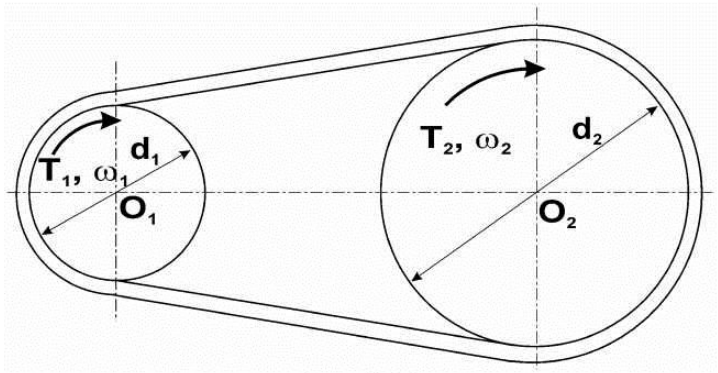


Рис. 8.1.1

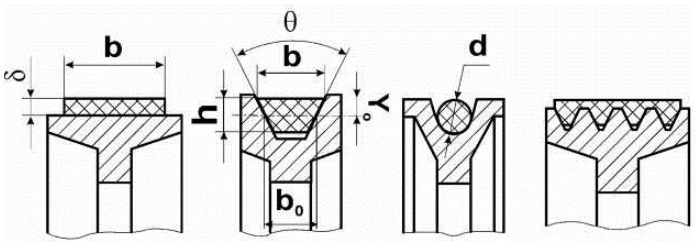


Рис. 8.1.2

Наиболее простой в конструктивном отношении является *плоскоременная* передача (рис. 8.1.2a). Сечение плоского ремня представляет собой прямоугольник шириной b и высотой (толщиной) δ. Как будет показано дальше, нагрузочная способность плоскоременных передач существенно меньше, чем клиноременных. В этой связи плоскоременные передачи используются только в тех случаях, когда применение клиноременных по тем или иным причинам оказывается неэффективным. В основном это область скоростных передач, в которых клиновой ремень может «опаздывать» из-за наличия существенного трения ремня о шкив. Что же касается клино-

ременных передач, то их целесообразно использовать только при скоростях $v \le 30$ м/с.

Клиновой ремень в сечении имеет вид трапеции с основаниями b и b_0, высотой h и углом при вершине θ (рис. 8.1.2b). Величина площади поперечного сечения определяет допустимую нагрузку. По этой причине изготовители предлагают гамму ремней с различной площадью поперечного сечения для разных передаваемых окружных сил (табл. 8.1.1). Отметим, что клиновые ременные передачи можно применять только при передаточных отношениях не более $u \le 7 \div 10$.

Таблица 8.1.1. **Основные размеры клиновых и поликлиновых ремней**

Тип ремня	Обозначение сечения	Размеры в сечении				A, см^2	l_0	l_{min}	l_{max}	d_{min}	T_1	m_0, кг/м
		b_0	$b(t)$	h	y_0							
Клиновой нормального сечения	Z	8,5	10	6	2,1	0,47	1320	400	2500	63	≈ 30	0,06
	A	11	13	8	2,8	0,81	1700	560	4000	90	15 60	0,10
	B	14	17	10,5	4,0	1,38	2240	800	6300	125	45 150	0,18
	C	19	22	13,5	4,8	2,30	3750	1800	10600	200	120 600	0,30
	D	27	32	19	6,9	4,76	4500	3150	15000	315	420 2400	0,62
	E	32	38	23,5	8,3	6,92	7100	4500	18000	500	1600 6000	0,90
Клиновой узкого сечения	SPZ	8,5	10	8	2,0	0,56	1600	630	3550	63	150	0,07
	SPA	11	13	10	2,8	0,95	2500	800	4500	90	90—400	0,12
	SPB	14	17	13	3,5	1,58	3550	1250	8000	140	300—2000	0,20
	SPC	19	22	18	4,8	2,78	5600	2000	8000	224	≥ 2000	0,37
Поликлиновой	K	—	2,4	4,0	—	0,72	710	400	2000	40	40	0,09
	JI		4,8	9,5		3,56	1600	1250	4000	80	18 40	0,45
	M		9,5	16,7		11,37	2240	2000	4000	180	≥ 130	1,6

Примечание: b_0 — ширина ремня на нейтральном слое; $b(t)$ — ширина большего основания трапеции в сечении клинового ремня (шаг ребер поликлинового ремня); h — высота сечения ремня; A площадь сечения; l_0 — длина стандартного ремня; l_{min} — нижний предел длины; l_{max} — верхний предел длины; d_{min} — минимальный диаметр ведущего шкива; T_1 — вращающий момент ведущего шкива; m_0 — погонная масса ремня (масса 1 м длины).

При необходимости для передачи требуемой мощности можно использовать несколько ремней. В этом случае лучшим решением является применение передач с *поликлиновым* ремнем (рис. 8.1.2c; табл. 8.1.1). Такие передачи более долговечны и

имеют меньшие размеры по сравнению с обычными клиноременными. Еще сильнее уменьшить габариты ременного передаточного механизма можно с помощью *зубчатого* ремня, который осуществляет передачу момента вращения комбинированным способом: как за счет трения, так и за счет зацепления.

Кинематика передачи и скольжение ремня. Как уже упоминалось выше, для передачи момента вращения T_1 с помощью ременного механизма ремень последнего должен быть нагружен силой предварительного натяга S_0 (рис. 8.1.3). Передача полезной нагрузки сопровождается перераспределением усилий натяжения в ветвях ремня, причем натяжение ведущей ветви (на рисунке — вверху) становится равным S_1, а ведомой — S_2. При этом сумма сил натяжений, разумеется, остается постоянной:

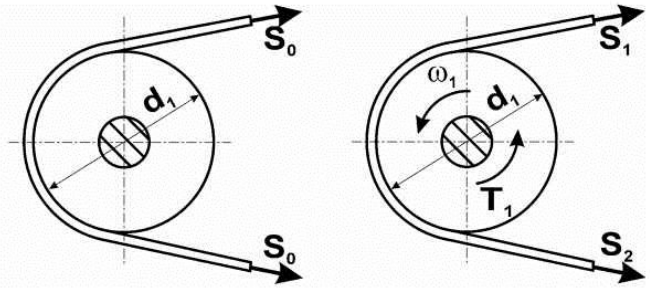


Рис. 8.1.3

$$S_1 + S_2 = 2S_0. \qquad (8.1.1)$$

Ясно, что при выбранном направлении вращения ведущего шкива натяжения S_1 и S_2 подчиняются неравенству $S_1 > S_2$, а их разность равна передаваемой ремнем окружной силе F_t, то есть

$$S_1 - S_2 = F_t. \qquad (8.1.2)$$

Из (8.1.1) и (8.1.2) имеем

$$S_1 = S_0 + F_t/2;\ S_2 = S_0 - F_t/2. \qquad (8.1.3)$$

Итак, при переходе через криволинейную поверхность шкива ремень меняет натяжение, а следовательно, происходит его деформация — сокращение либо удлинение, причем поскольку величины натяжений в ведущей и ведомой ветвях согласно (8.1.3) различны, то различной будет и деформация ремня в этих ветвях. Такое явление называется *скольжением*. Скольжение ремня приводит к тому, что ведущая и ведомая ветви имеют разные окружные скорости — соответственно v_1 и v_2. Определим эти скорости.

Очевидно, что площадь поперечного сечения ремня зависит от величины натяжения последнего. Обозначим фактические площади поперечных сечений, соответствующие натяжениям S_1 и S_2, через A_{S1} и A_{S2}, а плотности материала ремня в этих сечениях — как ρ_{S1} и ρ_{S2}. Так как согласно закону сохранения масса, прошедшая через любое поперечное сечение ремня в единицу времени, остается постоянной, то справедливо уравнение сплошности

$$A_{s1} v_1 \rho_{s1} = A_{s2} v_2 \rho_{s2}. \qquad (8.1.4)$$

Предположим далее, что материал ремня подчиняется, подобно металлам, закону Гука. Тогда для ветви с натяжением S_1 можно записать

$$A_{S1} = A(1 - \mu\varepsilon_{S1})^2; \qquad \rho_{S1} = \rho/[(1+\varepsilon_{S1})(1-\mu\varepsilon_{S1})^2], \qquad (8.1.5)$$

где A и ρ — площадь поперечного сечения ремня и его плотность в ненагруженном состоянии, ε_{S1} — относительное удлинение линейного размера при натяжении S_1. Аналогичные соотношения имеют место и для ветви с натяжением S_2. Из (8.1.4) и (8.1.5) следует, что

$$v_1 = \frac{v_2(1+\varepsilon_{S1})}{(1+\varepsilon_{S2})} \cong v_2(1+\varepsilon_{S1}-\varepsilon_{S2}),$$

или

$$v_2 = v_1(1-\xi). \tag{8.1.6}$$

Здесь $\xi = \varepsilon_{S1} - \varepsilon_{S2} = (S_1 - S_2)/EA$ — коэффициент скольжения. Разрешая (8.1.6) относительно коэффициента скольжения ξ, получаем

$$\xi = \frac{v_1 - v_2}{v_1}. \tag{8.1.7}$$

Окружные скорости шкивов можно выразить через угловые:

$$v_1 = \omega_1 d_1 / 2; \qquad v_2 = \omega_2 d_2 / 2. \tag{8.1.8}$$

Подстановка (8.1.8) в (8.1.7) дает для коэффициента скольжения выражение

$$\xi = 1 - \frac{v_2}{v_1} = 1 - \frac{\omega_2 d_2}{\omega_1 d_1}. \tag{8.1.9}$$

Передаточное отношение u при этом имеет вид

$$u = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{d_2}{d_1(1-\xi)}. \tag{8.1.10}$$

По экспериментальным данным, для плоскоременных передач средняя величина коэффициента скольжения равна $\xi = 0{,}01$, а для клиноременных — $\xi = 0{,}015 \div 0{,}02$.

Напряженное состояние ремня передачи. Начальное напряжение σ_0 в сечениях ветвей ремня, создающееся под действием начального натяжения S_0, по определению равно

$$\sigma_0 = \frac{S_0}{A}. \tag{8.1.11}$$

Для обеспечения надлежащей долговечности начальные напряжения в передачах как плоским, так и клиновым ремнем должны находиться в диапазоне $\sigma_0 = 1{,}2 \div 1{,}8$ МПа.

При передаче момента вращения картина распределения напряжений по длине ремня меняется (рис. 8.1.4). Полное напряжение в каждой точке ремня равно алгебраической сумме следующих компонент: σ (от натяжений S_1 и S_2, возникающих

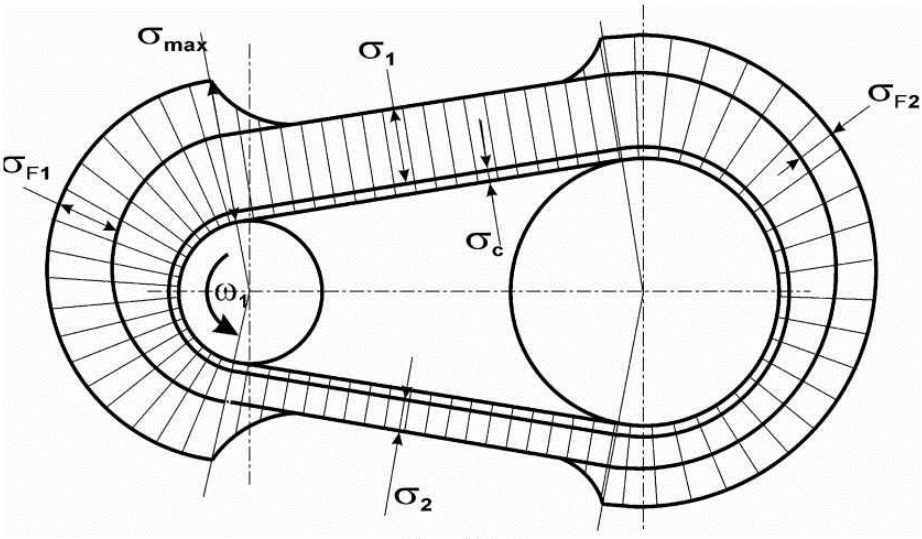


Рис. 8.1.4

в ветвях ремня вследствие начального натяга), σ_c (от центробежных сил) и σ_F (от изгиба). Рассмотрим каждую из компонент напряжения отдельно.

Связь между натяжениями в ветвях ременной передачи. Связь между натяжениями S_1 и S_2, возникающими в ветвях ремня при передаче момента вращения, рассмотрим на примере плоскоременной передачи. Выделим элементарный участок ремня с угловым размером $d\varphi$, изображение которого вместе с приложенными к нему силами приведено на рис. 8.1.5. Здесь $F_f = fdN$ — сила трения, f — коэффициент трения, dN — элементарная сила нормального давления, S — текущее значение натяжения, dS — его приращение.

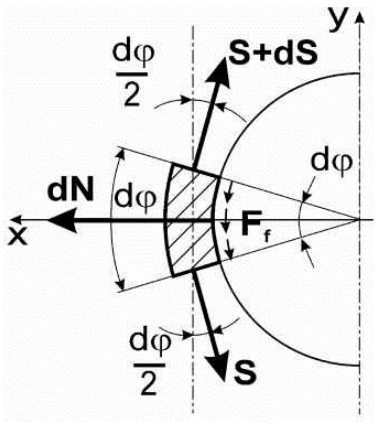


Рис. 8.1.5

Уравнение равновесия в проекциях на координатные оси для выделенного участка записывается как

$$\sum_{i=1}^{n} F_{xi} = 0; \qquad \sum_{i=1}^{n} F_{yi} = 0, \tag{8.1.12}$$

где F_{xi} и F_{yi} — текущие проекции силовых факторов на координатные оси. Выражение (8.1.12) можно представить в развернутой форме, а именно

$$\begin{aligned} dN - (S + dS)\sin\left(\frac{d\varphi}{2}\right) - S\sin\left(\frac{d\varphi}{2}\right) = 0; \\ (S + dS)\cos\left(\frac{d\varphi}{2}\right) - S\cos\left(\frac{d\varphi}{2}\right) - F_f = 0. \end{aligned} \tag{8.1.13}$$

Для малых углов можно положить $\sin\frac{d\varphi}{2} \cong \frac{d\varphi}{2}$; $\cos\frac{d\varphi}{2} \cong 1$. Тогда формула (8.1.13) принимает вид

$$dN - dS\frac{d\varphi}{2} - Sd\varphi = 0; \qquad dS - F_f = 0\,. \tag{8.1.14}$$

Подставляя в (8.1.14) вместо силы трения ее значение $F_f = fdN$ и пренебрегая малой величиной $dSd\varphi/2$, получаем

$$dN = Sd\varphi;\ dS = fdN,$$

откуда следует

$$\frac{dS}{S} = fd\varphi\,. \tag{8.1.15}$$

Дифференциальное уравнение (8.1.15) легко решается интегрированием по дуге контакта ремня и шкива. Эта дуга окружности шкива, на которой меняется натяжение ремня и, как следствие, имеет место его скольжение по шкиву, называется дугой скольжения, а соответствующий ей угол α_g — углом скольжения. Разделяя в (8.1.15) переменные и проводя интегрирование по дуге скольжения, имеем

$$\int_{S_2}^{S_1}\frac{dS}{S} = \int_0^{\alpha_g} f\,d\varphi\,, \tag{8.1.16}$$

так что

$$S_1 = S_2 e^{f\alpha_g}\,. \tag{8.1.17}$$

Для клиноременных передач в (8.1.17) вместо f следует брать приведенный коэффициент трения ремня по шкиву f', равный

$$f' = \frac{f}{\sin\frac{\theta}{2}}\,. \tag{8.1.18}$$

Под углом θ здесь понимается угол профиля ремня в поперечном сечении (у плоскоременных передач $\theta = 180^0$). Для большинства клиноременных передач $\theta = 40^0$.

С помощью (8.1.18) можно оценить нагрузочную (тяговую) способность передач с клиновым ремнем. Так, полагая $\theta = 40^0$, получаем $f' \approx 3f$. Следовательно, тяговая способность клиноременной передачи почти в три раза выше плоскоременной, что и обуславливает ее широкое применение.

Формула (8.1.17) служит основой для расчета напряжений σ_1 и σ_2, возникающих в сечениях ведущей и ведомой ветвей ремня вследствие наличия начального натяга. Эти напряжения равны

$$\sigma_1 = S_1 / A; \qquad \sigma_2 = S_2 / A\,. \tag{8.1.19}$$

Из (8.1.17) с помощью (8.1.2) следует, что

$$S_2 = \frac{F_t}{e^{f\alpha_g} - 1}; \qquad S_1 = \frac{F_t e^{f\alpha_g}}{e^{f\alpha_g} - 1}. \tag{8.1.20}$$

Принимая далее во внимание (8.1.1), найдем

$$S_2 = \frac{2S_0}{e^{f\alpha_g} + 1}; \qquad S_1 = \frac{2S_0 e^{f\alpha_g}}{e^{f\alpha_g} + 1}. \tag{8.1.21}$$

Подставляя значения сил натяжения (8.1.20) в (8.1.19) и вводя обозначения $q = e^{f\alpha_g}$, $\sigma_t = \frac{F_t}{A}$, окончательно получаем

$$\sigma_1 = \frac{q\sigma_t}{q-1}; \qquad \sigma_2 = \frac{\sigma_t}{q-1}. \tag{8.1.22}$$

Напряжение, возникающее в ветвях ременной передачи вследствие действия центробежной силы.

На участки ремня, находящиеся на криволинейной поверхности шкива, действует внешняя центробежная сила, что в конечном итоге влияет на величину общего натяжения. Натяжение S_c от центробежной силы можно определить, изучая равновесие элементарного участка ремня (рис. 8.1.6).

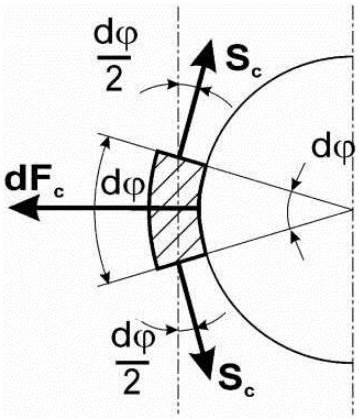


Рис. 8.1.6

На выделенный элемент ремня с угловым размером $d\varphi$ и массой dm, перемещающийся с линейной скоростью v, действует элементарная центробежная сила dF_c, равная

$$dF_c = \frac{v^2 dm}{r} = \rho r d\varphi A \omega^2 r, \tag{8.1.23}$$

где r — радиус кривизны поверхности. Из условия равновесия выделенного элемента в проекции на нормаль к поверхности шкива находим

$$2S_c \sin\frac{d\varphi}{2} = dF_c. \tag{8.1.24}$$

Считая в выражении (8.1.24) угол $d\varphi$ малым и преобразуя правую часть с помощью (8.1.23), для натяжения S_c имеем

$$S_c = \rho A r^2 \omega^2. \tag{8.1.25}$$

Тогда величина напряжения σ_c, возникающего при действии центробежных сил, равна

$$\sigma_c = \frac{S_c}{A} = \rho\omega^2 r^2 = \rho v^2. \tag{8.1.26}$$

Как следует из (8.1.26), компонента напряжения, за которую ответственны центробежные силы, пропорциональна скорости, поэтому ее следует учитывать только при больших скоростях движения ремня. В противном случае наличием σ_c пренебрегают.

Напряжение ремня при изгибе. В момент нахождения ремня на поверхности шкива его наружные волокна растягиваются, а внутренние сжимаются, что приводит к изменению напряжений по сечению ремня и тем самым существенно влияет на его долговечность. Эти напряжения, обозначаемые как σ_F, вызваны изгибом и потому называются *изгибными*.

Рассчитаем величины изгибных напряжений применительно к плоскоременной передаче. С этой целью рассмотрим участок плоского ремня длиной dl. Угол, под которым располагается этот участок на криволинейной поверхности шкива, обозначим через $d\varphi$ (рис. 8.1.7). Абсолютные изменения длин наружных l_a и внутренних l_f волокон ремня равны

$$l_a = dl + 2|AB|,\ l_f = dl - 2|AB|. \tag{8.1.27}$$

Из рис. 8.1.7 видно, что

$$|AB| = \frac{\delta}{2} \cdot \frac{d\varphi}{2}. \tag{8.1.28}$$

Учитывая (8.1.28), в соответствии с законом Гука можно написать

$$\sigma_F = \frac{2|AB|}{dl} E = \frac{\delta E d\varphi}{2dl}. \tag{8.1.29}$$

Принимая во внимание очевидное соотношение $rd\varphi = dl$, где r — радиус шкива, окончательно получаем

$$\sigma_F = \frac{\delta E}{2r} = \frac{\delta E}{d}. \tag{8.1.30}$$

Уместно отметить, что для большинства используемых на практике передач диаметр d_1 ведущего шкива меньше, чем диаметр d_2 ведомого. Тогда, как следует из (8.1.30), напряжение изгиба ремня на ведущем шкиве больше, чем на ведомом. Следовательно, здесь, как и в дальнейшем, расчет максимальных напряжений необходимо вести именно по ведущему шкиву.

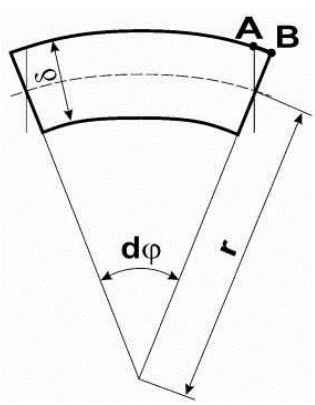


Рис. 8.1.7

При уменьшении d_1 геометрические размеры ременной передачи также уменьшаются, но одновременно с этим снижается долговечность ремня. Практика проектирования таких передач позволила определить оптимальную величину диаметра, которую рекомендуется выбирать таким образом, чтобы отношение d_1/δ принадлежало диапазону $d_1/\delta = 25 \div 45$. Кроме того, для

проверки правильности выбора диаметра необходимо выполнить расчет долговечности ремня. Числовое значение принятого диаметра следует согласовать с рядом размеров $R20$.

В случае клиноременной передачи выражение (8.1.30) для определения напряжений изгиба может быть записано в виде

$$\sigma_F = \frac{2y_0 E}{d_1}, \qquad (8.1.31)$$

где y_0 — расстояние от нейтральной линии изгиба до большего основания трапеции. Что касается модулей упругости ремней, то их средние величины равны $E = 200 \div 300$ МПа — для плоских прорезиненных ремней, $E = 600$ МПа — для плоских капроновых и $E = 500 \div 600$ МПа — для клиновых резинокордных.

Полное напряжение в ремне передачи. Полное напряжение в каждой точке ремня, как уже упоминалось выше, равно алгебраической сумме σ, σ_c и σ_F (рис. 8.1.4).

Наибольший интерес с точки зрения прочности представляют *максимальные напряжения* $\sigma_{\max}$, которые возникают в тех точках ремня, которые находятся на поверхности ведущего шкива:

$$\sigma_{\max} = \sigma_1 + \sigma_c + \sigma_{F1}. \qquad (8.1.32)$$

С учетом (8.1.22), (8.1.26), (8.1.30) — (8.1.32) находим:

- для плоскоременных передач

$$\sigma_{\max} = \frac{q}{q-1}\sigma_t + \rho v^2 + \frac{\delta E}{d_1}; \qquad (8.1.33)$$

- для клиноременных

$$\sigma_{\max} = \frac{q}{q-1}\sigma_t + \rho v^2 + \frac{2y_0 E}{d_1}. \qquad (8.1.34)$$

Геометрические соотношения в ременных передачах. К числу основных геометрических размеров, описывающих ременную передачу, следует отнести: d_1 и d_2 — диаметры ведущего и ведомого шкивов; a — расстояние между осями шкивов (межосевое расстояние); α_1 и α_2 — углы обхвата ремня на шкивах; l — полная длина ремня (рис. 8.1.8). Рассмотрим эти параметры более подробно.

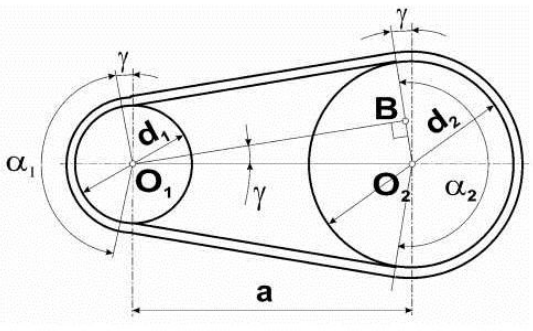


Рис. 8.1.8

а) Углы обхвата ремня α_1 и α_2

Угол обхвата ремнем малого шкива α_1 равен

$$\alpha_1 = 180^0 - 2\gamma, \qquad (8.1.35)$$

причем, как следует из треугольника $\Delta O_1 B O_2$ (рис. 8.1.7), $\sin\gamma = \dfrac{d_2 - d_1}{2a}$.

На практике угол γ не превышает $\dfrac{\pi}{6}$, поэтому приближенно можно принять $\sin\gamma \approx \gamma$, что дает $\gamma = \dfrac{d_2 - d_1}{2a}$ рад, или $\gamma = 57^0 \dfrac{d_2 - d_1}{2a}$. Тогда из (8.1.35) получаем

$$\alpha_1 = 180^0 - 57^0 \frac{d_2 - d_1}{a}. \qquad (8.1.36)$$

При проектировании ременных передач следует придерживаться следующих рекомендаций: для плоскоременной передачи $\alpha_1 \geq 150^0$; для передач клиновым и поликлиновым ремнями $\alpha_1 \geq 120^0$.

Для того чтобы рассчитать угол обхвата ведомого шкива α_2, в (8.1.36) нужно вместо знака " - " положить " + ".

b) Расчетная длина ремня l равна сумме длин прямолинейных участков и дуг обхвата шкивов:

$$l = 2a\cos\gamma + \frac{\pi}{2}(d_2 + d_1) + \gamma(d_2 - d_1). \qquad (8.1.37)$$

Для малых углов $\cos\gamma \cong 1 - 0{,}5\gamma^2$, и формула (8.1.37) переписывается как

$$l \approx 2a + \frac{\pi}{2}(d_2 + d_1) + \frac{(d_2 - d_1)^2}{4a}. \qquad (8.1.38)$$

c) Межосевое расстояние a при окончательно установленной длине ремня, согласно (8.1.38), равно

$$a = \frac{2l - \pi(d_2 + d_1) + \sqrt{[2l - \pi(d_2 + d_1)]^2 - 8(d_2 - d_1)^2}}{8}. \qquad (8.1.39)$$

Выбор межосевого расстояния определяется прежде всего компоновкой проектируемого оборудования, причем чем меньше это расстояние, тем меньше длина ремня и тем больше число изгибов ремня в единицу времени. Следовательно, при уменьшении межосевого расстояния долговечность ремня падает. Это обстоятельство вынуждает ограничивать величину межосевого расстояния, которая на практике принимается равной:

- для плоскоременных передач

$$a \geq 1{,}5(d_2 + d_1); \qquad (8.1.40)$$

- для передач клиновыми и поликлиновыми ремнями

$$a \geq 0{,}55(d_2 + d_1) + h. \qquad (8.1.41)$$

Здесь h — высота ремня.

Силы, действующие на валы ременной передачи. Необходимость создания преднатяга и последующее нагружение ременной передачи, вызванное действием внешнего момента T, приводят к появлению большой по величине реактивной силы $\vec{F}_r$, приложенной к сопряженным с ременной передачей валам (рис. 8.1.9). Ясно, что в работающей передаче сила $\vec{F}_r$ представляет собой результирующую сил натяжения $\vec{S}_1$ и $\vec{S}_2$, направленную по радиусу к центру вращения вала и по модулю равную

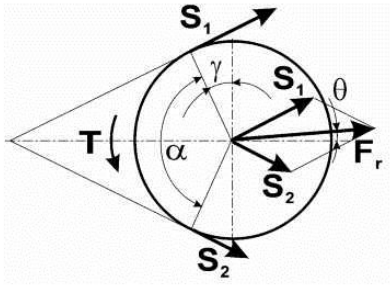


Рис. 8.1.9

$$F_r = \sqrt{S_1^2 + S_2^2 + 2S_1S_2\cos\alpha} \cong 2S_0\cos\frac{\alpha}{2}. \quad (8.1.42)$$

Кривые скольжения. Геометрические размеры передачи определяют значение момента вращения, который может быть передан с ее помощью, т. е. *тяговую (*или *нагрузочную) способность.* Для числовой характеристикой тяговой способности применяется коэффициент тяги φ:

$$\varphi = \frac{F_t}{S_1 + S_2} = \frac{F_t}{2S_0}. \quad (8.1.43)$$

Воспользовавшись (8.1.20), перепишем выражение (8.1.43) в виде

$$\varphi = \frac{q-1}{q+1}. \quad (8.1.44)$$

Полезная нагрузка (окружная сила) F_t передачи, развиваемая на дуге скольжения, связана с величиной передаваемого момента вращения T_1 зависимостью

$$F_t = \frac{2T_1 \cdot 10^3}{d_1}. \quad (8.1.45)$$

С помощью (8.1.43) и (8.1.45) находим

$$T_1 = S_0 d_1 \varphi \cdot 10^{-3}. \quad (8.1.46)$$

Из (8.1.46) следует, что величина передаваемого момента возрастает при увеличении силы предварительного натяга S_0.

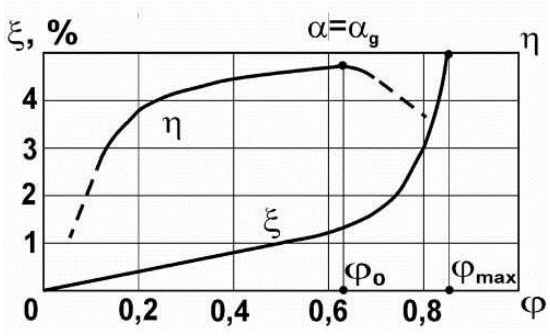


Рис. 8.1.10

Коэффициент полезного действия (КПД) η ременной передачи зависит от момента T_1 и предварительного натяжения, или коэффициента тяги φ. Примерный график такой зависимости изображен на рис. 8.1.10. Для сравнения на графике приведена экспериментальная кривая скольжения, представляющая со-

бой зависимость коэффициента скольжения ξ от коэффициента тяги φ. Экспериментальная кривая построена при следующих условиях (которые в дальнейшем будем называть стандартными): $\alpha_1 = 180^0$, $v = 10$ м/с.

Кривая скольжения, как видно из графика, линейно возрастает на начальном участке, и одновременно плавно повышается КПД. За точкой $\varphi = \varphi_0$, соответствующей $\alpha = \alpha_g$, характер кривой резко меняется, и она стремится к бесконечности. Это объясняется следующим образом. Линейное возрастание коэффициента скольжения при увеличении нагрузки связано с возрастанием угла скольжения. Как только угол скольжения α_g становится равным углу обхвата α, коэффициент полезного действия принимает наибольшее значение, а дальнейшее увеличение нагрузки приводит к пробуксовке, что является недопустимым для эксплуатации передачи.

Поскольку функция, описывающая КПД, имеет экстремальное значение, оптимальные условия эксплуатации ременной передачи соответствуют именно этой точке. Коэффициент тяги и КПД, отвечающие экстремальному значению, равны

- $\varphi_0 = 0{,}4 \div 0{,}5$, $\eta = 0{,}97 \div 0{,}98$ — для плоскоременных передач;
- $\varphi_0 = 0{,}6 \div 0{,}7$, $\eta = 0{,}92 \div 0{,}97$ — для клиноременных передач.

Кривая скольжения является эффективным инструментом для определения нагрузочной способности передач.

Испытания ременных передач, кроме того, позволяют определить долговечность ремней. Переменный характер напряжений, имеющий место при движении ремня, вызывает его усталостные разрушения. Очевидно, что эти напряжения носят циклический характер. За единицу цикла можно принять промежуток времени (называемый назовем *временем цикла*, или *временем пробега*), в течение которого выделенная точка ремня в результате вращения передачи переходит от предыдущего шкива к последующему. Такой переход обусловлен резким изменением уровня напряжений. Число циклов в единицу времени равно $\nu_0 = v/l$, $[\nu]=[c^{-1}]$, а полное число циклов N за время t_h —

$$N = 3600 t_h z_0 \nu_0,$$

где z_0 — число шкивов передачи. Усталостные испытания ременных передач показали, что уравнение кривой выносливости ремня для всех типов передач имеет вид

$$\sigma_{1\max}^m N = const,$$

или

$$\sigma_{1\max} = \frac{C}{N^{1/m}}. \qquad (8.1.47)$$

Здесь $\sigma_{1\max}$ — максимальное напряжение, возникающее в точках ремня, лежащих на поверхности ведущего шкива; m — показатель степени кривой выносливости; $C = const^{1/m}$ — определяемая экспериментально постоянная, которая зависит от типа ремня (см. ниже).

Допускаемое полезное напряжение. Аналитически условие прочностной надежности ремня можно представить в следующем виде:

$$\sigma_{1\max} \le \sigma_e , \tag{8.1.48}$$

где σ_e — максимальное эффективное переменное напряжение, которое ремень может выдержать в течение $N = N_e$ циклов нагружения. Согласно уравнению кривой выносливости (8.1.47) запишем

$$\sigma_e^m N_e = \sigma_g^m N_g = const . \tag{8.1.49}$$

Здесь $\sigma_g^m N_g$ — координаты точки, условно принятой за предел выносливости. Из (8.1.49) находим значение допускаемого напряжения:

$$\sigma_e = \frac{C}{N_e^{1/m}} = \sigma_{1\max} . \tag{8.1.50}$$

В результате экспериментальных исследований при начальном напряжении $\sigma_0 = 1{,}2$ МПа, передаточном отношении $u = 1$ и угле обхвата $\alpha = 180^0$ получено:

- $m = 5 \div 6$; $C = 60 \div 70$ МПа; $N_g = 10^7$ — для плоскоременных передач;
- $m = 7 \div 11$; $C = 90 \div 100$ МПа; $N_g = 10^7$ — для клиновых и поликлиновых ремней;
- $m = 7 \div 11$; $C = 38{,}2$ МПа; $N_g = 10^9$ — для клиновых ремней с высокими требованиями к долговечности.

Расчет плоскоременной передачи по ее тяговой способности. Наиболее просты для расчета плоскоременные передачи. Основой здесь является полученное из анализа кривой скольжения значение коэффициента тяги φ в точке с максимальным значением КПД. Зная величины предварительного натяга σ_0 (напомним, что для плоскоременных передач рекомендуется принимать $\sigma_0 = 1{,}6 \div 2{,}0$ МПа) и коэффициента тяги, из анализа кривой скольжения можно определить значение удельного окружного усилия σ_t при максимальном значении КПД:

$$\sigma_t = c + w\frac{\delta}{d_1} , \tag{8.1.51}$$

где $c = 2 \div 3$ МПа; $w = 9 \div 17$ (числовые значения констант получены для прорезиненных и хлопчатобумажных ремней при базовых условиях испытаний).

Значение σ_t следует откорректировать в том случае, если условия проведения эксперимента не соответствуют реальным условиям эксплуатации ременной передачи. В этой связи при определении допускаемого рабочего напряжения σ_{ta} следует воспользоваться следующей зависимостью:

$$\sigma_{ta} = \sigma_t C_0 C_\alpha C_v , \tag{8.1.52}$$

где C_0 — коэффициент учета угла наклона передачи по отношению к горизонтали (вводится для передач без регулировки натяжения), табл. 8.1.2; $C_\alpha = 1 - 0{,}003(180 - \alpha)$ — коэффициент, учитывающий изменение допустимого напряжения при изменении угла обхвата по отношению к базовому углу $\alpha = 180^0$; $C_v = 1{,}04 - 0{,}0004v^2$ — коэффициент, характеризующий изменение допустимого напряжения при изменении скорости относительно базового значения $v = 10$ м/с.

Таблица 8.1.2. **Значения коэффициента C_0**

Угол наклона, град	$0 \div 60$	$60 \div 80$	$80 \div 90$
C_0	1	0,9	0,8

Условие, при котором ременная передача будет наиболее эффективно использоваться, имеет вид

$$\frac{F_t}{b\delta} \le \sigma_{ta}. \tag{8.1.53}$$

Из (8.1.53) определяется толщина ремня δ:

$$\delta \ge \frac{F_t}{b\sigma_{ta}}. \tag{8.1.54}$$

Значение диаметра ведущего шкива d_1 плоскоременной передачи рассчитывается из условия обеспечения приемлемой долговечности по эмпирической формуле

$$d_1 = (1100 \div 1350)\sqrt[3]{\frac{P_1}{n_1}}, \tag{8.1.55}$$

где P_1 — мощность ведущего шкива, кВт; n_1 — частота его вращения, об/мин.

Расчет клиноременной передачи. В качестве критерия расчета принимаем выносливость ремня. Выражение (8.1.50) с учетом (8.1.34) принимает вид

$$\sigma_{\max} = \frac{q}{q-1}\sigma_t + \rho v^2 + \frac{2y_0E}{d_1} = \frac{C}{N_e^{1/m}}. \tag{8.1.56}$$

Подстановка в (8.1.56) числовых значений $m = 11$ и $C = 38{,}2$ (для базовых условий испытаний) приводит к выражению

$$\frac{q}{q-1}\sigma_t + 1{,}27 \cdot 10^{-3} v^2 + 7{,}5\frac{b_0^{1,57}}{d_e} = \frac{38{,}2}{N_e^{0{,}09}}. \tag{8.1.57}$$

Здесь b_0 — ширина поперечного сечения ремня, измеренная по оси, проходящей через центр тяжести сечения. Заметим, что в (8.1.57) вместо диаметра d_1 взят экви-

валентный диаметр $d_e = d_1 K_u$, который учитывает разную степень изгиба на большом и малом шкивах при передаточных отношениях $u > 1$. Согласно гипотезе линейного суммирования повреждений коэффициент K_u равен

$$K_u = \frac{1}{2\left\{0{,}5\left[1+\left(\frac{u+1}{2u}\right)^{11{,}1}\right]\right\}^{0{,}09} - 1}. \qquad (8.1.58)$$

Задача расчета клиноременной передачи в конечном итоге сводится к подбору ремней при оптимальных условиях эксплуатации. Этим условиям соответствует некоторое рабочее напряжение σ_t, вызванное передаваемым окружным усилием F_t. Решая уравнение (8.1.57) относительно σ_t, находим значение допускаемого рабочего напряжения для базовых условий эксплуатации (долговечность $L_h = 24 \cdot 10^3$ часов, $q = 5$, что соответствует коэффициенту тяги $\varphi_0 = 0{,}67$):

$$\sigma_t = \frac{5{,}55}{v_0^{0{,}09}} - 10^{\,3} v^2 - 6\frac{b_0^{1{,}57}}{d_e}. \qquad (8.1.59)$$

Допускаемое рабочее напряжение σ_{ta} для реальной передачи можно выразить через напряжение σ_t, полученное для базовых условий испытаний, а именно

$$\sigma_{ta} = \sigma_t C_\alpha C_1 C_z / C_d. \qquad (8.1.60)$$

Таблица 8.1.3. **Рекомендуемые значения коэффициента динамичности нагрузки C_d**

Характер нагрузки	C_d
Спокойная. Пусковая до 120 % нормальной	1
Умеренные колебания. Пусковая до 150% нормальной	1,1 ÷ 1,2
Значительные колебания. Пусковая до 200% нормальной	1,25 ÷ 1,4
Ударная Пусковая до 300% нормальной	1,5 ÷ 1,6

Значения коэффициента динамичности C_d приведены в таблице 8.1.3. Коэффициент C_α, учитывающий влияния угла обхвата на нагрузочную способность, вычисляется по формуле

$$C_\alpha = 1 - 0{,}003(180 - \alpha_1). \qquad (8.1.61)$$

Выражение (8.1.60) удобно переписать в терминах мощности P_t, которая может быть передана одним ремнем. Эта мощность равна $P_t = \sigma_t A v$. Тогда допускаемая мощность P_a имеет вид:

$$P_{ta} = P_t C_\alpha C_l C_z / C_d , \qquad (8.1.62)$$

где: $C_l = 1 + 2{,}4\left[\left(\frac{l}{l_0}\right)^{0{,}09} - 1\right]$ — коэффициент учета фактической длины ремня по отношению к зависящий от площади поперечного сечения ремня длине l_0, принятой при базовых условиях испытаний; C_z — коэффициент неравномерности нагрузки по потокам,

$$C_z = 1{,}025 - 0{,}025z . \qquad (8.1.63)$$

Величины параметров P_t и l_0 приводятся в каталогах завода-изготовителя.

Если полную мощность, передаваемую передачей, обозначить через P, то количество ремней z ременной передачи определится формулой

$$z = \frac{P}{P_{ta}} . \qquad (8.1.64)$$

Результаты расчета, выполненные по формуле (8.1.63), удобно представить в виде таблицы (табл. 8.1.4).

Таблица 8.1.4. **Зависимость коэффициента неравномерности нагрузки по потокам C_z от количества ремней z**

Z	1	2 ÷ 3	4 ÷ 6	более 6
C_Z	1	0,95	0,90	0,85

Выбор диаметра d_1 ведущего шкива осуществляется согласно приведенным выше рекомендациям. Величина межосевого расстояния a выбирается конструктивно, но при этом следует по возможности обеспечивать выполнение следующего условия:

$$a_{\min} < a < a_{\max};$$

$$a_{\min} = 0{,}55(d_1 + d_2) + h; \qquad a_{\max} = (1{,}5 \div 2{,}0)(d_1 + d_2) .$$

Глава 8.2. **Цепные передачи**

Цепные передачи являются разновидностью передач зацеплением. Они представляют собой механизмы, в которых движение передается шарнирной цепью, охватывающей ведущее и ведомое зубчатые колеса (с числами зубьев z_1 и z_2 соответственно), которые называются *звездочками* (рис. 8.2.1). При таком конструктивном решении движение может быть передано на значительное расстояние.

Как и передачи других типов, цепные имеют достоинства и недостатки, которые и определяют область их практического применения.

Одним из главных достоинств цепных передач является достаточно высокий КПД (табл. 8.2.1).

Таблица 8.2.1. **Средняя величина КПД цепных передач**

Виды цепных передач	η
закрытые передачи при достаточной смазке	$\eta = 0{,}94 \div 0{,}96$
открытые передачи со смазкой	$\eta = 0{,}92 \div 0{,}95$
открытые передач без смазки	$\eta = 0{,}90 \div 0{,}92$

Цепные передачи могут быть высоконагруженными (до 100 кВт и выше), что существенно отличает их от ременных. Кроме того, они имеют значительно меньшие размеры и нагрузки на валы и опоры по сравнению с ременными передачами при равной внешней нагрузке, для них не характерно проскальзывание цепи по звездочке и буксование, наконец, стальная цепь прочнее ремня.

Рекомендованное значение ресурса закрытых цепных передач обычно $L = 10000 \div 15000$ часов. В отдельных случаях такие передачи могут работать без разрушения 50000 и более часов.

Перечисленные достоинства цепных передаточных механизмов привели к их широкому использованию в сельскохозяйственных и строительно-дорожных машинах, подъемно-транспортной технике, оборудовании для горной и нефтяной промышленности, текстильном и полиграфическом оборудовании и т. д.

К числу недостатков цепной передачи следует отнести повышенный износ сопряженных поверхностей и значительный шум при эксплуатации.

В цепных передачах линейная скорость перемещения цепи v не является постоянной величиной, из-за чего неизбежно возникновение ускорений и связанных с ними динамических сил, приводящих к вибрациям и ударам. Величины этих вибраций и ударов возрастают с увеличением угловых скоростей

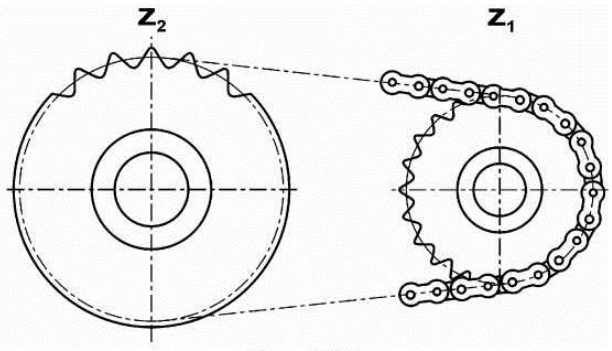
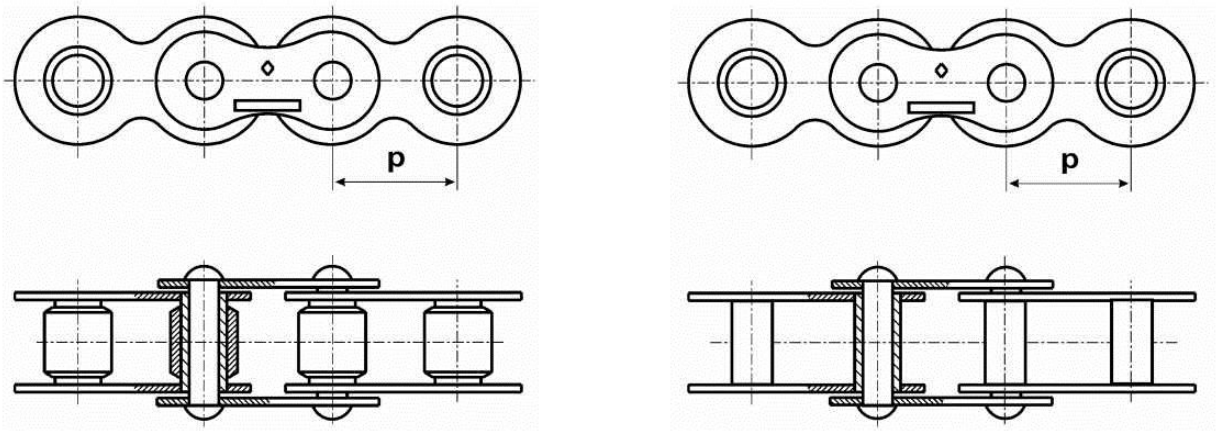


Рис. 8.2.1



a) b)

Рис. 8.2.2

вращения звездочек. Это обстоятельство вынуждает ограничивать верхний предел угловой скорости.

Для передач общего назначения эта скорость не должна превышать 15 м/с. В специальных приводах цепные передачи работают при скоростях до 35 м/с. Оптимальное значение передаточного отношения для цепных передач лежит в диапазоне $u = 1{,}5 \div 5$, а максимально допустимое — $u \le 10$.

По назначению цепи бывают *приводные* и *тяговые*. Приводные цепи применяются в качестве ступеней в приводах различных стационарных машин и механизмов, в то время как тяговые используются для перемещения груза, что не является предметом нашего рассмотрения. В дальнейшем здесь рассматриваются лишь приводные пластинчатые цепи.

По конструктивному исполнению приводные цепи подразделяются на *роликовые* (рис. 8.2.2a), которые распространены наиболее широко, и *втулочные* (рис. 8.2.2b). Роликовые цепи могут быть как *однорядными,* так и *многорядными* (рис. 8.2.3).

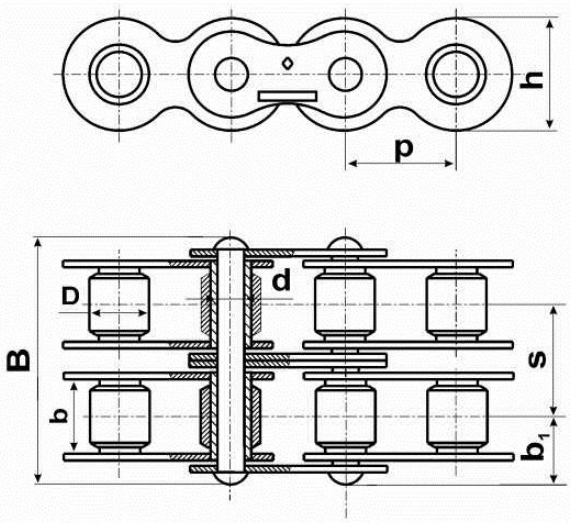


Рис. 8.2.3

При больших скоростях вращения (более 10 м/с) роликовые цепи рекомендуется заменять более дешевыми и легкими втулочными, которые при хорошей смазке имеют равную с первыми долговечность.

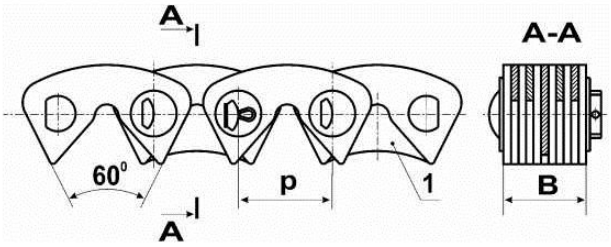


Рис. 8.2.4

Кроме того, существуют варианты использования *зубчатых* цепей (рис. 8.2.4), каждое звено которых условно можно представить в виде зуба, входящего в зацепление с зубьями звездочек. Но в настоящее время на практике они почти не встречаются из-за отсутствия заметных преимуществ по отношению к остальным типам цепных передач и высокой стоимости.

Кинематика цепной передачи. Основными кинематическими характеристиками цепной передачи являются следующие параметры:

- *линейная скорость перемещения цепи* v;
- *угловая скорость вращения ведущей звездочки* ω_1;
- *угловая скорость вращения ведомой звездочки* ω_2.

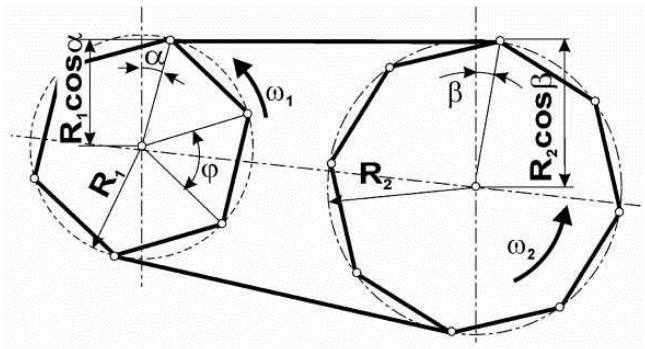


Рис. 8.2.5

Рассмотрим эти параметры подробно. На рис. 8.2.5 приведена кинематическая модель цепной передачи с горизонтально расположенной ведущей ветвью. Здесь звенья цепи представляются в виде отрезков прямых, вписанных в дуги окружностей радиусами R_1 и R_2, равными радиусам ведущей и ведомой звездочек. В текущем положении координаты ведущего и ведомого звеньев звездочки характеризуются углами α и β соответственно; φ — угловой шаг ведущей звездочки.

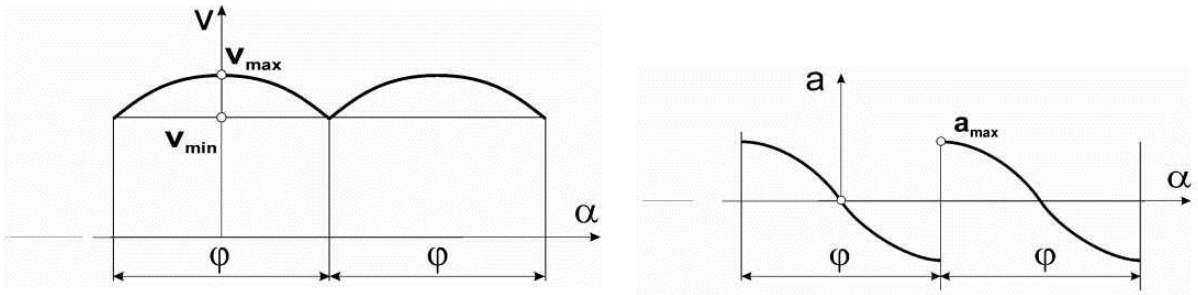
Линейная скорость v цепи равна

$$v = \omega_1 R_1 \cos\alpha = \omega_2 R_2 \cos\beta . \qquad (8.2.1)$$

Угол α в процессе вращения меняется в пределах $0 \le \alpha \le \pi / z_1$, а величина угла β лежит в пределах $0 \le \beta \le \pi / z_2$. Следовательно, скорость перемещения цепи также изменяется, достигая своего максимального $v_{\max}$ и минимального $v_{\min}$ значений,

$$v_{\max} = \omega_1 R_1 = \omega_2 R_2 ; \quad v_{\min} = \omega_1 R_1 \cos\frac{\pi}{z_1} = \omega_2 R_2 \cos\frac{\pi}{z_2} . \qquad (8.2.2)$$

На рис. 8.2.6a показан график изменения линейной скорости перемещения цепи в зависимости от угла поворота ведущей звездочки α. Этот график представляет собой периодическую функцию, дифференцирование которой позволяет проследить процесс изменения ускорения. Ускорение (рис. 8.2.6b) также является периодической функцией, но с разрывами на границах периодов. В точках разрывов функции ускорения имеют место динамические проявления в виде ударов. Чем больше скорость вращения и чем меньше число зубьев у звездочки, тем выше динамические силы, действующие на звездочку со стороны цепи. Последнее обстоятельство вынуждает проектировщиков ограничивать величины этих параметров. В зависимости от геометрических размеров цепных передач предприятия-изготовители предлагают и величины предельно допустимых угло-



a) b)

Рис. 8.2.6

вых скоростей, которые продиктованы результатами экспериментальных исследований.

Мгновенные значения угловых скоростей ω_1 и ω_2 рассчитываются по формулам

$$\omega_1 = \frac{v}{R_1 \cos\alpha}; \qquad \omega_2 = \frac{v}{R_2 \cos\beta}. \tag{8.2.3}$$

Мгновенное значение передаточного отношения u_r с учетом (8.2.3) равно

$$u_r = \frac{z_1}{z_2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{R_2 \cos\beta}{R_1 \cos\alpha}. \tag{8.2.4}$$

В качестве предельной числовой характеристики следует принимать передаточное отношение u, полученное в предположении бесконечного числа зубьев. Тогда, при $z_1 \to \infty$ и $z_2 \to \infty$, имеем $\cos\alpha \to 1$; $\cos\beta \to 1$. При этом из (8.2.4) следует, что

$$u = \frac{R_2}{R_1}. \tag{8.2.5}$$

Для числовой характеристики неравномерности вращения используется коэффициент неравномерности вращения ε, равный

$$\varepsilon = \frac{u_{\max} - u_{\min}}{u}. \tag{8.2.6}$$

Непостоянство и периодичность динамических усилий в процессе работы цепной передачи может привести к появлению резонансных явлений, представляющих опасность при высоких скоростях движения цепи. Критические частоты вращения зависят от жесткости валов и звездочек, а также ряда других параметров.

Геометрические параметры цепных передач. Рассмотрим особенности геометрии цепи и звездочки.

Геометрия цепи. Для сокращения затрат на изготовление цепных передач целесообразно пользоваться стандартным набором нормальных размеров цепей в зависимости от передаваемого момента вращения (табл. 8.2.2).

Таблица 8.2.2. **Нормальные размеры цепей**

Обозначение цепи	p	Q, не менее	B, не более	D	d	s	b_1, не более	h, не более	λ	m	N	Λ	b, не более
ПРЛ—19,05:1	19,05	29,5	33	11,91	5,96	0	17	18,2	1,6	1,6	1	95,4	12,7
ПРЛ—25,40:1	25,4	50,0	39	15,88	7,95	0	22	24,2	1,6	2,6	1	161,2	15,88
ПРЛ—31,75:1	31,75	70,0	46	19,05	9,55	0	24	30,2	1,67	3,8	1	244	19,05
ПРЛ—38,10:1	38,1	100,0	58	22,23	11,12	0	30	36,2	1,71	5,5	1	376	25,4
ПРЛ—44,45:1	44,45	130,0	62	25,4	12,72	0	34	42,2	1,75	7,5	1	445	25,4
ПРЛ—50,80:1	50,8	160,0	72	28,58	14,29	0	38	48,3	1,78	9,7	1	614	31,75
ПРЛ—15,88:1	15,875	22,7	24	10,16	5,08	0	13	14,8	1,56	0,9	1	60,2	6,65
ПР—12,70:3	12,7	18,2	19	8,51	4,45	0	10	11,8	1,5	0,65	1	39,6	5,4
ПР—63,50:1	63,5	353,8	89	39,68	19,84	0	48	60,4	1,6	16	1	1042	38,1
ПР—50,80:1	50,8	226,8	72	28,58	14,29	0	38	48,3	1,76	9,7	1	646	31,75
ПР—44,45:1	44,45	172,4	62	25,7	12,72	0	34	42,4	1,73	7,5	1	473	25,4
ПР 38,10:1	38,1	127,0	58	22,23	11,12	0	30	36,4	1,71	5,5	1	394	25,4
ПР—31,75:1	31,75	88,5	46	19,05	9,55	0	24	30,2	1,67	3,8	1	262,2	19,05
ПР 25,40:1	25,4	56,7	39	15,88	7,95	0	22	24,2	1,6	2,6	1	179,7	15,88
ПР—19,05:1	19,05	31,8	33	11,91	5,96	0	18	18,2	1,6	1,9	1	105,8	12,7
ПР 15,88:2	15,875	22,7	24	10,16	5,08	0	13	14,8	1,56	1	1	70,9	9,65
ПР—12,70:4	12,7	18,2	21	8,51	4,45	0	11	11,8	1,5	0,75	1	50,3	7,75
ПР 12,70:2	12,7	9,0	12	7,75	3,66	0	7	10	1,64	0,35	1	20,1	3,3
ПР—12,70:1	12,7	9,0	8,7	7,75	3,66	0	0	10	1,64	0,3	1	16,8	2,4
ПР 9,53:1	9,525	9,1	17	6,35	3,28	0	10	8,5	1,5	0,45	1	28	5,72
ПР—8,00:1	8	4,6	12	5	2,31	0	7	7,5	1,6	0,2	1	11	3
ПР 15,88:1	15,875	22,7	20	10,16	5,08	0	11	14,8	1,56	0,8	1	54,8	6,48
2ПР—12,70:1	12,7	31,8	35	8,51	4,45	13,92	11	11,8	1,49	1,4	2	105	7,75
2ПР 25,40:1	25,4	113,4	68	15,88	7,95	29,29	22	24,2	1,6	5	2	359	15,88

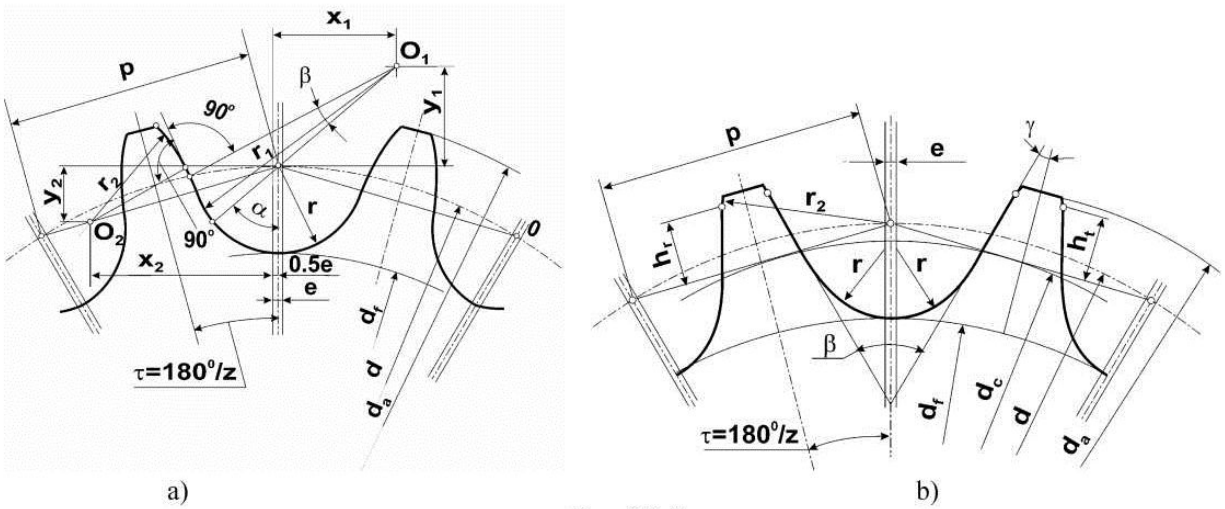
Обозначение цепи	*p*	Q, не менее	B, не более	*D*	*d*	*s*	b_1, не более	h, не более	λ	*m*	N	Λ	b, не более
2ПР 50,80:1	50,8	453,6	130	28,58	14,29	58,55	38	48,3	1,78	19,1	2	1292	31,75
2ПР—44,45:1	44,45	344,8	110	25,4	12,72	48,87	34	42,4	1,75	14,4	2	946	25,4
2ПР 38,10:1	38,1	254,0	104	22,23	11,12	45,44	30	36,2	1,71	11	2	788	25,4
2ПР—31,75:1	31,75	177,0	82	19,05	9,55	35,76	24	30,2	1,67	7,3	2	524	19,05
3ПР 44,45:1	44,45	517,2	160	25,4	12,72	48,87	34	42,4	1,75	21,7	3	1419	25,4
2ПР—25,40:1	25,4	113,4	68	15,88	7,95	29,29	22	24,2	1,6	5	2	359	15,88
3ПР 50,80:1	50,8	680,4	190	28,58	14,29	58,55	38	48,3	1,78	28,3	3	1938	31,75
3ПР—38,10:1	38,1	381,0	150	22,23	11,12	45,44	30	36,2	1,71	16,5	3	1182	25,4
3ПР 31,75:1	31,75	265,5	120	19,05	9,55	35,76	24	30,2	1,67	11	3	786	19,05
3ПР—25,40:1	25,4	170,1	98	15,88	7,95	29,29	22	24,2	1,6	7,5	3	539	15,88
3ПР 19,05:1	19,05	108,0	86	11,91	5,88	25,5	18	18,2	1,6	5	3	317	12,7
3ПР—12,70:1	12,7	45,4	50	8,51	4,45	13,92	11	11,8	1,49	2	3	150	7,75
3ПР 15,88:1	15,875	68,1	57	10,16	5,08	16,59	13	14,8	1,56	2,8	3	202	9,65
4ПР—19,05:1	19,05	152,0	105	11,91	5,96	25,5	18	18,2	1,6	7,5	4	408	12,7
ПРД 38,10:1	38,1	29,5	31	11,91	5,96	0	17	18,2	3,199	1,1	1	105,8	12,7
ПРД—76,20:1	76,2	100,0	57	22,23	11,12	0	30	36,2	3,428	3,8	1	460	25,4
ПРД 63,50:1	63,5	70,0	46	19,05	9,55	0	24	30,2	3,333	2,6	1	304	19,05
ПРД—50,80:1	50,8	50,0	39	15,88	7,95	0	22	24,2	3,199	1,9	1	215	15,88
ПРД 38,00:1	38	30,0	42	15,88	7,95	0	23	21,3	3,393	1,87	1	225	22
ПРД—31,75:1	31,75	22,7	24	10,16	5,08	0	13	14,8	3,125	0,6	1	67,5	9,65
ПРД 38,00:2	38	40,0	47	15,88	7,95	0	26	21,3	3,393	2,1	1	242	22
ПРИ—140,00:1	140	1200	182	65	36	0	94	90	2,154	63	1	4320	80
ПРИ 78,10:1	78,1	360,0	102	33,3	17,15	0	51	45	2,345	14	1	996	38,1
ПРИ—78,10:2	78,1	400,0	102	40	19	0	51	56	1,952	19	1	1103	38,1
ПРИ 103,20:1	103,2	650,0	135	46	24	0	73	60	2,243	28	1	1968	49

Примечание: (см. рис. 8.2.2—8.2.3) p — номинальный шаг цепи; Q — разрушающая нагрузка цепи; B — ширина цепи; D — диаметр элемента зацепления цепи (втулки, ролика); d — диаметр валика; s — расстояние между осями рядов (для многорядных цепей); b_1 — половина ширины звена цепи; h — высота цепи; N — число рядов цепи; $A = bd$ — проекция опорной поверхности шарнира цепи; b — расстояние между внутренними пластинами цепи; m — погонная масса цепи (масса единицы длины); $\lambda = p/D$ — геометрическая характеристика зацепления. Все линейные размеры приведены в миллиметрах, площадь — в квадратных миллиметрах.

Геометрия звездочки. Звездочки цепных передач напоминают зубчатые колеса, только с иной формой зуба. Контур зуба звездочки выбирается таким образом, чтобы обеспечить минимальные значения следующих параметров: давление между роликом и зубом, уровень износа, динамические нагрузки на зуб и т. д. В таблице 8.2.3 приведены три возможных варианта профиля зуба звездочек цепных передач.

Вогнуто-выпуклая форма профиля представлена участком положительной кривизны de (головка зуба), небольшим по величине линейным участком cd и двумя участками вогнутого профиля, bc и ab. Зуб звездочки *прямолинейного профиля* состоит из двух сопряженных участков — линейного bc и вогнутого ab. Зуб звездочки *прямолинейно-выпуклого профиля* образуется из трех участков разной кривизны: рабочий участок зуба, очерченный отрезком прямой — линией bc, сопрягается с участками cd выпуклого и ab вогнутого профилей.

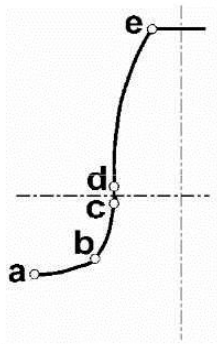
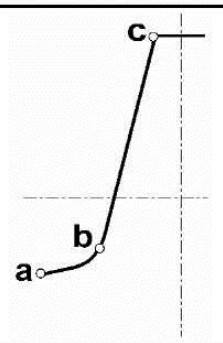
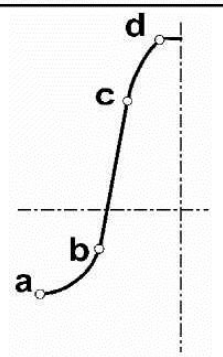
Каждый из описанных здесь профилей имеет свои преимущества, но самое широкое распространение, особенно при высоких скоростях вращения, получил *выгнуто-выпуклый профиль*, который обеспечивает минимальный уровень контактных напряжений. Наиболее эффективно такой тип профиля применяется для цепей малого шага, у которых отношение шага цепи p к диаметру ролика цепи D подчиняется неравенству $p/D \le 2$. Примеры построения такого профиля приведены на рис. 8.2.7a. В качестве примера приведен также прямолинейный профиль с закруглением вершин зубьев (рис. 8.2.7b). Как следует из рисунков, профили звездочек выполняются как без смещения центров впадин, так и со смещением e. Рекомендованная величина смещения составляет $e = 0{,}03p$.



a) b)

Рис. 8.2.7

Таблица 8.2.3. **Возможные варианты профиля зуба звездочек цепных передач**

1. Вогнуто-выпуклый (ГОСТ 591 — 69)		Образуется из четырех участков: впадины ab, вогнутой поверхности bc, очень незначительной по величине прямолинейной поверхности cd и головки зуба de.
2. Прямолинейный (ГОСТ 592 — 81)		Образуется из двух участков: впадины ab и рабочей части bc с прямолинейной поверхностью зуба.
3. Прямолинейно-выпуклый (ГОСТ 592 — 81)		Образуется из трех участков: впадины ab, рабочей части bc с прямолинейной поверхностью и головки зуба cd.

Аналогия между зубьями звездочек цепных передач и зубчатых колес позволяет использовать некоторые обозначения и понятия, введенные ранее применительно к зубчатым передачам.

Периодичность геометрической формы звездочки с числом зубьев z можно характеризовать величиной шага p, а ее габаритные размеры — диаметром делительной окружности d,

$$d = \frac{p}{\sin\frac{\pi}{z}}. \qquad (8.2.7)$$

Диаметр окружности выступов

$$d_a = p\left(0{,}5 + ctg\frac{180}{z}\right). \qquad (8.2.8)$$

Диаметр окружности впадин

$$d_f = d - 2r, \tag{8.2.9}$$

где r — радиус впадины.

Формулы для полного расчета размеров зубьев звездочек приведены в таблицах 8.2.4 и 8.2.5.

Поперечное сечение венца звездочки и основной профиль зуба необходимо выбирать таким образом, чтобы обеспечить свободный вход звеньев цепи в зацепление, а также компенсацию некоторых неточностей монтажа и перекосов, возникающих при эксплуатации. Поэтому в зацеплении между зубьями звездочки и внутренними пластинами цепи должен быть зазор, рекомендованное значение которого равно $\delta = 0{,}07b\sqrt{N}$.

Таблица 8.2.4. **Расчетные формулы для определения геометрических параметров звездочек**

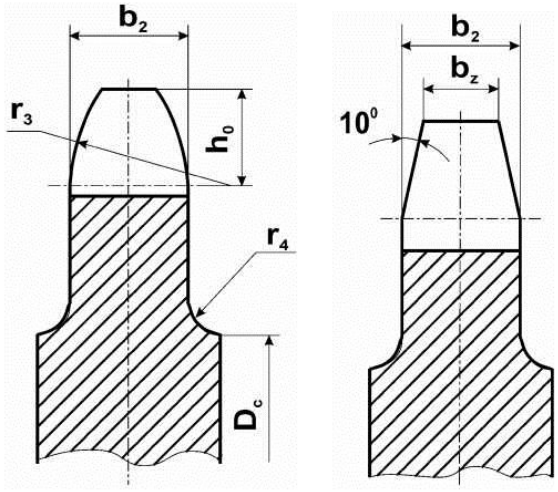
Параметры и обозначения	Расчетные формулы	
	Профиль 1 (рис. 8.2.7a)	*Профиль 2* (рис. 8.2.7b)
Половина углового шага τ	$\tau = \frac{180°}{z}$	
Диаметр окружности, вписанной в шаговый многоугольник, d_c	$d_c = pctg\,\tau$	
Высота зуба, измеренная от шаговой линии, h_t	$h_t = 0{,}25p$	См. табл. 8.2.5
Диаметр делительной окружности d	$d = \frac{p}{\sin\tau}$	
Диаметр окружности выступов d_a	$d_a = d_c + 2h_t$	
Диаметр окружности впадин d_f	$d_f = d - 2r$	$d_f \le d - D - 0.175\sqrt{d}$
Смещение центров дуг впадин e	$e = 0$ — без смещения центров $e = 0{,}03p$ — со смещением центров	$e = (0{,}01 \div 0{,}05)p$
Радиус впадины r	$r = 0{,}5025D + 0{,}05$	$r = 0{,}5(D - 0{,}05p)$
Радиус сопряжения r_1	$r_1 = 0{,}8D + r = 1{,}3025D + 0{,}65$	—

Параметры и обозначения	Расчетные формулы	
	Профиль 1 (рис. 8.2.7a)	*Профиль 2* (рис. 8.2.7b)
Радиус головки зуба r_2	$r_2 = D(1{,}24\cos\varphi + 0{,}8\cos\beta - 1{,}3025) - 0{,}05$	$r_2 = (p - 0{,}5D - 0{,}5e) \times \cos\gamma$
Половина угла впадины α, β	$\alpha = 55° - \frac{60°}{z}$	$\beta = 2\gamma + 2\tau$
Угол сопряжения β	$\beta = 18° - \frac{60°}{z}$	—
Половина угла зуба φ, γ	$\varphi = 17° - \frac{64°}{z} = 90° - \tau - \alpha - \beta$	$\gamma = 13° \div 20°$
Прямой участок профиля cd (см. табл. 8.2.3, профиль 1), h_r	$cd = D(1{,}24\sin\varphi - 0{,}8\sin\beta)$	$h_r = r_2 \sin\gamma$
Расстояние от центра дуги впадины до центра дуги головки зуба O_1O_2	$O_1O_2 = 1.24D$	—
Координаты точки O_1	$x_1 = 0{,}8D\sin\alpha$ $y_1 = 0{,}8D\cos\alpha$	—
Координаты точки O_2	$x_2 = 1{,}24D\cos\tau$ $y_2 = 1{,}24D\sin\tau$	—

Примечание: Величины, имеющие размерность длины, измеряются в миллиметрах; углы — в градусах.

Таблица 8.2.5. **Высота зуба звездочки**

λ	Число зубьев звездочек z		
	$5 \div 30$	$31 \div 50$	51 и более
До 2,2	$h_t = \left(0{,}55 - \frac{0{,}5}{\lambda}\right)p$	$h_t = \left(0{,}65 - \frac{0{,}5}{\lambda}\right)p$	$h_t = \left(0{,}70 - \frac{0{,}5}{\lambda}\right)p$
Свыше 2,2	$h_t = \frac{0{,}65}{\lambda}p$	$h_t = \frac{0{,}75}{\lambda}p$	$h_t = \frac{0{,}90}{\lambda}p$



a) b)

Рис. 8.2.8

Для того, чтобы избежать наезжания внутренних пластин цепей на вершины зубьев, поперечный профиль скругляют (рис. 8.2.8a) или выполняют с угловыми скосами (рис. 8.2.8b). Радиус скругления вершин r_3 и высоту профильной части зуба h_0 рекомендуется определять по формулам

$$r_3 = 1{,}7D;\ \ h_0 = 0{,}8D\,. \qquad (8.2.10)$$

Ширина вершины зуба звездочки (для профиля на рис. 8.2.8b) равна

$$b_z = b_2 - 2(r_3 - \sqrt{r_3^2 - h_0^2})\,.$$

Здесь b_2 — наибольшая ширина зуба звездочки, причем

1) для скругленного профиля (рис. 8.2.8a):

$b_2 = 0{,}93b - 0{,}15$ — для однорядных звездочек;

$b_2 = 0{,}90b - 0{,}15$ — для двухрядных и трехрядных;

$b_2 = 0{,}86b - 0{,}30$ — для многорядных.

2) для профиля со скосами (рис. 8.2.8b):

$b_2 = (0{,}8 \div 0{,}9)b\,.$

Общая ширина зубчатого венца многорядной звездочки:

$$B_z = s(N-1) + b_2\,.$$

Диаметр обода звездочки

$$D_c = p\,ctg\left(\frac{180°}{z}\right) - 1{,}3h_0\,. \qquad (8.2.11)$$

Радиус $r_4 = 1{,}6$ мм при шаге $p \le 35\,мм$ и $r_4 = 2{,}5\,мм$ при шаге $p > 35\,мм$.

Далее будет показано, что уменьшение числа зубьев звездочки приводит к возрастанию возникающих при работе передачи динамических нагрузок, а увеличение числа зубьев — к росту габаритов передачи, а следовательно, повышению веса. Очевидно, что следует принимать некоторые компромиссные решения. Практика проектирования показывает, что число зубьев z_1 меньшей звездочки целесообразно выбирать исходя из условия

$$z_1 > z_{\min};\qquad z_{\min} = 29 - 2u \ge 13\,. \qquad (8.2.12)$$

Для высокоскоростных передач $z_{\min} \ge 35$.

Полученные по формуле (8.2.12) значения необходимо согласовывать с членами следующего ряда нечетных чисел: 13, 15, 17, 21, 23, 25. При этом предпочтение следует отдавать простым числам из этого ряда.

Рекомендованная величина оптимального межосевого расстояния a находится из условия, что угол обхвата на малой звездочке удовлетворяет неравенству $\alpha_1 \geq 120^0$,

$$a = (30 \div 50)p. \tag{8.2.13}$$

Предельное значение межосевого расстояния

$$a_{\max} = 80p. \tag{8.2.14}$$

Минимально допустимое значение межосевого расстояния (при $\alpha_1 \geq 120^0$)

$$\left.\begin{aligned} a_{\min} &= \frac{d_1 + d_2}{2} + (30 \div 50)\,мм, \quad u < 3 \\ a_{\min} &= \frac{d_1 + d_2}{2} \cdot \frac{u + 9}{10}, \quad u \geq 3. \end{aligned}\right\}, \tag{8.2.15}$$

d_1 и d_2 — диаметры ведущей и ведомой звездочки.

Задача практического расчета *длины цепи в шагах* на первом этапе сводится к определению необходимого числа звеньев W_0 по предварительно намеченному межосевому расстоянию a_0. Величина W_0 рассчитывается по формуле, полученной по аналогии с (8.1.37):

$$W_0 = \frac{z_1 + z_2}{2} + \frac{2a_0}{p}\cos\gamma - \frac{z_1\gamma}{\pi} + \frac{z_2\gamma}{\pi}. \tag{8.2.16}$$

Считая угол γ малым и полагая

$$\gamma \cong \sin\gamma = \frac{d_2 - d_1}{2a_0} \cong \frac{z_2 - z_1}{2\pi a_0}p,$$

$$\cos\gamma = \sqrt{1 - \sin^2\gamma} \cong 1 - \frac{1}{2}\sin^2\gamma = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{z_2 - z_1}{2\pi}\right)^2 \frac{p^2}{a_0^2},$$

после подстановки в (8.2.16) окончательно получаем

$$W_0 = \frac{2a_0}{p} + \frac{z_1 + z_2}{2} + \left(\frac{z_2 - z_1}{2\pi}\right)^2 \frac{p}{a_0}. \tag{8.2.17}$$

Полученное с помощью (8.2.17) число затем округляют в бо́льшую сторону до ближайшего четного значения, имеющего с числами зубьев звездочек z_1 и z_2 наименьший общий делитель. После окончательного подбора числа звеньев, которое

обозначим как W, уточняется величина межосевого расстояния путем разрешения (8.2.17) относительно a:

$$a = \frac{p}{4}\left[W - \frac{z_1 + z_2}{2} + \sqrt{\left(W - \frac{z_1 + z_2}{2}\right)^2 - 8\left(\frac{z_2 - z_1}{2\pi}\right)^2}\right]. \qquad (8.2.18)$$

Для передач, у которых межосевое расстояние не регулируется, его расчетное значение несколько уменьшают, для того чтобы обеспечить необходимое провисание цепи, гарантирующее отсутствие натяга. Окончательно межосевое расстояние a^* рекомендуется определять как

$$a^* = a - (2 \div 4) \cdot 10^{-3} a. \qquad (8.2.19)$$

Провисание не является необходимым, когда цепная передача размещается вертикально. Границей вертикального размещения считается такое конструктивное решение, при котором угол наклона передачи $\theta \geq 70^0$.

Основные энергетические и силовые характеристики цепных передач. Цепные передачи способны передавать момент вращения в широком диапазоне значений. Если обозначить через F_t передаваемое цепной передачей окружное усилие, а через v — расчетную скорость перемещения цепи, то нагрузочную способность цепной передачи можно оценить по величине передаваемой мощности P:

$$P = F_t v \cdot 10^{-3}, \qquad [P] = [кВт]. \qquad (8.2.20)$$

Скорость перемещения цепи v определяется выражением

$$v = \frac{z_1 n_1 p}{60 \cdot 10^3}, \qquad (8.2.21)$$

где n_1 — частота вращения звездочки, об/мин.

Основную долю *силы натяжения* ветвей цепи составляет передаваемое окружное усилие F_t. Кроме того, в натяжение входят силы, вызванные провисанием, и динамические силы, пропорциональные скорости и массе цепи. Последними составляющими при практическом расчете цепной передачи обычно пренебрегают. Нагрузку на опоры звездочек цепной передачи можно принимать равной

- при горизонтальном размещении передачи

$$F_s = 1{,}15 F_t;$$

- при вертикальном ее размещении

$$F_s = 1{,}05 F_t. \qquad (8.2.22)$$

Причины потери работоспособности цепных передач и методы их проектировочного расчета. Относительный поворот шарниров цепи, который имеет место при работе передачи, сравнительно мал. Поэтому, если относительная

скорость скольжения невелика, то слоя смазки между сопряженными поверхностями не возникает. Таким образом, в цепных передачах нет жидкостного трения и, как следствие, имеет место значительный износ. В результате износа шаг цепи возрастает на величину Δp, что может привести к соскальзыванию цепи с поверхности зуба звездочки. Для уменьшения износа сопряженные поверхности закаливаются до твердости не ниже $HRC = 55 \div 65$. В этой связи одним из главных критериев расчета цепных передач является расчет их износостойкости. Эксперименты показали, что работоспособность передачи сохраняется, если выполнено условие

$$\frac{\Delta p}{p} \le (0{,}02 \div 0{,}03). \qquad (8.2.23)$$

Для повышения долговечности звездочек рекомендуется их поверхностная закалка.

В некоторых случаях наблюдается усталостное разрушение проушин, что можно предотвратить соответствующим расчетом их усталостной прочности.

Так как до настоящего времени адекватной методики расчета на износ не предложено, то для практического выхода из этой ситуации можно воспользоваться методами подобия, основанными на экспериментальном исследовании геометрически и параметрически подобных моделей. Суть такого подхода состоит в том, что испытания на износ выполняются для некоторого эталонного образца Если проектируемая конструкция и условия ее эксплуатации отличаются от эталона, то за основу расчета принимается эталон, к которому с помощью специальных поправок и приводится проектируемое изделие. В качестве основы для приведения принимают допускаемое контактное давление q_a, зависящее от скорости вращения ведущей звездочки и от шага цепи. Под q_a понимается такое давление в контакте сопряженных поверхностей, при котором гарантированное значение долговечности оказывается не менее 15000 часов, а величина относительного износа удовлетворяет неравенству $\Delta p / p \le 0{,}03$ при эталонных условиях эксплуатации. Значения q_a в зависимости от шага цепи p и частоты вращения ведущей звездочки n_1 приведены в таблице 8.2.6.

Таблица 8.2.6. **Допускаемые по износостойкости давления в шарнирах цепей**

p, мм	q_a, МПа, при следующих n_1, об/мин								
	<50	200	400	600	800	1000	1200	1600	2800
Роликовые цепи (при $z_1 = 15 \div 30$)									
12,7 — 15,875	35	31,5	28,5	26	24	22,5	21	18,5	14
19,05—25,4	35	30	26	23,5	21	19	17,5	15	—
31,75—38,1	35	29	24	21	18,5	16,5	15	—	—
44,45—50,08	35	26	21	17,5	15	—	—	—	—

p, мм	q_a, МПа, при следующих n_1, об/мин								
	<50	200	400	600	800	1000	1200	1600	2800
Зубчатые цепи									
12,7 — 15,875	20	18	16,5	15	14	13	12	10,05	8
19,05—25,4	20	17	15	13	12	11	10	8,5	—
31,75	20	16,5	14	12	10,5	9,5	7	—	—

Если предположить, что давление в контакте при действии окружной силы распределяется равномерно (рис 8.2.9), то, как показано в главе 7.1, можно записать условие износостойкости эталонной цепной передачи в виде

$$q = \frac{F_t}{A} \le q_a . \qquad (8.2.24)$$

Напомним, что $A = bd$ — площадь опорной поверхности шарнира цепи (рис. 8.2.3; табл. 8.2.2). Для применяемых в России передач обычно имеет место соотношение $A = 0{,}28p^2$.

Так как характер нагружения и другие параметры проектируемой передачи отличаются от эталонной, то для многорядных цепных передач условие износостойкости (8.2.24) можно записать в форме

$$q = \frac{F_t k_e}{A k_n} \le q_a . \qquad (8.2.25)$$

Здесь k_e — коэффициент приведения к эталонному режиму нагружения, равный

$$k_e = k_1 k_2 k_3 k_4 k_5 . \qquad (8.2.26)$$

В свою очередь,

- k_1 — коэффициент, учитывающий динамичность приложения нагрузки. При выборе числовых значений этого коэффициента велика доля субъективизма, и приведенные ниже значения можно использовать только для ориентировочной оценки:

$k_1 = 1$ в случае статического и квазистатического нагружения;

$k_1 = 1{,}2 \div 1{,}5$ в случае, когда внешняя нагрузка прикладывается с толчками и небольшими ударами;

$k_1 = 1{,}8$ в случае, когда внешняя нагрузка ударного действия.

- k_2 — коэффициент, учитывающий изменения длины цепи по отношению к эталонной длине, причем

$k_2 = 0{,}9$ при $a = (60 \div 80)p$;

$k_2 = 1$ при $a = (30 \div 50)p$;

$k_2 = 1{,}25$ при $a \le 25p$.

- k_3 — коэффициент, учитывающий положение передачи относительно горизонтали,

  $k_3 = 1$, когда наклон линии центров звездочек к горизонтали менее 70^0;

  $k_3 = 1{,}25$, когда наклон линии центров звездочек к горизонтали более 70^0.

- k_4 — коэффициент, учитывающий характер регулировки натяжения цепной передачи,

  $k_4 = 1$ в случае, когда регулировка выполняется автоматически;

  $k_4 = 1{,}25$ в случае, когда автоматической регулировки не предусмотрено.

- k_5 — коэффициент учета характера смазки цепной передачи,

  $k_5 = 0{,}8$ в случае, когда обеспечена смазка окунанием;

  $k_5 = 1$ при непрерывной капельной смазке;

  $k_5 = 1{,}5$ при периодической смазке.

- k_n — коэффициент, учитывающий неравномерность нагружения многорядных цепей (таблица 8.2.7).

Таблица 8.2.7. **Коэффициент неравномерности нагружения многорядных цепей k_n**

Число рядов	1	2	3	4
Коэффициент неравномерности k_n	1	1,15	1,25	1,35

Кроме расчета на износ следует выполнить расчет статической и усталостной прочности цепи и зубьев звездочки. Это можно сделать описанными выше (глава 3) методами теории упругости. Отметим, что цепи изготавливаются специализированными предприятиями, которые гарантируют их прочность в течение указанного срока службы. Проверка выполнения условия статической прочности для стандартной цепи имеет вид

$$F_{t\max} \le \frac{Q}{n},$$

где $F_{t\max}$ — наибольшее окружное усилие; $n = 3 \div 5$ — коэффициент запаса прочности.

Раздел 9. ПЕРЕДАТОЧНЫЕ МЕХАНИЗМЫ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

Глава 9.1. Винтовые передачи

Винтовые передачи служат для преобразования вращательного движения винта в осевое поступательное движение гайки, и наоборот. Они с успехом используются и как силовые механизмы (подъемные и грузовые), предназначенные для перемещения груза, и как механизмы управления. В практике проектирования используются *винтовые передачи скольжения* и *винтовые передачи качения*. В первом случае между винтом и гайкой нет промежуточных деталей, а во втором между винтом и гайкой устанавливаются дополнительные детали, которые обеспечивают наличие трения качения между теми элементами передачи, которые участвуют в образовании контакта. К числу винтовых передач качения можно отнести *шарико-винтовую* и *планетарно-винтовую* передачи. Имеются и другие виды винтовых передач, но их применение очень ограничено.

Главным достоинством винтовых передач скольжения является возможность получать с их помощью значительный выигрыш в силе при малых перемещениях (например, в домкратах и других подъемных устройствах, в прессах и т.д.), а также осуществлять плавные и точные перемещения (в различных механизмах точных перемещений, таких как измерительные, установочные, регулировочные и др.). Конструктивно эти передачи довольно просты и в то же время надежны. Кроме того, в них возможно *самоторможение*.

Основной недостаток винтовых передач скольжения — низкий КПД.

Поскольку по техническим характеристикам винтовые передачи качения существенно превосходят передачи скольжения, в настоящее время они применяются более широко. Единственным их недостатком по сравнению с передачами скольжения является высокая себестоимость.

В передачах скольжения для уменьшения трения в основном используется резьба с витками трапецеидального профиля, но в отдельных случаях встречается и треугольная резьба.

Для обеспечения работоспособности *грузовых* винтовых механизмов, таких как подъемники, домкраты, механизмы нагружения прессов и т. п., применяют однозаходную резьбу с малым углом подъема. При значительных односторонних нагрузках используют упорную резьбу.

В механизмах, машинах и приборных устройствах, предназначенных для получения точных осевых перемещений, получили распространение *ходовые винтовые передачи*, которые имеют резьбу трапецеидального профиля, реже прямоугольного, с большим углом подъема резьбы.

Если винтовой механизм используется как установочный или регулировочный, то применяется резьба треугольного профиля с малым шагом.

Общие параметры передачи скольжения. Винтовые передачи скольжения представляют собой механизм, состоящий из винта и гайки (рис. 9.1.1). Винт, вращаясь, вызывает скольжение витков резьбы гайки по винтовой поверхности винта, и гайка перемещается вдоль оси. Возможен обратный вариант, когда вращение винта происходит вследствие осевого перемещения гайки, но при этом КПД передачи

оказывается низким, и на практике такой случай является скорее исключением.

Как отмечалось выше, винтовые передачи скольжения имеют более низкий КПД и повышенный износ по сравнению с винтовыми передачами качения. Для того чтобы снизить скорость износа и повысить КПД, те элементы передачи, которые участвуют в относительном скольжении, следует изготавливать из материалов, обладающих наименьшим значением коэффициента трения и высокой износостойкостью. В этой связи наиболее подходящей является пара сталь—бронза. Винт изготовляется из легированной стали и закаливается по поверхности до твердости $HRC \geq 50$. При этом необходимо обеспечить высокую чистоту обработки поверхности шлифованием. Гайка выполняется из бронзы. При малых окружных скоростях, порядка $v_t \leq 0{,}2$ м/с, допускается использование чугунов, лучше антифрикционных.

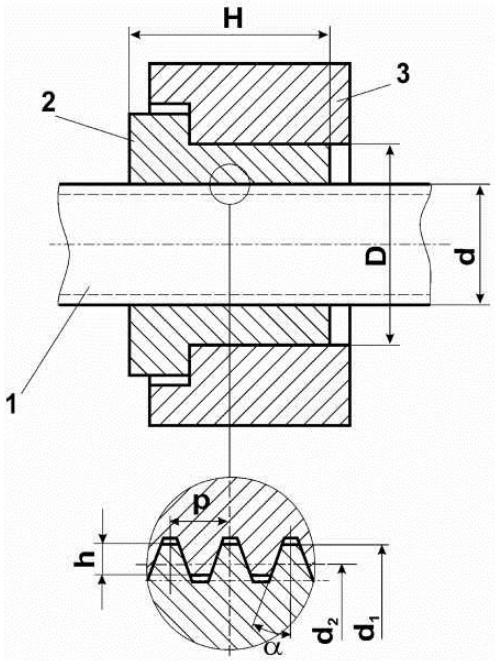


Рис. 9.1.1

Основной причиной выхода передач из строя является износ. Скорость износа можно регулировать соответствующим выбором среднего давления в контакте витков винта и гайки. Для обеспечения удовлетворительной скорости износа величина среднего давления не должна превышать значения допускаемого контактного давления q_a (таблица 9.1.1).

Таблица 9.1.1. **Допускаемое давление в контакте витков винтовых передач по критерию их износостойкости**

Материалы винта и гайки	Допускаемое давление q_a, МПа
Винт — сталь закаленная Гайка — бронза	$10 \div 13$
Винт — сталь незакаленная Гайка — бронза	$8 \div 10$
Винт — сталь незакаленная Гайка — чугун	$6 \div 7$

Для механизмов точных перемещений рекомендуется уменьшить приведенные в таблице значения в два раза.

Проектировочный расчет винтовой передачи скольжения. Для выполнения проектировочного расчета следует установить ряд кинематических соотношений.

Прежде всего определим связь между линейной скоростью перемещения гайки v и угловой скоростью вращения винта ω. С этой целью находим путь, пройденный гайкой в осевом направлении за время dt. Этот путь, равный $ds = vdt$, гайка проходит при повороте винта на угол $d\varphi = \omega\, dt$. Очевидно, что поворот винта на

угол 2π сопровождается перемещением гайки вдоль оси на расстояние pz, где p — шаг резьбы; z — число заходов винта. При вращении винта с постоянной скоростью можно написать $vdt = pz\dfrac{d\varphi}{2\pi}$, откуда

$$v = \omega\frac{pz}{2\pi}. \tag{9.1.1}$$

Поскольку согласно (6.2) $\omega = \dfrac{2\pi n}{60}$, n — частота вращения винта, с учетом (9.1.1) имеем

$$v = \frac{pzn}{60\cdot 10^3}. \tag{9.1.2}$$

Отметим, что при проектировании винтовых передач следует придерживаться следующих рекомендаций: число заходов для самотормозящихся передач равно $z = 1$, для остальных типов передач число заходов равно 1, 2 или 4.

Для расчета момента трения T в резьбе винтовой передачи остается справедливой формула (4.1.5), полученная при рассмотрении резьбовых соединений, а именно

$$T = F_a\frac{d_2}{2}tg(\gamma + \rho'). \tag{9.1.3}$$

Напомним, что здесь d_2 — средний диаметр для наружной резьбы; γ — угол подъема винтовой линии; ρ' — приведенный угол трения, который согласно (4.1.5) равен $\rho' = arctg\dfrac{f}{\cos(\alpha/2)}$, где α — угол профиля резьбы, f — коэффициент трения в контакте винта и гайки.

Формулу (9.1.3) можно использовать для вывода условия самоторможения, если значение угла подъема винтовой линии взять с обратным знаком. Тогда для момента отвинчивания T^0 получаем

$$T^0 = F_a\frac{d_2}{2}tg(-\gamma + \rho') \ge 0. \tag{9.1.4}$$

Условие самоторможения считается выполненным, если

$$\rho' \ge \gamma. \tag{9.1.5}$$

Условие самоторможения (9.1.5) является универсальным и относится не только к передачам, но и к резьбовым соединениям.

Если внешний приложенный момент T представить как произведение окружной силы F_t на плечо L, $T = F_tL$, то отношение окружной силы к осевой можно рассматривать как выигрыш в силе:

$$\frac{F_a}{F_t} = \frac{2L}{d_2tg(\gamma + \rho')}. \tag{9.1.6}$$

Для малых углов γ выигрыш в силе может быть равным 100 и более. Этот факт используется при проектировании различных подъемников, домкратов и других подъемных устройств.

Важной характеристикой винтовой передачи является ее КПД, величина которого может быть определена с помощью выражения (4.1.11),

$$\eta = \frac{tg\gamma}{tg(\gamma + \rho')}. \qquad (9.1.7)$$

Средние значения КПД для передач скольжения $\eta = 0{,}25 \div 0{,}35$. Такое низкое значение говорит о том, что ходовые винтовые передачи скольжения малоэффективны, и их следует заменять винтовыми передачами других типов.

Для вычисления основных геометрических размеров передачи выполняется проектировочный расчет. В его основу положен условный расчет износостойкости пары винт — гайка. Условным такой расчет считается в силу его грубой приближенности. При его выполнении предполагается, что удельные давления в контакте винта и гайки распределены равномерно по поверхности витка и по виткам в целом. Кроме того, считается, что величина интенсивности износа прежде всего зависит от среднего давления q в контакте трущихся поверхностей, в то время как на интенсивность износа влияет большое количество других параметров, которые не принимаются во внимание.

Среднее давление q, возникающее в контакте при приложении осевой силы F_a (наличие других силовых факторов не характерно для передач такого типа), можно рассчитать с помощью условия равновесия. Пусть h — проекция участка высоты витка гайки, который воспринимает внешнее осевое усилие, N — число витков гайки, участвующих в контакте, при условии, что каждый из витков воспринимает одинаковую часть внешней силы (рис. 9.1.1; 1 — винт, 2 — гайка). Ясно, что

$$F_a = q\pi d_2 hN. \qquad (9.1.8)$$

Используя (9.1.8), можно записать *условие износостойкости*, которое по своему физическому смыслу определяет интенсивность износа. Получить приемлемую интенсивность можно, ограничивая среднее давление значением допускаемого давления q_a (см. таблицу 9.1.1). Для записи условия износостойкости введем следующие обозначения: $\psi_H = H / d_2$ — коэффициент высоты гайки; $\zeta = h / p$ — коэффициент рабочей высоты профиля резьбы; H — высота гайки, $H = pN$; h — рабочая высота профиля. Тогда

$$q = \frac{F_a}{\pi\psi_H \zeta d_2^2} \le q_a. \qquad (9.1.9)$$

Значения геометрических коэффициентов ψ_H и ζ рекомендуется выбирать следующим образом: $\psi_H = 1{,}2 \div 2{,}5$ — для неразъемных гаек, $\psi_H = 2{,}5 \div 3{,}5$ — для разъемных; $\zeta = 0{,}5$ — для стандартной резьбы трапецеидального профиля, $\zeta = 0{,}541$ — для резьбы треугольного профиля, $\zeta = 0{,}75$ — для упорной резьбы.

Одним из основных геометрических размеров винтовой передачи является средний диаметр винта d_2, который определяется из (9.1.9),

$$d_2 = \sqrt{\frac{F_a}{\pi \psi_H \zeta q_a}}. \qquad (9.1.10)$$

Полученную величину округляют в бо́льшую сторону до ближайшего значения диаметра из стандартного ряда. Отметим, что формула (9.1.10) является основной для выполнения проектировочного расчета винтовой передачи скольжения. Кроме проектировочного расчета, при определенных условиях необходимо провести ряд других расчетов, например, на статическую и усталостную прочности.

Проверка статической прочности винта. Такая проверка не имеет большого смысла для винтов без осевого отверстия и в основном требуется только в тех случаях, когда такое отверстие предусмотрено для уменьшения веса передачи.

Очевидно, что к телу винта, кроме осевой силы, приложен момент трения в резьбе. Осевая нагрузка приводит к возникновению нормальных напряжений сжатия σ,

$$\sigma = \frac{F_a}{A}, \qquad (9.1.11)$$

а момент трения в резьбе вызывает появление напряжений сдвига τ, наибольшая величина которых равна

$$\tau = \frac{F_a d_2 tg(\gamma + \rho')}{2W_p}, \qquad (9.1.12)$$

где A и W_p — площадь и полярный момент сопротивления опасного поперечного сечения винта соответственно.

Обозначая предел текучести материала винта через σ_{r1} и используя гипотезу наибольших касательных напряжений (глава 2.7), запишем *условие статической прочности винта* в виде

$$\sigma_{e\max} = \sqrt{\left(\sigma^2 + 4\tau^2\right)} \le \sigma_{r1}. \qquad (9.1.13)$$

Менее прочной в большинстве случаев является гайка, наружный диаметр которой D при условии ее сжатия должен удовлетворять неравенству

$$D \ge \sqrt{\frac{4F_a}{\pi\sigma_{r2}} + d^2}. \qquad (9.1.14)$$

Здесь σ_{r2} — предел текучести материала гайки.

Для винтовых передач, ориентированных на длительную работу, необходимо выполнить расчет *усталостной прочности винта* (по методике, описанной в главе 2.10), так как на его витки действуют напряжения, переменные во времени. При этом для повышения точности целесообразно воспользоваться МКЭ. Рекомендованное значение коэффициента запаса усталостной прочности лежит в диапазоне $1{,}3 \div 1{,}5$. Длинные валы следует проверить на устойчивость (глава 2.9). Коэффициент запаса устойчивости, равный отношению критической силы к фактической осевой нагрузке, целесообразно выбирать из промежутка $2{,}5 \div 5{,}0$.

Раздел 10. ДЕТАЛИ ОБЩЕГО НАЗНАЧЕНИЯ

Глава 10.1. Валы и оси

Назначение и геометрия валов и осей. Валы и оси предназначены для размещения вращающихся деталей, таких как зубчатые колеса, шкивы, барабаны и т. д. Вал в отличие от оси передает вращающий момент от одной детали к другой. Среди огромного количества всевозможных деталей валы занимают особое место, потому что, как правило, тяжело нагружены. Это обстоятельство может быть причиной их усталостного разрушения. Объясняется это тем, что в силу конструктивных особенностей валов нагрузка на них знакопеременна. В этой связи к определению геометрических параметров валов следует подходить с особой ответственностью.

В подавляющем большинстве случаев вал — это тело вращения, представляющее собой деталь осесимметричной ступенчатой формы (рис. 10.1.1a—c). Исключение составляют коленчатые валы (рис. 10.1.1d).

На рис. 10.1.1a показан гладкий вал, который в случае отсутствия кручения можно назвать осью. На рис. 10.1.1b изображен вал ступенчатой формы. Такая форма вала упрощает сборку и позволяет более рационально использовать металл за счет уменьшения размеров менее нагруженных участков, обеспечивая принципиальную возможность создания равнопрочных конструкций. На рис. 10.1.1c приведен ступенчатый вал с внутренним отверстием. Внутреннее отверстие облегчает

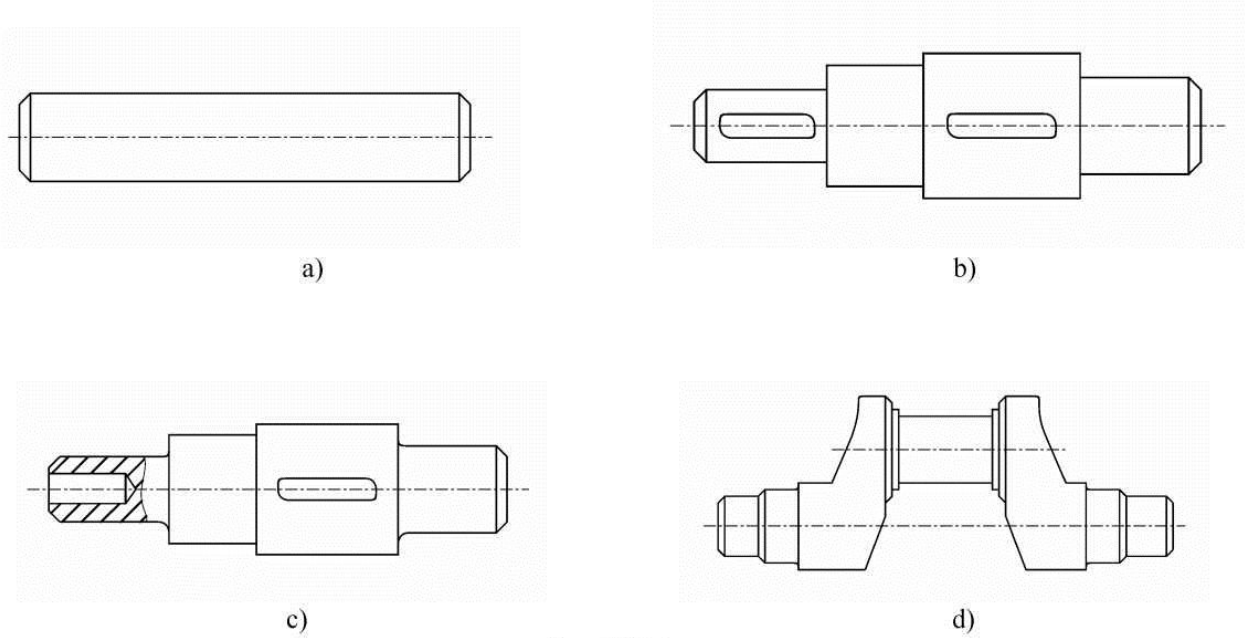


Рис. 10.1.1

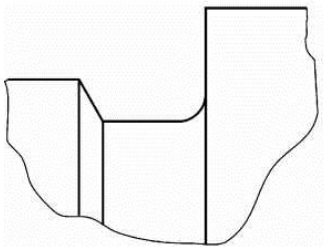


Рис. 10.1.2

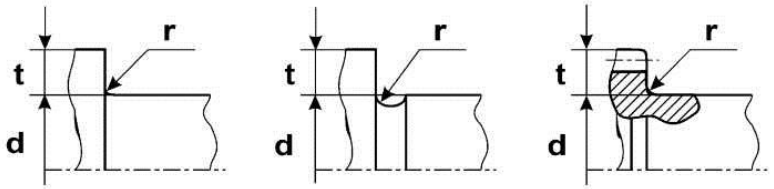


Рис. 10.1.3

конструкцию вала и позволяет обеспечить равный уровень напряжений в каждом из поперечных сечений.

Разумеется, конструкции валов гораздо более разнообразны по сравнению с теми, что показаны на этих рисунках.

Часто на валах нарезаются зубья. Такой вал называется валом-шестерней. Встречаются валы с высокой крутильной податливостью — торсионные валы. Применяются также валы с высокой изгибной податливостью — гибкие валы, и т. д. Длинные валы делаются составными, отдельные участки которых соединены фланцами.

Для изготовления валов используются преимущественно углеродистые и легированные стали, а при высоких нагрузках — титановые сплавы. Выбор материала и его термообработка зависит от требуемых механических характеристик вала. Поверхности валов, как правило, шлифуются, а в отдельных случаях полируются, для чего в местах перепада диаметров размещают технологические канавки для выхода шлифовального круга (рис. 10.1.2).

При проектировании валов следует избегать резких перепадов диаметров и острых углов, так как это приводит к появлению высоких местных напряжений и существенно снижает усталостную прочность. Для уменьшения уровня местных напряжений в местах сопряжения рекомендуется использовать гладкие поверхности, представляющие собой в сечении, например, дуги окружностей (рис. 10.1.3).

Для того чтобы дать заключение о пригодности вала, необходимо выполнить расчеты на:

- статическую прочность;
- сопротивление усталости;
- жесткость;
- виброустойчивость.

Кроме того, для ряда валов в отдельных случаях следует проводить проверку устойчивости, износостойкости и т. д. Все перечисленные расчеты выполняются в виде проверочных, когда по известной геометрии и нагрузкам требуется определить выходные параметры, такие как напряжения, перемещения, коэффициенты запаса статической и усталостной прочности, собственные частоты и формы.

Валы представляют собой детали с высоким уровнем нормальных и касательных напряжений, постоянно изменяющихся во времени. Такой характер внешнего нагружения предъявляет особые требования к изготовлению вала и его установке. На рис. 10.1.4 приведен пример чертежа вала с указанием некоторых характерных технических требований.

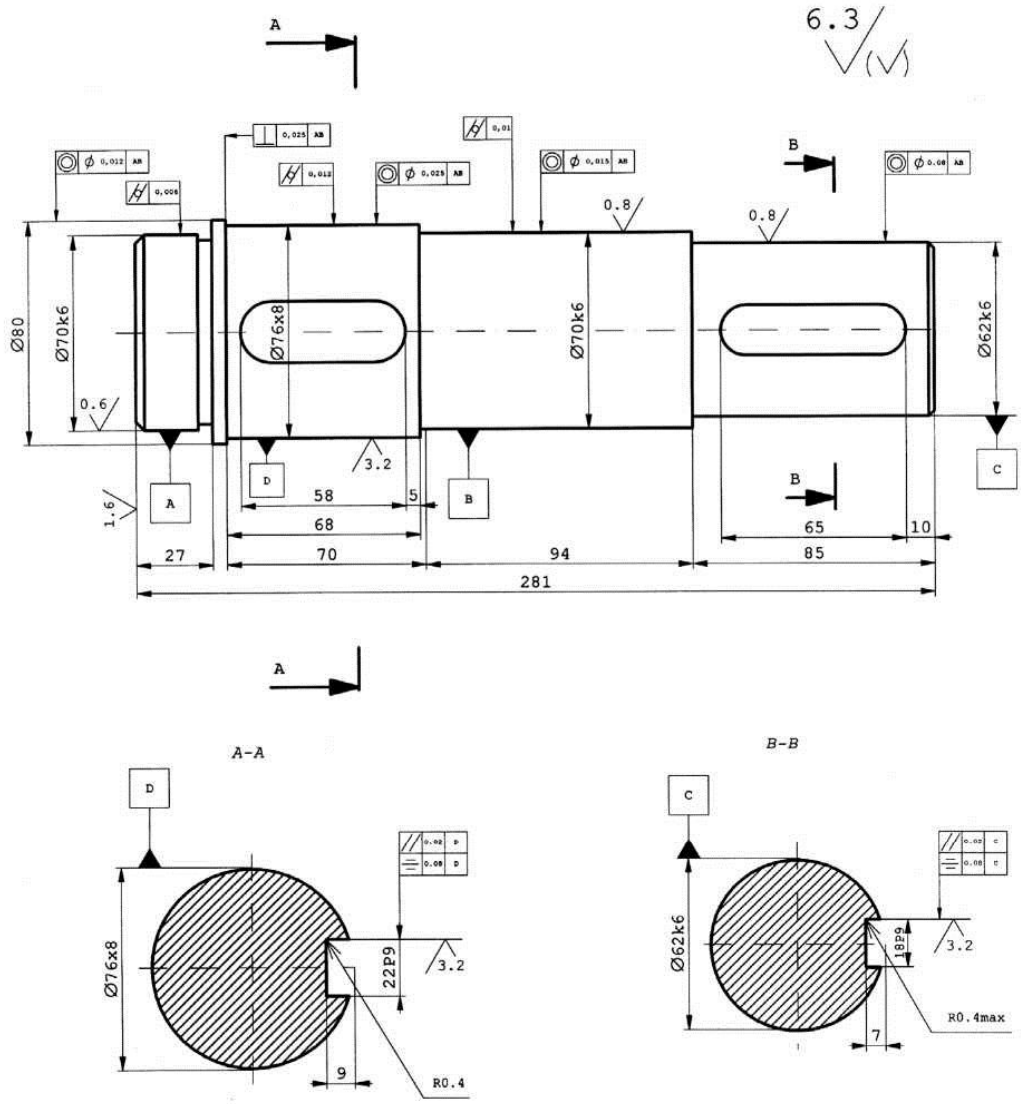


Рис. 10.1.4

Расчет на статическую прочность. Размещенные на валах детали, как правило, находятся под воздействием сосредоточенных или распределенных сил, а также изгибающих и крутящих моментов, которые деформируют вал и вызывают появление внутри него напряжений. Так как при статических расчетах приходится оперировать моделями, то размещенные на валу детали заменяются системой реактивных сил и моментов.

В качестве модели формы будем использовать балки переменного сечения. Опорами валов служат подшипники. Нагрузки в виде системы сосредоточенных и распределенных сил, а также изгибающих и крутящих моментов, должны быть приложены к геометрической оси вала. С этой целью силовые факторы по правилам механики переносятся из точек их фактического приложения в точки, лежащие на оси вала. Реакция подшипника на вал представляется в виде сосредоточенной силы, точка приложения которой лежит в месте пересечения нормали в контакте

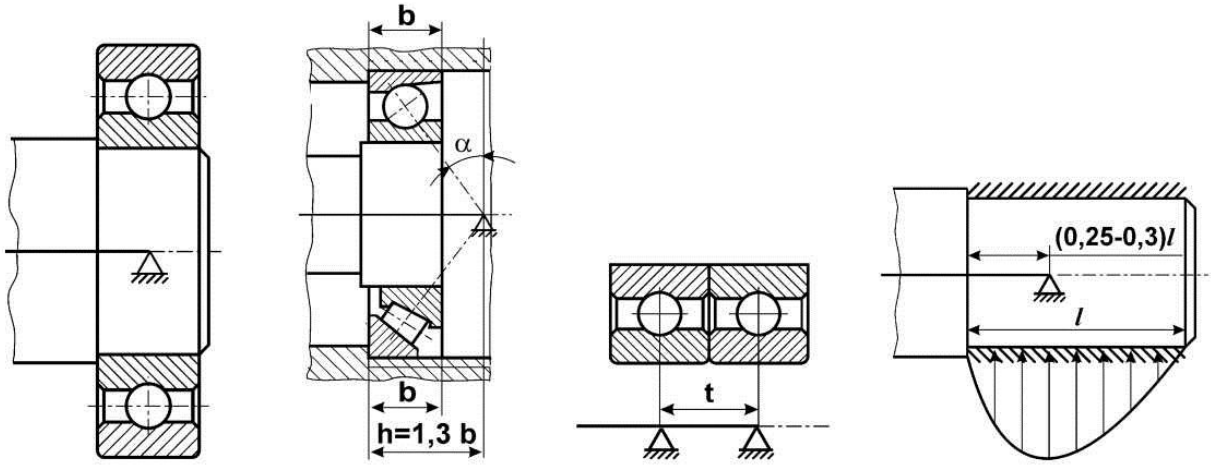


Рис. 10.1.5

тела качения с дорожкой и оси вала (рис. 10.1.5 a—c). Если реакция, действующая на вал со стороны подшипника, распределена вдоль шейки вала по некоторому закону, то точка приложения реакции является точкой приложения результирующей (рис. 10.1.5d).

Пример модели вала с размещенными на нем силовыми факторами приведен на рис. 10.1.6.

Обычно действующие на вал внешние нагрузки не лежат в одной плоскости, поэтому их следует представлять в виде проекций на два взаимно перпендикулярных направления. Выполнив необходимые расчеты для каждой из двух взаимно перпендикулярных плоскостей, окончательный результат можно получить геометрическим сложением составляющих.

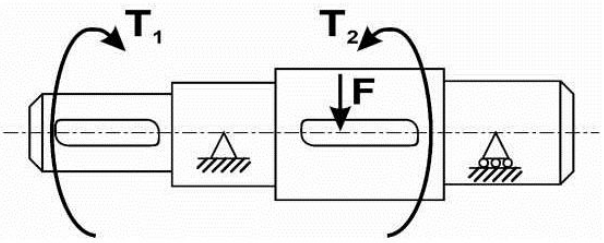


Рис. 10.1.6

Внешние нагрузки вызывают в сечении вала нормальные и касательные напряжения. Нормальные напряжения возникают вследствие изгибающего момента, а касательные — как из-за наличия момента кручения, так и из-за поперечных сил. Последним видом напряжений, в силу их малости, обычно пренебрегают.

Для расчета прочности необходимо знать закон изменения изгибающего M и крутящего T моментов по длине вала. С этой целью строятся эпюры изгибающих $M = M(z)$ и крутящих $T = T(z)$ моментов, где z — координата рассматриваемого поперечного сечения вала. От эпюры моментов можно легко перейти к эпюрам напряжений (см. *раздел 2*) для сплошного круглого сечения диаметром d_z:

$$\sigma_z = \frac{32M(z)}{\pi d_z^3}; \qquad \tau_z = \frac{T(z)}{W_p} = \frac{16T(z)}{\pi d_z^3}, \tag{10.1.1}$$

а от них к эквивалентным напряжениям σ_e в текущем сечении. Здесь под нормальными и касательными напряжениями понимаются наибольшие напряжения в сечении.

Согласно теории прочности по наибольшим касательным напряжениям, эквивалентное напряжение в текущем сечении равно

$$\sigma_e = \sqrt{\sigma_z^2 + 4\tau_z^2}\,. \qquad (10.1.2)$$

Расчет статической прочности сводится к определению коэффициента запаса для наиболее неблагоприятного случая. С этой целью необходимо определить совокупность эквивалентных напряжений по длине вала и выбрать из нее наибольшее значение:

$$\sigma_{e_{\max}} = \max\{\sigma_{e1}, \sigma_{e2}, \ldots, \sigma_{en}\}.$$

Тогда запас прочности по текучести n_τ:

$$n_\tau = \frac{\sigma_\tau}{\sigma_{e\max}}, \qquad (10.1.3)$$

где σ_τ — предел текучести материала вала. Значение коэффициента запаса статической прочности не должно быть больше $n_\tau \geq 1{,}3 \div 1{,}5$.

Расчет валов на сопротивление усталости. Этот расчет проводится по методике, описанной в главе 2.10. Зависимость напряжений во времени описывается синусоидальным законом, так как при вращении вала через каждые пол-оборота происходит изменение знака напряжений изгиба. Такой характер изменения напряжений может привести к усталостному разрушению вала. Практика показывает, что оно является основным видом разрушения для валов. Как было показано в главе 2.10, значения коэффициентов запаса можно определить из (2.10.20):

$$n_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{K\sigma_{am} + \sigma_m\psi_\sigma} = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_e}; \qquad n_\tau = \frac{\tau_{-1}}{K\tau_{am} + \tau_m\psi_\tau} = \frac{\tau_{-1}}{\tau_e}, \qquad (10.1.4)$$

где коэффициенты снижения предела выносливости рассчитываются по формулам (2.10.18) и учитывают влияние местных напряжений, линейных размеров, чистоты обработки поверхности и других параметров на величину запаса по усталостной прочности. Под местными напряжениями понимаются резкие скачки напряжений внутри небольшого объема, вызванные изменениями формы детали. Такие изменения могут быть следствием наличия местных концентраторов.

При расчете валов принимается:

$$\sigma_{am} = \sigma_z; \qquad \sigma_m = 0; \qquad \tau_{am} = \tau_m = \tau/2,$$

где σ_z и τ_z задаются соотношением (10.1.1). Странные на первый взгляд рекомендации по выбору касательных напряжений τ_{am} и τ_m можно объяснить тем, что для вала характерно два возможных напряженных состояния: с передачей момента вращения и без передачи. По этой причине напряжение изменяется в пределах от 0 до τ_z.

В общем случае при расчете коэффициентов снижения предела выносливости используются зависимости (2.10.18), которые имеют вид:

- при действии нормальных напряжений —

$$K = \left(\frac{K_\sigma}{K_{d\sigma}} + \frac{1}{K_{F\sigma}} - 1 \right) \frac{1}{K_V}; \qquad (10.1.5)$$

- при действии касательных напряжений —

$$K = \left(\frac{K_\tau}{K_{d\tau}} + \frac{1}{K_{F\tau}} - 1 \right) \frac{1}{K_V}. \qquad (10.1.6)$$

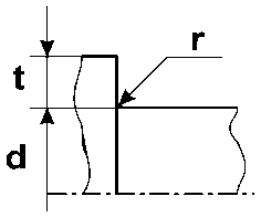


Рис. 10.1.7

Значения эффективных коэффициентов концентрации приведены в таблицах 10.1.1—10.1.2. Коэффициент влияния состояния поверхности K_V (табл. 10.1.3) учитывает зависимость усталостной прочности от использования некоторых видов термической, химико-термической и механической обработки поверхностных слоев.

Можно заметить, однако, что по мере увеличения диаметра вала эффективность дополнительной обработки поверхности снижается.

Таблица 10.1.1. **Эффективные коэффициенты концентрации напряжений в ступенчатом переходе с галтелью**

t/r	r/d	K_σ при σ_b, МПа				K_τ при σ_b, МПа			
		500	700	900	1200	500	700	900	1200
1	0,01	1,35	1,4	1,45	1,5	1,3	1,3	1,3	1,3
	0,02	1,45	1,5	1,55	1,6	1,35	1,35	1,4	1,4
	0,03	1,65	1,7	1,8	1,9	1,4	1,45	1,45	1,5
	0,05	1,6	1,7	1,8	1,95	1,45	1,45	1,5	1,55
	0,010	1,45	1,55	1,65	1,85	1,4	1,4	1,45	1,5
2	0,01	1,55	1,6	1,65	1,7	1,4	1,4	1,45	1,45
	0,02	1,8	1,9	2,0	2,15	1,55	1,6	1,65	1,7
	0,03	1,8	1,95	2,05	2,25	1,55	1,6	1,65	1,7
	0,05	1,75	1,9	2,0	2,2	1,55	1,6	1,65	1,75
3	0.01	1,9	2.0	2,1	2,2	1,55	1,6	1.65	1,75
	0.02	1.95	2,1	2,2	2,4	1,6	1,7	1.75	1.85
	0.03	1.95	2,1	2.25	2,45	1,65	1,7	1.75	1,9
5	0,01	2,1	2,25	2,35	2,50	2,2	2,3	2,4	2,6
	0,02	2,15	2,3	2.45	2,65	2,1	2,15	2,25	2,4

Обозначения, используемые в таблице, пояснены на рис. 10.1.7.

Таблица 10.1.2. **Эффективные коэффициенты концентрации напряжений при изгибе и кручении валов для различных концентраторов**

σ_b, МПа	Шлицы		Шпоночная канавка		Резьба		Поперечное отверстие	
	K_σ	K_τ *	K_σ **	K_τ	K_σ	K_τ	K_σ ***	K_τ
600	1,55	2,36/1,46	1,46/1,76	1,54	1,96	1,54	2,05/1,85	1,80
800	1,65	2,55/1,58	1,62/2,01	1,88	2,20	1,71	2,10/1,90	1,95
1000	1,72	2,70/1,58	1,77/2,26	2,22	2,61	2,22	2,20/2,00	1,90
1200	1,75	2,80/1,60	1,92/2,50	2,39	2,90	2,39	2,30/2,10	2,00

* В числителе приведены значения коэффициента K_τ для валов с прямобочными шлицами, а в знаменателе — с эвольвентными.

** В числителе указаны значения коэффициента K_σ для канавок, полученных пальцевой фрезой, в знаменателе — дисковой.

*** В числителе приведены значения коэффициента K_σ для валов при диаметре отверстия $a = (0{,}05 \div 0{,}15)d$, в знаменателе — при $a = (0{,}15 \div 0{,}25)d$.

Таблица 10.1.3. **Коэффициент упрочнения K_V**

Вид обработки поверхности	σ_b (сердцевина), МПа	Значение K_V для валов		
		гладких	$\alpha_c = 1{,}8 \div 2$	$\alpha_c = 1{,}8 \div 2$
Точение и шлифование	800—1200	1,1—1,2	—	—
Закалка с нагревом ТВЧ	600—800 800—1200	1,5—1,7 1,3—1,5	1,6—1,7 —	2,4—2,8 —
Азотирование	900—1200 700—800	1,1—1,25 1,4—1,5	1,5—1,7 —	1,7—2,1 —
Цементация	1000—1200	1,2—1,3	2	—
Дробеструйная обработка	600—1500	1,1—1,25	1,5—1,6	1,7—2,1
Обработка роликом	600—1500	1,2—1,3	1,5—1,6	1,8—2,0

Примечание. Напомним, что α_c — теоретический коэффициент концентрации напряжений (см. формулу (2.10.11)).

Коэффициенты влияния абсолютных размеров $K_{d\sigma}$ и $K_{d\tau}$ рекомендуется вычислять по формулам

$$K_{d\sigma} = 0{,}5\left[1 + \left(\frac{d}{7{,}5}\right)^{2\nu_\sigma}\right]; \qquad K_{d\tau} = 0{,}5\left[1 + \left(\frac{d}{7{,}5}\right)^{-2\nu_\tau}\right], \qquad (10.1.7)$$

где

$$\nu_\sigma = 0{,}19 - 0{,}000125\sigma_b\,; \qquad \nu_\tau = 1{,}5\nu_\sigma\,. \tag{10.1.8}$$

Коэффициенты влияния качества поверхности $K_{F\sigma}$ и $K_{F\tau}$ задаются выражениями (2.10.15).

Общий запас усталостной прочности n рассчитывается по формуле (2.10.27),

$$\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n_\sigma^2} + \frac{1}{n_\tau^2}\,.$$

Усталостная прочность считается удовлетворительной, если выполняется условие $1{,}5 \le n \le 2{,}5$. Расчетный запас прочности определяется для наиболее опасного сечения. Полученные значения коэффициентов запаса соответствуют области длительной прочности кривой выносливости, т. е. значениям $N \ge N_G$. В этой области усталостное разрушение считается недопустимым.

Кроме этого, можно выполнить расчет на выносливость, при котором определяется время работы вала до его усталостного разрушения при постоянном или переменном режимах нагружения. Такой расчет проводится по методике, описанной в главе 2.10.

Существуют, кроме того, инструменты автоматизированного расчета, которые существенно облегчают процедуру проектирования валов и осей.

Жесткость валов. К отдельным конструкциям валов предъявляются особые требования по жесткости, так как неудовлетворительная жесткость может неблагоприятно сказываться на работе связанных с валами деталей: зубчатых колес, передач, подшипников, шлицевых соединений, муфт и других элементов. Важными характеристиками, влияющими на жесткость валов, являются смещения, углы наклона сечений и углы закручивания, вызванные деформациями. В этой связи жесткость условно разделяется на поперечную и крутильную.

Допустимые упругие перемещения (прогибы и углы поворота) сечений вала зависят от конкретной конструкции и особенностей ее работы, следовательно, общий подход здесь нецелесообразен. Допустимые значения углов поворота сечения вала (в радианах) в местах расположения различных типов подшипников приведены в таблице 10.1.4.

Таблица 10.1.4. **Допустимые углы поворота сечения вала**

Типы подшипников	Допустимый угол поворота сечения
качения	
шариковые однорядные	0,0050
шариковые сферические	0,0500
роликовые цилиндрические	0,0025
роликовые конические	0,0016
скольжения	0,0010

Экспериментально установлено, что для снижения коэффициента концентрации нагрузки максимальный прогиб валов, несущих зубчатые колеса, не должен

быть более (0,0002 — 0,0003)l, где l — расстояние между опорами, а допустимый прогиб под колесами не должен превышать $0{,}01m$ для цилиндрических, конических, глобоидных и гипоидных передач (m — модуль зацепления).

Очевидно, что приведенные выше рекомендации подходят только для проведения грубой оценки, так как более точное решение оказывается возможным при учете сопряженных с валом элементов

Обычно крутильная жесткость вала не играет существенной роли и не контролируется. Существуют общие рекомендации, согласно которым величина угла закручивания не должна превышать четверти градуса на длине 1 м. Если к жесткости вала предъявляются иные требования, то это необходимо предусматривать особо.

Исследование жесткости связано с расчетом величин смещений оси вала. В этом случае вал моделируется балкой переменного сечения, которая может быть рассчитана, например, методом сил (см. гл. 2.6).

Глава 10.2. **Упругие элементы машин**

Общие сведения и классификация. Упругими элементами называют детали высокой податливости, которые накапливают энергию деформации и либо используют ее в исполнительных механизмах, либо рассеивают в демпферах или амортизаторах. Упругие элементы изготавливаются из специальных сталей и сплавов, а в отдельных случаях — из неметаллических материалов. Так как неметаллические материалы применяются редко, то их использование в качестве упругих элементов здесь подробно рассматриваться не будет.

Наиболее распространенными металлическими упругими элементами являются пружины, которые в зависимости от назначения бывают следующих видов:

- сжатия (рис. 10.2.1a);
- растяжения (рис. 10.2.1b);
- кручения (рис. 10.2.1c);
- изгиба (рис. 10.2.1d).

В зависимости от формы пружины подразделяются в основном на *цилиндрические* (рис. 10.2.1a,b,c) и *конические* (рис. 10.2.1e). Встречаются также пружины в виде пластин, спиралей, оболочек и т.д. Наибольшее распространение получили

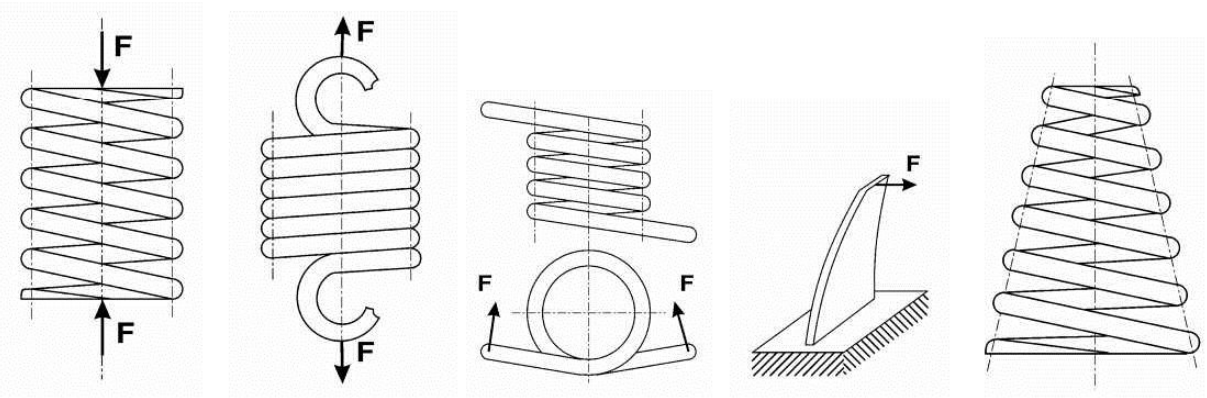


Рис. 10.2.1

пружины цилиндрической формы, которые изготавливаются из проволоки круглого, реже прямоугольного либо квадратного поперечного сечения. Цилиндрическая пружина, например, получается в результате навивки проволоки на цилиндрическую оправку.

Материалы, применяемые для изготовления металлических упругих элементов. Металлические пружины производятся из углеродистых и легированных сталей с содержанием углерода $(0{,}5 \div 1{,}1)\%$ (табл. 10.2.1). Углеродистые стали применяются для изготовления пружин, диаметр проволоки которых не превышает 10 мм, а легированные — для пружин, работающих в условиях переменных во времени высоких напряжений, а также в случаях, если диаметр проволоки пружины

более 10 мм. Легированные пружинные стали могут содержать в качестве легирующих следующие элементы:

- Si — 0,5 ÷ 2,8% ;
- Mn — 0,6 ÷ 1,20% ;
- Cr — 0,2 ÷ 1,20% ;
- V — 0,1 ÷ 0,25% ;
- W — 0,8 ÷ 1,20% ;
- Ni — 1,4 ÷ 1,70% .

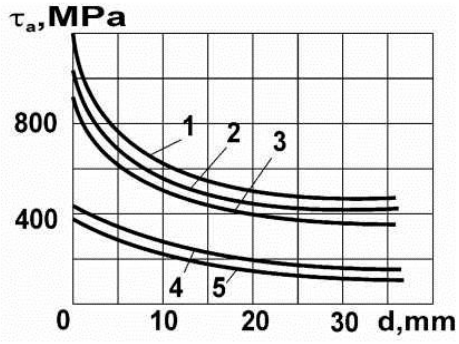


Рис. 10.2.2

1 — вольфрамовая и рояльная сталь;
2 — хромо-ванадиевая термообработанная сталь;
3 — углеродистая, закаленная в масле сталь;
4 — фосфорная бронза;
5 — проволока из специальной латуни.

Добавки кремния Si (до 2%) улучшают упругие свойства материала проволоки, что в конечном итоге повышает вероятность неразрушения при переменных во времени и ударных нагрузках. Стали, предназначенные для производства работающих при переменных нагрузках пружин, легируют также добавками Ni. Наиболее высокими механическими свойствами обладают стали, легированные вольфрамом W и кремнием Si, а также вольфрамом W, кремнием Si и ванадием V. Эти сплавы к тому же термостойки и способны сохранять механические свойства при высоких температурах.

Таблица 10.2.1. **Основные механические характеристики наиболее распространенных материалов упругих пружин**

Материал	Предел прочности на растяжение σ_b, МПа	Предел прочности сдвига τ_s, МПа
Углеродистые стали	1000÷1150	800÷1000
Рояльная проволока	2000÷3000	1200÷1800
Холоднокатаная пружинная проволока	1000÷2800	600÷1600
Марганцовистая сталь	650÷700	350÷400
Хромо-ванадиевая сталь	1300	1100
Коррозийно-стойкая сталь	1100	800
Кремнистые стали	1300÷1800	1200÷1600
Хромо-марганцовистая сталь	1300	1200
Сталь, легированная никелем и кремнием	1800	1600
Сталь, легированная вольфрамом и кремнием	1900	1700
Сталь, легированная вольфрамом, кремнием и ванадием	1900	1700

Механические свойства пружинных сталей в сильной степени зависят от размеров поперечного сечения проволоки. Допускаемые напряжения при этом могут раз-

личаться в два и большее число раз. С целью учета последнего обстоятельства следует привлекать дополнительные данные, уточняющие механические свойства в зависимости от марки материала и диаметра проволоки пружины (рис. 10.2.2).

Таблица 10.2.2. **Основные механические характеристики антикоррозийных материалов на основе медных сплавов**

Материал	Предел прочности на растяжение σ_b, МПа	Предел прочности сдвига τ_s, МПа
Оловянисто-цинковая бронза	800÷900	500÷550
Кремниево-марганцовистая бронза	800÷900	500÷550
Бериллиевая бронза	800÷1000	500÷600

Для работы в условиях сильной влажности и в агрессивных средах применяются антикоррозийные материалы на основе медных сплавов, механические характеристики которых приведены в таблице 10.2.2.

Выбор допускаемых напряжений для пружин зависит от характера разрушения. Основной причиной разрушения пружин сжатия и растяжения является высокий уровень касательных напряжений. Величина допускаемого напряжения на сдвиг τ_a рассчитывается как

$$\tau_a = \frac{\tau_s}{n},$$

где τ_s — предел прочности сдвига; n — коэффициент запаса статической прочности. В свою очередь выбор коэффициента запаса определяется назначением пружины и характером приложения внешних сил. Поскольку предел прочности сдвига τ_s связан с величиной предела прочности на растяжение σ_b, то расчет величины допускаемого напряжения на сдвиг следует проводить по одной из следующих формул:

1. $\tau_a = (0{,}25 \div 0{,}3)\sigma_b$ — если на пружину действует переменная во времени нагрузка с числом циклов нагружения $N \geq 10^7$;
2. $\tau_a = (0{,}45 \div 0{,}50)\sigma_b$ — нагрузка на пружину ограничена числом циклов в пределах $2 \cdot 10^3 < N < 10^7$;
3. $\tau_a = 0{,}6\sigma_b$ — если пружина нагружена статической нагрузкой, постоянной либо плавно переменной с малым числом циклов нагружения $N \leq 2 \cdot 10^3$.

Это обстоятельство даст основание разделить пружины в зависимости от условий работы на три класса: 1-й, 2-й и 3-й.

Для пружин, прочность которых определяется нормальными напряжениями при изгибе, допускаемые напряжения σ_a рекомендуется рассчитывать как

$$\sigma_a = \frac{\sigma_b}{n} = 1{,}25\tau_a.$$

Приведенные выше рекомендации по выбору напряжения сдвига позволяют свести расчет усталостной прочности к расчету статической прочности с более низким уровнем допускаемых напряжений. Универсальные методы прогнозирования допустимого числа циклов нагружения до разрушения пружины здесь также справедливы (методика расчета приведена в конце этой главы).

Методы и критерии расчета упругих элементов машин. Пружины сжатия и растяжения круглого поперечного сечения. Пружины сжатия и растяжения этого типа целесообразно рассматривать совместно, так как методы их расчета одинаковы, за исключением некоторых рассмотренных ниже особенностей.

Причиной разрушения таких пружин при статическом осевом нагружении являются касательные напряжения. Внешняя осевая сила F (сила растяжения-сжатия, приложенная к оси пружины) на плече, равном радиусу пружины, создает момент T,

$$T = 0{,}5\,FD,$$

где D — средний диаметр пружины (рис 10.2.3).

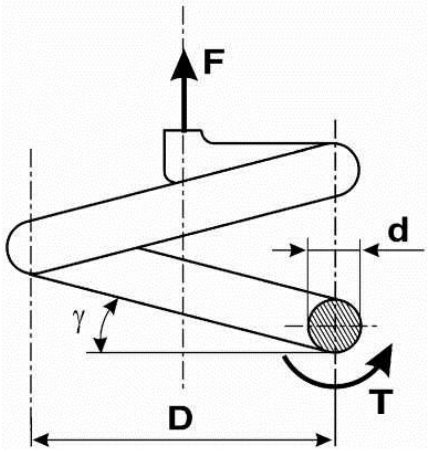


Рис. 10.2.3

Возникающий при этом момент кручения вызывает в поперечном сечении круглой проволоки пружины напряжение сдвига τ, равное согласно (2.4.49)

$$\tau = \frac{T}{W_p} = \frac{8FD}{\pi d^3}, \qquad (10.2.1)$$

где $W_p = \pi d^3 / 16$ — полярный момент сопротивления круглого сечения (2.4.27), d — диаметр поперечного сечения проволоки.

Формулу (10.2.1) можно уточнить, если принять во внимание то обстоятельство, что нормаль к поверхности витка расположена под углом γ (γ — угол подъема винтовой линии) относительно оси, таким что $tg\gamma = \frac{t}{\pi D}$, где t — шаг пружины. С учетом этой поправки и выражения (10.2.1) условие прочности на сдвиг может быть записано в виде

$$\tau = k\frac{8FD}{\pi d^3} \le \tau_a, \qquad (10.2.2)$$

где k — некоторый поправочный коэффициент.

Если угол подъема γ лежит в пределах $\gamma = (6 \div 12)^0$, то значение поправочного коэффициента рассчитывается как

$$k = \frac{4C+2}{4C-3},$$

где величина $C = D/d$ называется индексом пружины (табл. 10.2.3).

Таблица 10.2.3. **Индекс пружины С**

d, мм	1÷2,5	3÷5	6÷10
C	5÷12	4÷12	4÷9

При больших диаметрах следует несколько снижать верхнюю границу индекса пружины. При $C \le 4$ в наружных волокнах витков пружины могут появиться разрывы и участки пластичности из-за большой кривизны, поэтому пружины с такими значениями индекса использовать нецелесообразно.

При проектировании пружины необходимо определить ее геометрические размеры по известной нагрузке и заданной величине осевого смещения (*осадке*). Чаще всего по результатам расчета на прочность определяется величина диаметра проволоки, которую можно выразить из (10.2.2):

$$d \ge \sqrt[3]{\frac{8kFD}{\pi\tau_a}}. \qquad (10.2.3)$$

В некоторых случаях по результатам проектировочного расчета определяется диаметр пружины для заданного значения диаметра проволоки:

$$D \le \frac{\pi\tau_a d^3}{8kF}.$$

Величина осевой осадки пружины при заданном числе n участвующих в деформации витков определяется суммой деформаций отдельных витков, каждый из которых представляется как брус большой кривизны. Осадка δ (рис. 10.2.4) рассчитывается по формуле (2.4.48):

$$\delta = \frac{8FD^3 n}{Gd^4}, \qquad (10.2.4)$$

где $G = \dfrac{E}{2(1+\mu)}$ — модуль упругости при сдвиге.

Здесь следует отметить, что различают число рабочих витков n, число опорных витков n_2 (которые не участвуют в процессе деформации, а обеспечивают надежную фиксацию пружины) и чисто срезанных витков n_3, которые срезаются для того, чтобы опорная поверхность была плоской. Рекомендованное значение числа опорных витков $n_2 = 1{,}5 \div 3$. Очевидно, что полное число витков n_1 равно

$$n_1 = n + n_2.$$

В случае, если при проектировочном расчете требуется определить число витков, обеспечивающих заданное значение осадки пружины, из (10.2.4) находим:

$$n = \frac{Gd^4\delta}{8FD^3}. \qquad (10.2.5)$$

Таким образом, диаметр проволоки определяется из условия статической прочности (10.2.2), а количество витков рассчитывается из условия обеспечения требуемой осадки (10.2.5).

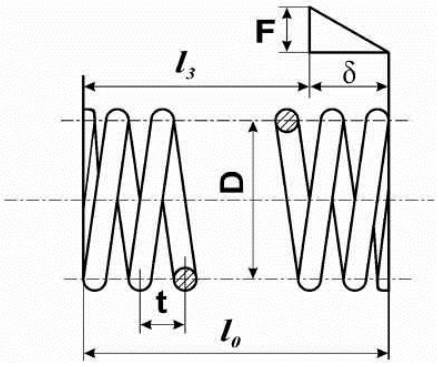


Рис. 10.2.4

В пружинах, работающих в реальных условиях эксплуатации, могут возникать следующие нагрузки: сила предварительной деформации F_1 (ей соответствует осадка δ_{F1}), сила при рабочей деформации F_2 с осадкой δ_{F2} и сила при максимальной деформации (полном сжатии) F_3, когда в результате деформирования δ_{F3} полностью «выбирается» зазор между витками. Для осадки пружины, функционирующей в условиях предварительного деформирования, при рабочей нагрузке с учетом введенных выше обозначений и (10.2.4) получаем

$$\delta = \delta_{F2} - \delta_{F1}.$$

Статический расчет пружины заканчивается определением ее геометрических размеров, т. е. проектировочным расчетом. Геометрия *пружин сжатия* рассчитывается следующим образом (рис. 10.2.4):

Длина пружины в сжатом состоянии $l_3 = (n_1 + 1 - n_3)d$.

Длина пружины в свободном состоянии $l_0 = l_3 + \delta_{F3}$.

Длина пружины при предварительной деформации $l_1 = l_0 - \delta_{F1}$.

Длина пружины при рабочей деформации $l_2 = l_0 - \delta_{F2}$.

Шаг пружины в нагруженном состоянии $t_2 = d + \delta / n$.

Шаг пружины в свободном состоянии (без нагрузки) $t = d + \delta_{F3} / n$.

Длина развертки пружины $L = \pi D\left(\dfrac{n}{\cos\alpha} + n_2\right)$.

Абсолютное значение зазора между витками при приложении рабочей нагрузки (сжатии витков), или минимально допустимый зазор $s = (0{,}1 \div 0{,}15)d$.

Определить длину заготовки L_0 можно, увеличив длину развертки пружины на $5 \div 10\%$ по отношению к расчетной, для того чтобы учесть неизбежные технологические отходы. Тогда

$$L_0 = (1{,}05 \div 1{,}1)L.$$

Кроме проектировочного расчета можно выполнить также и проверочный расчет, при котором по известной геометрии пружины определяются величины напряжений и деформаций.

Характерной особенностью пружин сжатия является их способность к потере устойчивости при большой длине, поэтому проверка наличия устойчивости пружины является обязательной. Под потерей устойчивости понимают «выпучивание» пружины в сторону. Возникновение выпучивания зависит от степени параллельности торцев и наличия направляющих элементов. У пружин со строго центральным нагружением и хорошо обработанными торцами область устойчивости описывается условием $l_0 / D \le 5$. Для пружин с шарнирно установленными центрирующими элементами условие принимает вид $l_0 / D \le 2{,}5$. В случае возможного нецентрального нагружения это отношение уменьшают в $1{,}5 \div 2$ раза. Отсюда следует, что длинные пружины сжатия применять нецелесообразно из-за возможной потери устойчивости. Если по конструктивным соображениям все-таки необходимо использовать длинную пружину, то лучше, если она будет составной, т. е. состоять из набора коротких пружин. Кроме этого, для обеспечения устойчивости проводятся специальные конструктивные мероприятия.

Особенности геометрии пружин *растяжения* будут рассмотрены далее.

Расчет составных пружин. В ряде случаев используют пружинный узел, когда меньшая по диаметру пружина (первая) диаметром D_1 устанавливается внутри наружной (второй) с диаметром D_2 (рис. 10.2.5). При этом внешняя осевая сила F, приложенная к узлу, складывается из нагрузок, действующих на каждую из пружин: $F = F' + F''$.

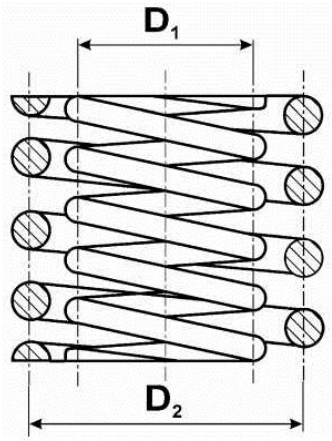


Рис. 10.2.5

Условие совместности деформаций в таком случае имеет вид $\delta_1 = \delta_2$, или

$$\delta = \frac{8FD^3 n}{Gd^4}.$$

Тогда нагрузка, действующая на внутреннюю пружину, в соответствии с условием совместности перемещений определяется выражением

$$F' = \frac{F}{\dfrac{D_1^3 n_1 d_2^4}{D_2^3 n_2 d_1^4} + 1},$$

а сила, действующая на наружную пружину, равна $F'' = F - F'$.

Расчет составных пружин выполняется в форме проверочного по методике, описанной выше для отдельной пружины. Можно показать, что для обеспечения *равнопрочности* следует соблюдать условие $n_1 d_1 = n_2 d_2 = \ldots = n_i d_i$, где i — количество пружин в узле. Под равнопрочностью понимается условие, при котором каждая из пружин имеет одинаковый уровень максимальных напряжений.

Пружины с витками квадратного поперечного сечения. Пружины квадратного и прямоугольного сечений в практике проектирования применяются гораздо реже, чем пружины круглого сечения. Тем не менее они нашли свое место в конструкциях машин в силу того, что обладают более высокой прочностью, обусловлен-

ной несколько меньшей осадкой по сравнению с пружинами круглого поперечного сечения аналогичных размеров.

Методика и порядок проектировочного расчета пружин квадратного и круглого сечений аналогичны.

Условие прочности для витка квадратного поперечного сечения аналогично (10.2.2) записывается в виде

$$\tau = \frac{2{,}4kFD}{a^3} \le \tau_a , \qquad (10.2.6)$$

где a — сторона квадрата сечения проволоки пружины; τ_a — допускаемое напряжение сдвига.

Среднее значение поправочного коэффициента k лежит в пределах $k = 1{,}1 \div 1{,}2$, что можно использовать в качестве приближения для аналитического расчета пружины.

Величина индекса пружины квадратного поперечного сечения не должна выходить за пределы, рекомендуемые для аналогичных пружин круглого сечения.

Из условия прочности (10.2.6) в результате проектировочного расчета определяется либо сторона квадрата сечения проволоки пружины

$$a \ge \sqrt[3]{\frac{2{,}4kFD}{\tau_a}} , \qquad (10.2.7)$$

либо диаметр пружины

$$D \le \frac{\tau_a a^3}{2{,}4kF} .$$

Если в деформации участвуют n витков, то величина осевой осадки пружины квадратного сечения, рассматриваемой как брус большой кривизны, находится по формуле

$$\delta = \frac{5{,}57FD^3 n}{Ga^4} . \qquad (10.2.8)$$

Количество витков, обеспечивающих заданное значение осадки пружины, определяется из (10.2.8) как

$$n = \frac{G\delta a^4}{5{,}57FD^3} . \qquad (10.2.9)$$

Расчет геометрических размеров пружин сжатия квадратного сечения проводится точно таким же образом, как и пружин сжатия круглого сечения, с той лишь разницей, что вместо диаметра поперечного сечения проволоки d в расчетные зависимости подставляется сторона квадрата a.

Тогда

Длина пружины в сжатом состоянии $l_3 = (n_1 + 1 - n_3)a .$

Длина пружины в свободном состоянии $l_0 = l_3 + \delta_{F3} .$

Шаг пружины в свободном состоянии
(без нагрузки) $$t = d + \delta_{F3} / n .$$

Длина заготовки пружины $$L_0 = (1{,}05 \div 1{,}1)\pi D\left(\frac{n}{\cos\alpha} + n_2\right).$$

Абсолютное значение зазора в состоянии сжатия (минимально допустимый зазор) $$s = (0{,}1 \div 0{,}15)a$$

Остальные формулы для геометрии пружин квадратного поперечного сечения также можно записать по аналогии с формулами, полученными для пружин круглого поперечного сечения.

Проверка на устойчивость пружин квадратного сечения проводится так же, как и для пружин круглого сечения.

Особенности расчета пружин растяжения. Пружины растяжения навиваются таким образом, что в исходном состоянии зазор между витками отсутствует. Кроме того, для пружин такого типа не характерна потеря устойчивости. В отличие от пружин сжатия пружины растяжения имеют места крепления (зацепы). Наличие зацепов приводит к тому, что помимо основных напряжений возникают дополнительные напряжения изгиба, которые проявляются в случае нагружения переменной нагрузкой. Следовательно, при таком режиме работы использование пружин этого типа нецелесообразно. Статический и геометрический расчеты пружин растяжения выполняются по тем же зависимостям, что и расчеты пружин сжатия, за исключением расчета длин. Длины пружин растяжения в различных состояниях могут быть вычислены следующим образом (рис. 10.2.6):

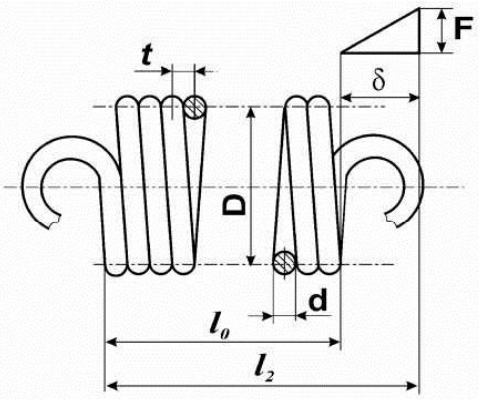


Рис. 10.2.6

Длина пружины круглого сечения в свободном состоянии $$l_0 = (n+1)d .$$

Длина пружины квадратного сечения в свободном состоянии $$l_0 = (n+1)a .$$

Длина пружины при рабочей деформации $$l_2 = l_0 + \delta_{F1} .$$

Длина развертки пружины $$L = \pi D\left(\frac{n}{\cos\alpha}\right) + l_h ,$$

где $l_h \cong 20$ мм — развернутая длина зацепов.

Длина заготовки пружины L_0 $$L_0 = 1{,}07L .$$

Пружины кручения. Пружины кручения совершают работу за счет энергии, полученной от предварительного закручивания. Сила F_t, приложенная к пружине и вызывающая внешний момент вращения T, приводит к появлению в поперечном сечении проволоки изгибающего момента $M = M_{nx} \equiv T$ (рис. 2.6.3), максимальное значение которого равно

$$T = 0{,}5\, F_t D\,.$$

При условии пренебрежения углом наклона витка величина напряжений, вызванных изгибом, согласно (2.6.28) определяется выражением

$$\sigma_F = \frac{T}{W_a},$$

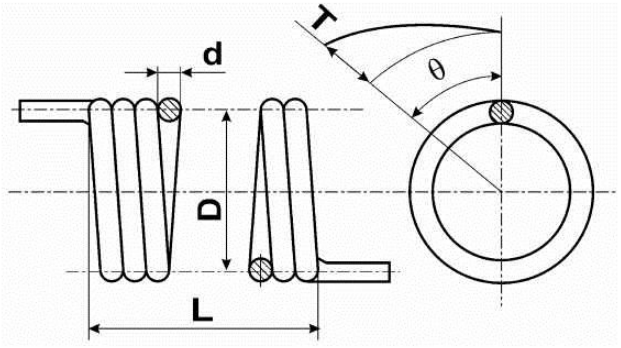


Рис. 10.2.7

где W_a — осевой момент сопротивления поперечного сечения. Тогда условие статической прочности для пружины круглого поперечного сечения запишется в виде

$$\sigma_F = \frac{32kT}{\pi d^3} \le \sigma_a\,, \tag{10.2.10}$$

квадратного поперечного сечения —

$$\sigma_F = \frac{6kT}{a^3} \le \sigma_a\,, \tag{10.2.11}$$

где $k = \dfrac{4C-1}{4C-4}$; σ_a — допускаемое нормальное напряжение.

Угол закручивания пружины θ (в радианах) равен (рис. 10.2.7):

- для проволоки круглого сечения (см. формулу 2.6.29)

$$\theta = \frac{\pi TDn}{EI_a} = \frac{64TDn}{Ed^4}; \tag{10.2.12}$$

- для проволоки квадратного сечения

$$\theta = \frac{\pi TDn}{EI_a} = \frac{12\pi TDn}{Ea^4}. \tag{10.2.13}$$

Из условий прочности (10.2.10) и (10.2.11) по результатам проектировочного расчета определяется диаметр проволоки для круглого поперечного сечения

$$d \ge \sqrt[3]{\frac{32kT}{\pi\sigma_a}}$$

либо сторона квадрата для проволоки квадратного поперечного сечения

$$a \geq \sqrt[3]{\frac{6kT}{\sigma_a}}.$$

Количество витков пружины n при заданном угле закручивания θ для пружины круглого сечения рассчитывается по формуле

$$n = \frac{\theta E d^4}{T \cdot 64D},$$

а для пружины квадратного поперечного сечения — как

$$n = \frac{\theta E a^4}{\pi T \cdot 12D}.$$

Предельно допустимый угол закручивания θ_0 пружины (в градусах) из условия устойчивости равен

$$\theta_0 = 120\sqrt[4]{n}.$$

Потенциальная энергия U, накопленная пружиной, определяется как

$$U = \frac{T\theta}{2}.$$

Длина l рабочей части пружины в свободном состоянии без учета участков закрепления рассчитывается по формуле

$$l = d(n+1) + \delta n,$$

где δ — абсолютное значение зазора между витками.

Для пружины кручения характерно то, что при закручивании ее длина увеличивается, а диаметр уменьшается. Увеличение длины пружины Δl в зависимости от угла закручивания равно

$$\Delta l = \theta \frac{D}{2} \sin\gamma,$$

а увеличение числа витков Δn при закручивании —

$$\Delta n = \frac{\theta}{2\pi}.$$

Здесь θ и $tg\gamma = \frac{d+\delta}{\pi D}$ — соответственно угол закручивания и угол наклона витков.

Величина диаметра пружины после закручивания D_T определяется исходя из условия равенства длин пружины до и после приложения нагрузки:

$$l = n\frac{\pi D}{\cos\gamma} = (n + \Delta n)\frac{\pi D_T}{\cos\gamma},$$

откуда

$$D_T = \frac{D}{1+\Delta n/n}.$$

Длина заготовки пружины приближенно равна

$$L_0 = \pi D z + l',$$

где l' — длина упорных концов пружины с технологическим допуском.

Торсионные пружины (торсионы). Торсионом называется длинный закручивающийся стержень, который в основном используется как компенсатор угловых перемещений. На концах торсиона нарезаются треугольные либо эвольвентные шлицы для соединения с сопряженными деталями. При этом чаще всего применяются шлицы треугольной формы.

Диаметр торсиона d (рис. 10.2.8) рассчитывается из условия прочности на сдвиг от момента вращения T:

$$\tau = \frac{16T}{\pi d^3} \le \tau_a,$$

откуда

$$d \ge \sqrt[3]{\frac{16T}{\pi \tau_a}}.$$

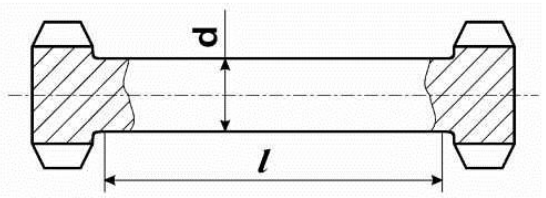


Рис. 10.2.8

Величина угла закручивания торсионного вала, как следует из (2.4.25), равна

$$\theta = \frac{32Tl}{\pi G d^4}. \qquad (10.2.14)$$

где l — длина торсиона. Формула (10.2.14) используется в проектировочном расчете для нахождения требуемой длины торсиона.

Плоские пружины. Иногда в качестве пружины используется плоская пластина, нагруженная перпендикулярной к поверхности силой F (рис. 10.2.9). Расчет пластин подобного рода ведется на прочность и жесткость. Условие прочности на изгиб для пластины постоянной ширины прямоугольного поперечного сечения записывается в виде

$$\sigma = \frac{12Fl}{bs^3} \le \sigma_a,$$

где l — плечо приложения силы F; b и s — размеры поперечного сечения пластины по ширине и толщине соответственно.

Величина прогиба пластины определяется выражением

$$\delta = \frac{4Fl^3}{Ebs^3}.$$

Для пластин более сложной формы расчет величин напряжений и деформаций следует проводить методами теории прочности.

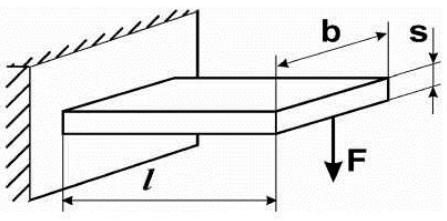


Рис. 10.2.9

Тарельчатые пружины. Пружины этого типа (рис. 10.2.10) обладают более высокой жесткостью и требуют гораздо меньше места для размещения. В наиболее распространенном случае тарельчатая пружина представляет собой коническую шайбу, полученную штамповкой заготовки из листовой пружинной стали. Толщина шайбы от 1 до 20 мм, диаметр — от 30 до 300 мм. Угол конуса обычно лежит в пределах от 2 до 6 градусов.

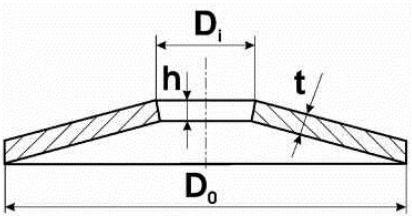


Рис. 10.2.10

При приложении центральной нагрузки шайба изгибается. Величина прогиба обычно составляет 0,5÷0,8 долей от высоты усеченного конуса. Наибольшее значение прогиба при переменном режиме нагружения не должно превышать 0,6 от высоты конуса, а при статическом нагружении — 0,8 высоты конуса. Расчет жесткости и прочности таких упругих элементов выполняется методами теории тонких оболочек, а в более сложных случаях — МКЭ.

Аналитическая зависимость, связывающая силу пружины F и осадку δ, имеет вид

$$F = \frac{4E\,\delta}{K_1 D_0^2 \left(1-\mu^2\right)}\left[(h-\delta)(h-\delta/2)t + t^3\right];$$

$$K_1 = \frac{6}{\pi \ln R_d}\left[\frac{(R_d-1)^2}{R_d^2}\right]; \qquad R_d = \frac{D_0}{D_i}.$$

Статическая прочность пружины определяется уровнем напряжения в трех характерных точках, одна из которых располагается на наружной поверхности, а две других — на внутренней (рис. 10.2.11). При этом напряжение σ_c представляет собой напряжение сжатия, а σ_{ti} и σ_{t0} — напряжения растяжения. В конечном итоге расчет статической прочности сводится к определению этих напряжений и их сравнению с пределом прочности материала пружины:

$$\sigma_c = \frac{4E\,\delta}{K_1 D_0^2 \left(1-\mu^2\right)}\left[K_2(h-\delta/2)t + K_3 t\right];$$

$$\sigma_{ti} = \frac{4E\,\delta}{K_1 D_0^2 \left(1-\mu^2\right)}\left[-K_2(h-\delta/2)t + K_3 t\right];$$

$$\sigma_{t0} = \frac{4E\,\delta}{K_1 D_0^2 \left(1-\mu^2\right)}\left[-K_4(h-\delta/2)t + K_5 t\right];$$

$$K_2 = \frac{6}{\pi \ln R_d}\left[\frac{(R_d-1)}{\ln R_d} - 1\right];$$

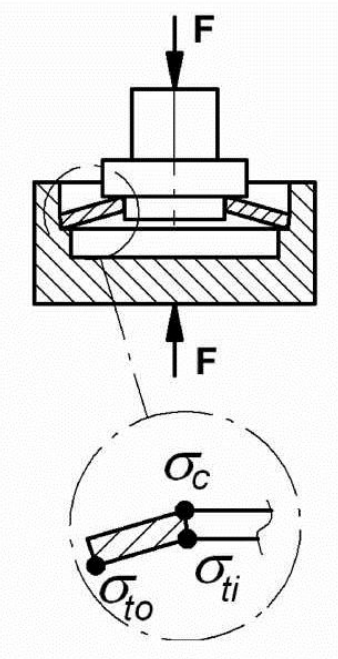


Рис. 10.2.11

$$K_3 = \frac{6}{\pi \ln R_d}\left[\frac{(R_d - 1)}{2}\right];$$

$$K_4 = \frac{R_d \ln R_d (R_d - 1)}{\ln R_d}\left[\frac{R_d}{(R_d - 1)^2}\right]; \quad K_5 = \frac{R_d}{(R_d - 1)}.$$

Если необходимо получить большие перемещения, то целесообразно устанавливать пакет тарельчатых пружин. Проектирование тарельчатых пружин на практике сводится к выбору их из таблиц, построенных по результатам выше представленного расчета.

Расчет прочности пружин при переменных режимах нагружения. Этот расчет не отличается от обычного расчета конструкций и деталей, работающих в условиях переменного режима нагружения (глава 2.10). Являясь проверочным, он сводится к определению коэффициента запаса по напряжениям сдвига либо нормальным напряжениям.

Коэффициент запаса по напряжениям сдвига n_τ в обозначениях главы 2.10 (см. 2.10.20, 2.10.17, 2.10.18, 2.10.15, 2.10.14) равен

$$n_\tau = \frac{\tau_{-1}}{K\tau_{am} + \psi_\tau \tau_m}.$$

Коэффициент запаса по нормальным напряжениям n_σ согласно (2.10.20) определяется как

$$n_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{K\sigma_{am} + \psi_\sigma \sigma_m}.$$

Значения коэффициента запаса усталостной прочности выбираются в зависимости от условий работы пружины. Если в результате ее разрушения не возникает критическая ситуация, то можно принимать значение коэффициента запаса $n_\sigma = n_\tau = 1{,}5$, в противном случае — $n_\sigma, n_\tau = 2 \div 2{,}5$.

Если точное значение предела выносливости неизвестно, то можно пользоваться приближенными зависимостями:

$\sigma_{-1} = 0{,}43\sigma_b$ — для углеродистых сталей;

$\sigma_{-1} = 0{,}35\sigma_b + 120$ МПа — для легированных сталей;

$\tau_{-1} = (0{,}5 \div 0{,}6)\sigma_{-1}$.

В случае произвольного нагружения решение задачи расчета напряженно-деформированного состояния пружин можно провести с помощью МКЭ (см. главу 3.4).

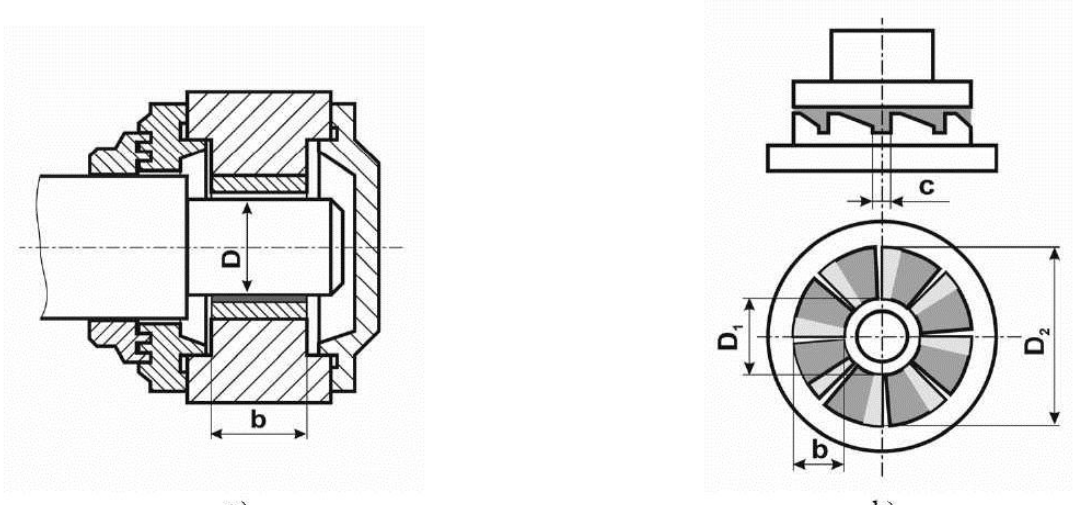
Глава 10.3. Подшипники скольжения

Общие сведения. Подшипники скольжения — это опоры вращающихся деталей, сопряженные поверхности которых находятся в относительном движении и разделены слоем жидкости. Часть вала, находящая в контакте с отверстием в корпусе подшипника, называется *цапфой*, а сопряженная с ней часть корпуса подшипника — *вкладышем*.

По виду воспринимаемой нагрузки подшипники скольжения бывают *радиальными* (рис. 10.3.1a) и *осевыми* (рис. 10.3.1b). Оптимальным режимом работы таких подшипников является режим *жидкостного* трения, при котором контакт деталей полностью исключен, так что коэффициент трения минимален, и, следовательно, отсутствует износ. Однако этот режим требует постоянной подачи жидкости в подшипник. Если количество жидкости недостаточно, то подшипник будет работать в режиме *полужидкостного* трения, что может привести к его нагреву, повышенному износу, задиру и т. д. В некоторых конструкциях подшипники скольжения не требуют смазки, а изготавливаются из неметаллических материалов с низким коэффициентом трения и хорошей износостойкостью.

В подавляющем большинстве случаев в качестве рабочей среды подшипника скольжения используется масло и маслоподобные материалы, поэтому в дальнейшем под смазывающей жидкостью будем понимать именно эти материалы. Следует отметить, что, в зависимости от назначения подшипника, иногда для смазки целесообразно применять воду (например, в насосах перекачки воды) и некоторые другие жидкости, но рассмотрение подобных случаев выходит за рамки настоящей книги.

Поскольку обеспечить режим жидкостного трения довольно сложно, подшипники скольжения применяются реже, чем подшипники качения. Область их практического использования ограничена случаями, когда по технологическим, конструктивным, экономическим либо иным соображениям невозможна установка подшипников качения. Например, для высокооборотных валов нельзя подобрать подшипники качения из-за динамических ограничений. Не оправдано применение подшипников качения и в случаях, когда нагрузки на них очень велики, и т. д.



a) b)

Рис. 10.3.1

Важной характеристикой смазывающего вещества является динамическая вязкость μ — способность этого вещества сопротивляться сдвигу под действием силы. Единицей динамической вязкости в системе единиц СИ служит измеренная в ньютонах сила, необходимая для перемещения слоя жидкости высотой 1 м и площадью 1 м^2 со скоростью 1 м/с.

Особые требования предъявляются к выбору материалов контактирующих поверхностей. Цапфа вала должна иметь высокую чистоту обработки поверхности, а для повышения ее износостойкости рекомендуется эту часть вала закаливать. Для изготовления вкладыша целесообразно использовать следующие антифрикционные материалы:

- чугун;
- бронзу;
- латунь;
- алюминиевые и цинковые сплавы;
- баббит;
- порошковые материалы;
- металлокерамические материалы и т. д.

Режим жидкостного трения. Подшипники скольжения, работающие в режиме жидкостного трения, применяются в основном в качестве опор высокоборотных валов (например, в турбинах, прокатных станах и т. д.). Для расчета таких подшипников, строго говоря, требуется решать сложную гидродинамическую задачу. Однако в инженерных расчетах принимают упрощенную модель: изотермическое ламинарное течение вязкой несжимаемой жидкости между двумя абсолютно жесткими параллельными пластинами, одна из которых неподвижна, а другая движется с некоторой скоростью (напомним, что при ламинарном течении скорости движения частиц жидкости на поверхностях контакта с пластинами равны скоростям самих поверхностей). При этом частицы жидкости перемещаются только вследствие действия постоянной силы трения.

В такой постановке задача расчета параметров течения жидкости является классической и в механике жидкости и газа называется *задачей Рейнольдса*. Она может быть использована для расчета широкого класса подшипников скольжения.

Уравнение Рейнольдса. Рассмотрим движение плоской пластины по поверхности жидкости под действием некоторой силы F, которая, в свою очередь, приводит к относительному сдвигу слоев этой жидкости. Пусть пластина перемещается в направлении оси x со скоростью v_0, а слои жидкости — со скоростью v (рис. 10.3.2). Тогда согласно определению динамической вязкости напряжение (удельная сила трения) τ, возникающее в жидкости вследствие сдвига слоев, равно

$$\tau = \mu \frac{dv}{dy}. \qquad (10.3.1)$$

Если пластина установлена под углом, то на нее действует подъемная сила,

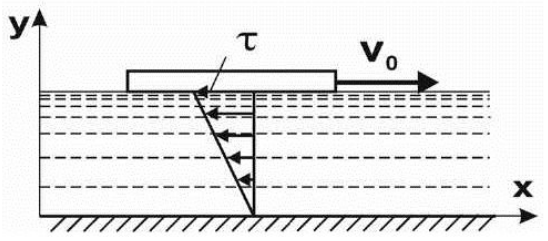


Рис. 10.3.2

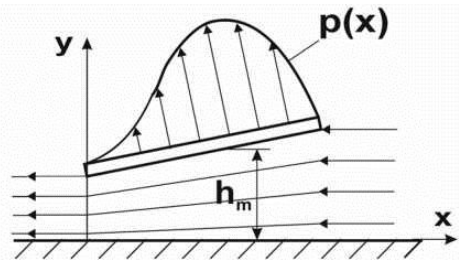


Рис. 10.3.3

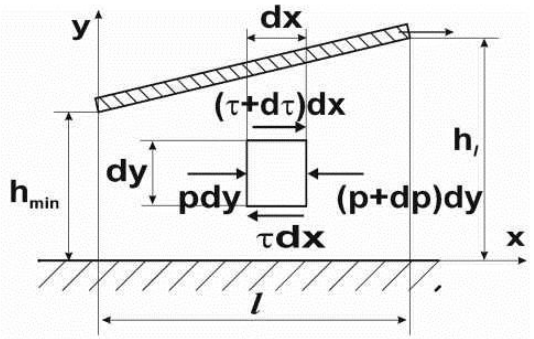


Рис. 10.3.4

вызванная разностью давлений Δp. Характер изменения давления p по длине пластины показан на рис. 10.3.3.

Для того чтобы получить аналитические зависимости, определяющие значение подъемной силы, рассмотрим равновесие элементарного объема жидкости единичной толщины (рис. 10.3.4). Уравнение равновесия записывается в виде

$$\frac{dp}{dx} = \frac{d\tau}{dy}. \tag{10.3.2}$$

Решая совместно (10.3.1) и (10.3.2), получаем

$$\frac{d^2v}{dy^2} = \frac{1}{\mu}\cdot\frac{dp}{dx}. \tag{10.3.3}$$

Дифференциальное уравнение (10.3.3) описывает поведение слоев жидкости при условии ее ламинарного течения. Величину скорости течения жидкости v можно получить двукратным интегрированием уравнения (10.3.3), а именно

$$v = \frac{1}{2\mu}\cdot\frac{dp}{dx}y^2 + C_1 y + C_2, \tag{10.3.4}$$

где C_1 и C_2 — постоянные интегрирования. Значения этих постоянных определяются из граничных условий:

$$\left.\begin{aligned} v(y=0) &= 0 \\ v(y=h) &= v_0 \end{aligned}\right\},$$

откуда

$$C_1 = \frac{v_0}{h} - \frac{h}{2\mu}\cdot\frac{dp}{dx}; \qquad C_2 = 0. \tag{10.3.5}$$

После подстановки (10.3.5) в (10.3.4) получаем выражение для скорости течения жидкости

$$v = v_0\frac{y}{h} + \frac{y}{2\mu}\cdot\frac{dp}{dx}(y-h). \tag{10.3.6}$$

Расход жидкости Q через зазор h с учетом (10.3.6) равен

$$Q = \int_0^h v dy = \frac{vh}{2} - \frac{h^3}{12\mu} \cdot \frac{dp}{dx}. \qquad (10.3.7)$$

Если зазор, координате которого соответствует наибольшая величина давления, обозначить через h_m, то условие неразрывности потока можно представить как равенство объемов жидкости, проходящих через поперечные сечения с зазорами h и h_m в единицу времени:

$$\frac{vh}{2} - \frac{h^3}{12\mu} \cdot \frac{dp}{dx} = \frac{vh_m}{2} - \frac{h_m^3}{12\mu}\left[\frac{dp}{dx}\right]_{p\ p_{\max}}. \qquad (10.3.8)$$

Поскольку функция давления в точке $p = p_{\max}$ достигает максимального значения, то для нее можно записать условие экстремума $\frac{dp}{dx} = 0$. Тогда уравнение неразрывности потока (10.3.7) принимает вид

$$\frac{vh}{2} - \frac{h^3}{12\mu} \cdot \frac{dp}{dx} = \frac{vh_m}{2},$$

так что

$$\frac{dp}{dx} = 6\mu v \frac{(h - h_m)}{h^3}. \qquad (10.3.9)$$

Соотношение (10.3.9) для данной постановки задачи называется *уравнением Рейнольдса*. Дифференцируя обе части уравнения (10.3.4) по y и подставляя результат совместно с (10.3.5) и (10.3.9) в (10.3.1), окончательно получаем

$$\tau = \mu\left[\frac{dv}{dy}\right]_{y\ h} = \mu\frac{v}{h} + \frac{h}{2} \cdot \frac{dp}{dx}. \qquad (10.3.10)$$

Выражения (10.3.9) и (10.3.10) являются основными для расчета и проектирования подшипников скольжения, работающих в условиях жидкостного трения при ламинарном характере течения жидкости.

Решение задачи Рейнольдса для упорного подшипника. Рассмотрим подшипник с наклонными несущими поверхностями (рис. 10.3.1b). Здесь кольцевые наклонные площадки (b — ширина кольцевой части подшипника), изготовленные на неподвижной части подшипника, способствуют образованию подъемной силы, аналогичной той, которая имеет место при наклонном размещении плоской площадки в потоке жидкости.

Картина изменения зазоров в наклонной части подшипника показана на рис. 10.3.5. Здесь: l_1 — длина плоского участка; l — длина наклонного участка; $h_{\min}$ — минимальная величина зазора.

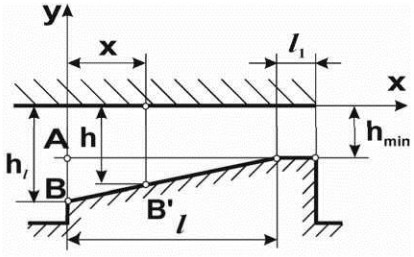


Рис. 10.3.5

Как следует из рис. 10.3.5, для текущего зазора h, находящегося на расстоянии x, справедливо соотношение

$$h = h_l - \left(h_l - h_{\min}\right)\frac{x}{l},$$

или, если ввести обозначение $\xi = h_l / h_{\min}$,

$$h = h_{\min}\left[\xi - \left(\xi - 1\right)\frac{x}{l}\right]. \qquad (10.3.11)$$

Уравнение Рейнольдса (10.3.9) применительно к упорному подшипнику может быть переписано с точностью до константы интегрирования C в виде

$$\frac{dp}{dx} = \frac{6\mu v}{h^2} + \frac{C\mu}{h^3}. \qquad (10.3.12)$$

Решая совместно (10.3.11) и (10.3.12), находим

$$\frac{dp}{dx} = \frac{6\mu v}{h_{\min}^2\left[\xi - \left(\xi - 1\right)\frac{x}{l}\right]^2} + \frac{C\mu}{h_{\min}^3\left[\xi - \left(\xi - 1\right)\frac{x}{l}\right]^3},$$

что после интегрирования по x дает

$$p = \frac{6\mu v l}{h_{\min}^2\left(\xi - 1\right)\left[\xi - \left(\xi - 1\right)\frac{x}{l}\right]} + \frac{C\mu l}{2h_{\min}^3\left(\xi - 1\right)\left[\xi - \left(\xi - 1\right)\frac{x}{l}\right]^2} + C_1. \qquad (10.3.13)$$

Произвольные постоянные определим из граничных условий

$$\left.\begin{aligned} p\left(x = 0\right) = 0 \\ p\left(x = l\right) = 0 \end{aligned}\right\}. \qquad (10.3.14)$$

В развернутом виде граничные условия (10.3.14) приводят к следующей системе уравнений относительно C и C_1:

$$\left.\begin{aligned} \frac{6\mu v l}{h_{\min}^2\left(\xi - 1\right)\xi} + \frac{C\mu l}{2h_{\min}^3\left(\xi - 1\right)\xi^2} + C_1 = 0 \\ \frac{6\mu v l}{h_{\min}^2\left(\xi - 1\right)} + \frac{C\mu l}{2h_{\min}^3\left(\xi - 1\right)} + C_1 = 0 \end{aligned}\right\}. \qquad (10.3.15)$$

Вычитая из первого уравнения системы (10.3.15) второе и разрешая его относительно постоянной C, имеем

$$C = -\frac{12\upsilon\xi}{\xi + 1}h_{\min}. \qquad (10.3.16)$$

Далее из второго уравнения системы (10.3.15) с учетом (10.3.16) получаем

$$C_1 = -\frac{6\mu\upsilon l}{h_{\min}^2(\xi-1)(\xi+1)}. \qquad (10.3.17)$$

Окончательно выражение (10.3.13) с помощью (10.3.16) и (10.3.17) переписывается в виде

$$p = \frac{6\mu\upsilon l}{h_{\min}^2(\xi-1)}\left[\frac{1}{\left[\xi-(\xi-1)\frac{x}{l}\right]} - \frac{\xi}{(\xi+1)\left[\xi-(\xi-1)\frac{x}{l}\right]^2} - \frac{1}{\xi+1}\right]. \qquad (10.3.18)$$

По известному закону изменения давлений (10.3.18) можно определить нагрузочную способность подшипника в целом. Конструктивно упорный подшипник представляет собой последовательную комбинацию наклонных и параллельных кольцевых участков. Каждый из наклонных участков принимает участие в формировании подъемной силы. Полная площадь поверхности подшипника, участвующей в образовании подъемной силы, равна $A = zlb$, где z и A — число рабочих участков и площадь поверхности одного участка соответственно. Сумма нормальных сил от распределенного по площади поверхности dA давления p определяет то внешнее усилие, которое может быть воспринято подшипником. В результате допускаемая нагрузка F_a на подшипник равна

$$F_a = \int_A p dA. \qquad (10.3.19)$$

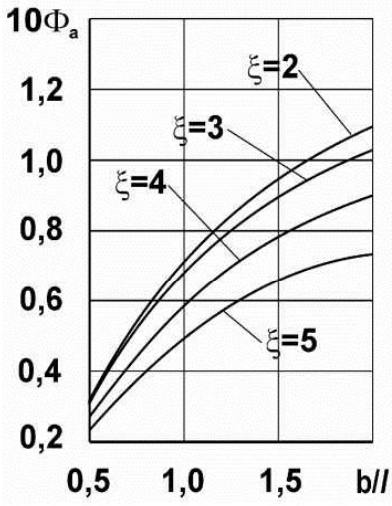


Рис. 10.3.6

Подстановка (10.3.18) в (10.3.19) приводит к следующему выражению для допускаемой нагрузки F_a:

$$F_a = \frac{\mu\upsilon l}{h_{\min}^2}\Phi_a, \qquad (10.3.20)$$

где

$$\Phi_a = \int_A \frac{6}{(\xi-1)}\left[\frac{1}{\left[\xi-(\xi-1)\frac{x}{l}\right]} - \frac{\xi}{(\xi+1)\left[\xi-(\xi-1)\frac{x}{l}\right]^2} - \frac{1}{\xi+1}\right]dA.$$

Для практического расчета нагрузочной способности Φ_a можно использовать графики, приведенные на рис. 10.3.6.

Нагрузочная способность, рассчитанная описанным выше способом, дает удовлетворительные результаты для широких подшипников, т. е. когда $b/l \cong 1$. При меньших соотношениях ширины кольцевой части и длины на результатах работы подшипника сильно сказывается скорость истечения из него масла. Поскольку при выводе формулы (10.3.20) процесс истечения масла через торцы не учитывался, то в данном случае расчет по ней может привести к значительным погрешностям.

Решение уравнения Рейнольдса для радиального подшипника. Решение задачи Рейнольдса для радиального подшипника (рис 10.3.1а) удобнее вести в полярных координатах:

$$\left.\begin{aligned} dx &= r d\varphi \\ v &= \omega r \end{aligned}\right\}.$$

Здесь ω — угловая скорость вращения вала.

При вращении подшипника вал всплывает за счет подъемной силы, вызванной наличием жидкости в зазоре. Положение подшипника будем характеризовать величиной эксцентриситета e. Толщина слоя жидкости h_φ в сечении, находящемся под углом φ к линии центров OO_1 (рис. 10.3.7), равна

$$h_\varphi = r_a - r_s \cos\gamma - e\cos\left(180^0 - \varphi\right). \qquad (10.3.21)$$

Для малых углов $\gamma \cong 0$, и (10.3.21) можно переписать в виде

$$h_\varphi = \delta\left(1 + \varepsilon\cos\varphi\right), \qquad (10.3.22)$$

где $\delta = r_a - r_s$ — радиальный зазор, r_a — радиус отверстия ($2r_a = d$, d — диаметр отверстия), r_s — радиус цапфы вала под подшипником ($2r_s = d_s$, d_s — диаметр вала), $\varepsilon = e/\delta$ — относительный эксцентриситет.

Считая, что под углом $\varphi = \varphi_m$ располагается слой жидкости с наибольшим давлением, обозначим толщину этого слоя через h_m. Тогда, в соответствии с (10.3.22), можно написать

$$h_m = \delta\left(1 + \varepsilon\cos\varphi_m\right). \qquad (10.3.23)$$

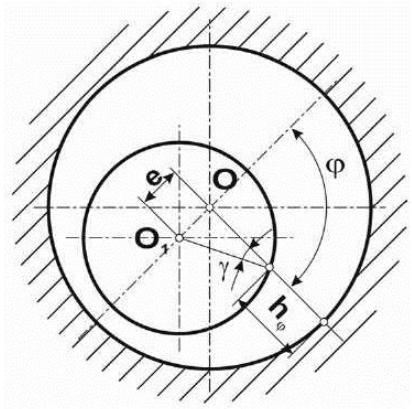


Рис. 10.3.7

Очевидно, что минимальная толщина слоя жидкости достигается при $\varphi = 180^0$, поэтому для $h_{\min}$ из (10.3.22) имеем

$$h_{\min} = \delta\left(1 - \varepsilon\right). \qquad (10.3.24)$$

Подставляя полученные значения зазоров (10.3.22) и (10.3.23) в уравнение Рейнольдса (10.3.9) и переходя к полярным координатам, получаем

$$\frac{dp}{d\varphi} = \frac{6\mu\omega\varepsilon\left(\cos\varphi - \cos\varphi_m\right)}{\psi^2\left(1 + \varepsilon\cos\varphi\right)^3}, \qquad (10.3.25)$$

где $\psi = \delta / r_s$ — относительный радиальный зазор в подшипнике. Примерный график изменения удельных давлений по дуге окружности радиального подшипника приведен на рис. 10.3.8.

Интегрирование (10.3.25) дает закон изменения давления по угловой координате:

$$p(\varphi) = \frac{6\mu\omega}{\psi^2} \int_{\varphi_1}^{\varphi} \frac{\varepsilon(\cos\varphi - \cos\varphi_m)}{(1+\varepsilon\cos\varphi)^3} d\varphi + p(\varphi_1). \qquad (10.3.26)$$

Радиальная сила F_r, полученная как результат суммирования проекций элементарных сил от распределенной эпюры удельных давлений (рис. 10.3.8), имеет вид

$$F_r = \int_A p(\varphi)\cos[180 - (\varphi + \varphi_e)]dA = br_s \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} p(\varphi)\cos[180 - (\varphi + \varphi_e)]d\varphi, \quad (10.3.27)$$

где b — ширина подшипника (длина рабочего участка).

Заметим, что формула (10.3.27) написана в предположении отсутствия проекций сил трения на направление действия радиальной нагрузки, что справедливо ввиду малости абсолютных значений этих величин по сравнению с нормальными составляющими. Кроме того, как и для случая упорного подшипника, при выводе не учитывалась утечка жидкости через торцевые поверхности подшипника. В этой связи можно утверждать, что точность фактического определения радиальной реакции F_r зависит от ширины подшипника, и чем последняя больше, тем выше точность расчетов его нагрузочной способности.

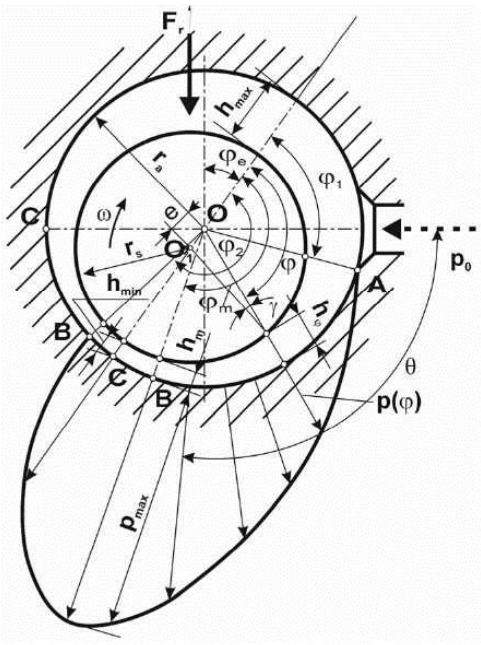


Рис. 10.3.8

Подставляя выражение для функции давления (10.3.26) в уравнение равновесия (10.3.27), получаем величину нагрузки, которую может выдержать подшипник при его вращении, а именно

$$F_r = \frac{\mu\omega}{\psi^2} b d_s \Phi_r; \qquad (10.3.28)$$

$$\Phi_r = -3\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \cos(\varphi + \varphi_e) \int_{\varphi_1}^{\varphi} \frac{\varepsilon(\cos\varphi - \cos\varphi_m)}{(1+\varepsilon\cos\varphi)^3} d\varphi d\varphi. \qquad (10.3.29)$$

Для аналитического расчета нагрузочной способности подшипника составлены графики значений функции Φ_r. Кроме того, вычисление Φ_r по формуле (10.3.29) легко провести с помощью ЭВМ методами численного интегрирования. В обоих случаях результат расчета зависит от протяженности несущей поверхности подшипника, которая характеризуется углом $\theta = \varphi_2 - \varphi_1$. Величина этого угла цели-

ком определяется конструкцией подшипника и местом подвода в него масла. Если подходить строго, то значение угла θ можно найти только экспериментально. Однако практика применения подшипников скольжения показала, что это значение лежит в пределах $90^0 \le \theta \le 360^0$. Встречаются также поликлиновые конструкции подшипников, для которых характерно наличие нескольких клиньев на дуге окружности. На рис 10.3.9 приведен график функции Φ_r для случая $\theta = 180^0$.

Если учитывать, что грузоподъемность подшипника конечной длины зависит от торцевых утечек, то для расчета функции Φ_r можно воспользоваться приближенной формулой, справедливой в интервале $\varepsilon = 0{,}3 \div 0{,}95$,

$$\Phi_r = \frac{0{,}505}{\frac{1-\varepsilon}{2}\left[1+4{,}62\left(\frac{d}{b}\right)^2\left(0{,}026+\frac{1-\varepsilon}{2}\right)\right]}. \qquad (10.3.30)$$

При расчете подшипника важными параметрами являются сила трения и другие связанные с ней характеристики. С целью нахождения силы трения воспользуемся выражением (10.3.10) для касательных напряжений в слое масла, переписав его в полярных координатах:

$$\tau(\varphi) = \mu\frac{\omega d}{2h} + \frac{h}{d}\cdot\frac{dp}{d\varphi}. \qquad (10.3.31)$$

С учетом (10.3.25) после несложных преобразований соотношение (10.3.31) принимает вид

$$\tau(\varphi) = \mu\frac{\omega}{\psi}\cdot\frac{1-3\varepsilon\cos\varphi_m+4\varepsilon\cos\varphi}{(1+\varepsilon\cos\varphi)^2}.$$

Сила трения F_f, которая представляет собой силу сопротивления движению, определяется как сумма распределенных сил, вызванных касательными напряжениями:

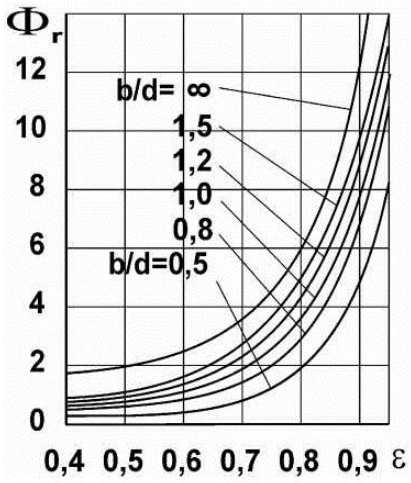


Рис. 10.3.9

$$F_f = \frac{1}{2}bd_s\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\tau(\varphi)d\varphi = \frac{1}{2}bd_s\frac{\mu\omega}{\psi}\Phi_f, \qquad (10.3.32)$$

где Φ_f — коэффициент сопротивления, рассчитываемый по формуле

$$\Phi_f = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\frac{1-3\varepsilon\cos\varphi_m+4\varepsilon\cos\varphi}{(1+\varepsilon\cos\varphi)^2}d\varphi.$$

Отношение касательной силы F_f к нормальной нагрузке F_r представляет собой приведенный коэффициент трения скольжения f, $f = \frac{F_f}{F_r}$, для которо-

го по формулам (10.3.32) и (10.3.28) получаем

$$f = \frac{\psi \Phi_f}{2\Phi_r}. \qquad (10.3.33)$$

Выражение для коэффициента трения (10.3.33) можно представить в простой аналитической форме, которая справедлива для случая $\varepsilon \le 0{,}8$:

$$\frac{f}{\psi} = \frac{\pi}{\Phi_r} + 0{,}55\left(\frac{b}{d}\right)^{1.5}. \qquad (10.3.34)$$

При $b > d$ отношение b/d принимается равным единице.

Наличие трения вызывает нагрев подшипника, что в случае недостаточной интенсивности отвода тепла может привести к потере его работоспособности.

Отметим, что при проведении проверочного расчета подшипника необходимо также определить установившуюся температуру масла в зазоре.

Практические методы расчетов радиальных подшипников, работающих в условиях жидкостного трения. Одной из основных задач проектирования подшипника скольжения является подбор его геометрических размеров. Задача эта может быть решена в ходе проверочного расчета, когда выбираются некоторые размеры подшипника и характеристики материалов, а после этого производится проверка правильности принятого решения. Многократно повторенная операция проверочного расчета дает возможность выбора таких вариантов конструкций, которые являются наиболее подходящими для заданных условий. Эту расчетную работу целесообразно поручить компьютеру, а для принятия окончательного решения следует сформулировать ряд требований, предъявляемых к подшипнику.

В качестве исходных независимых параметров при расчете, например, радиальных подшипников принимают диаметр цапфы d_s и ширину подшипника b, а также вязкость масла и угловую скорость вращения вала. Для заданного значения нагрузки на подшипник по формуле (10.3.28) определяется величина относительного эксцентриситета ε. По известному значению ε легко определить величину минимального зазора в подшипнике при рабочей нагрузке. Условие, при котором нет непосредственного касания поверхностей, находящихся в относительном движении, записывается как

$$h_{\min} = \delta(1-\varepsilon) \ge h_{\min a}, \qquad (10.3.35)$$

где $h_{\min a}$ — допускаемая величина минимального зазора, при которой обеспечен режим жидкостного трения.

Очевидно, что допускаемая величина минимального зазора определяется как сумма высот микронеровностей Ra_1 и Ra_2 поверхностей цапфы вала и вкладыша соответственно (см. главу 1.2). Для податливых валов к указанной сумме следует добавить величину деформации вала на длине подшипника от изгиба δ_s:

$$h_{\min a} = Ra_1 + Ra_2 + \delta_s. \qquad (10.3.36)$$

Пользуясь (10.3.35) и (10.3.36), можно рассчитать коэффициент s запаса по минимальному зазору,

$$s = \frac{h_{\min}}{h_{\min a}}.$$

Значение коэффициента запаса не должно быть меньше $s_{\min} \geq (1{,}3 \div 1{,}5)$, так как кроме описанных выше параметров на величину минимального зазора может существенно влиять погрешность изготовления подшипника.

Для слоя жидкости в зазоре подшипника следует выполнить проверку справедливости гипотезы существования ламинарного течения. Такая проверка сводится к определению числа Рейнольдса Re и сравнению полученного результата с его критическим значением. Условие существования ламинарного течения жидкости для радиального подшипника эквивалентно неравенству

$$\mathrm{Re} = \frac{\pi \delta_d d_s \rho n}{2\mu} \leq 41{,}3\sqrt{\frac{d_s}{\delta_d}},$$

где δ_d — абсолютный диаметральный зазор, $[\delta_d]$ = [м];

ρ — плотность смазочного материала, $[\rho]$ = [кг/м^3];

n — частота вращения вала, $[n]$ = [с$^{-1}$];

μ — динамическая вязкость, $[\mu]$ = [Па/с].

Для осевого подшипника имеем

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho v_m h_{\min}}{\mu} \leq 600,$$

v_m — скорость на среднем диаметре, $[v_m]$ = [м/с].

При выполнении практических расчетов подшипников необходимо учитывать, что динамическая вязкость масла сильно зависит от температуры. Эту зависимость можно аппроксимировать выражением

$$\mu = \mu_{50}\left(\frac{50}{t}\right)^m,$$

где μ_{50} — динамическая вязкость при температуре 50^0 C;

m — некоторый показатель степени.

Параметры μ_{50} и m, определяющиеся сортом масла, приводятся в специальной литературе.

Кроме того, как уже говорилось выше, для обеспечения нормальной работы подшипника следует выполнить его тепловой расчет, который сводится к нахождению температуры масла при установившемся режиме работы.

В основе теплового расчета лежит уравнение теплового баланса

$$P = P_1 + P_2 + P_3, \qquad (10.3.37)$$

где P — мощность, выделенная в подшипнике за счет трения;

P_1 — мощность, отведенная от подшипника через его корпус;

P_2 — мощность, отведенная от подшипника за счет циркуляции (охлаждение за счет циркуляции возможно только в случае принудительного отвода масла);

P_3 — мощность, отведенная от подшипника через вал.

Мощность P, выделенная в подшипнике за счет сил трения, может быть найдена с помощью выражений (10.3.32) и (10.3.33) как

$$P = 0{,}5F_f d_s \omega = F_r f v . \qquad (10.3.38)$$

Мощность P_1, отведенная от подшипника через его корпус, равна

$$P_1 = k_t A(t - t_0) , \qquad (10.3.39)$$

где A — площадь поверхности подшипника;

$t - t_0$ — разность температур масла внутри подшипника и окружающей среды;

k_t — коэффициент теплоотдачи, численно равный мощности, излученной через единицу поверхности при разности температур в 1^0 С. Отметим, что для подшипников с металлическими вкладышами рекомендуется использовать приближенные значения коэффициента теплоотдачи из диапазона $k_t = (9 \div 16)\ \frac{Bm}{м^2 \cdot град}$.

Отведенная от подшипника мощность P_1, рассчитанная по формуле (10.3.39), справедлива только для случая естественной конвекции. Если предусмотреть использование вентилятора, то значение коэффициента теплоотдачи можно существенно увеличить. Так, его значение при применении принудительной вентиляции можно определить из выражения

$$k_t = 7 + 12\sqrt{v_0} ,$$

где $v_0 \geq 1{,}2$ м/с — средняя скорость потока воздуха, определяемая скоростью вращения вентилятора и его конструктивными параметрами.

Мощность P_2, отведенная от подшипника за счет циркуляции, имеет вид

$$P_2 = c\rho V_r (t_1 - t) , \qquad (10.3.40)$$

где c и ρ — удельная теплоемкость масла и его плотность соответственно, $|c|$=|Дж/(кг·град|, $|\rho|$=|кг/м^3|;

$(t_1 - t)$ — разность абсолютных температур масла на входе в подшипник и на выходе из него;

V_r — объем масла, протекающий через подшипник в единицу времени, $[V_r]$=[м^3/с].

Для промышленных масел при их средних температурах порядка $(50 \div 80)^0$ С произведение $c \cdot \rho$ принимается равным $1{,}7 \cdot 10^6\ \frac{Дж}{м^3 \cdot град}$.

Поток тепла P_3, отводимый валом, оказывается существенно меньшим по отношению к другим слагаемым теплового потока. В этой связи можно принять $P_3 \approx 0$.

Уравнение теплового баланса (10.3.37) позволяет определить температуру масла в установившемся режиме работы. При этом для каждого сорта масла есть максимально допустимая температура t_a, выше которой оно теряет свои свойства в результате протекания в нем необратимых химических реакций разложения. Следовательно, условие, при котором масло сохраняет исходные свойства, можно записать в виде $t \le t_a$. Тогда, подставляя (10.3.39) и (10.3.40) в уравнение теплового баланса (10.3.37), получаем

$$\frac{P - c\rho V_r (t_1 - t)}{k_t A} + t_0 \le t_a . \qquad (10.3.41)$$

Выражение (10.3.41) представляет собой аналитическую форму уравнения теплового баланса, а проверка этого условия является обязательной при определении работоспособности подшипника скольжения.

Расчет подшипников скольжения, работающих в условиях полужидкостного трения. Режим жидкостного трения может быть осуществлен при условии постоянной подачи жидкости в подшипник, которая, в свою очередь, обеспечивается принудительной циркуляцией масла. Конструктивно это обеспечить трудно и дорого. В этой связи наиболее распространенным случаем является режим полужидкостного трения, при котором масляный слой не обеспечивает полного разделения поверхностей, находящихся в относительном движении. Такой режим работы подшипника может быть осуществлен при периодической смазке.

Расчет подшипника, работающего в режиме полужидкостного трения, основан на использовании результатов экспериментальных исследований. Методику такого расчета можно рассмотреть на приведенном ниже примере, взятом из [9].

Пример расчета радиального подшипника, работающего в режиме полужидкостного трения.

Расчет и список формул приведен в таблице 10.3.1.

Таблица 10.3.1. **Расчетные формулы и результаты расчета радиального подшипника полужидкостного трения**

Определяемый параметр	Расчетная зависимость	Результат
Безразмерная характеристика нагрузки W*	$W^* = \frac{0{,}7F_r}{Ebh_k} + \sqrt{\frac{0{,}49F_r^2}{E^2b^2h_k} + \frac{2{,}25F_r}{Ebh_k}}$	4,158
Безразмерная толщина смазочного слоя H*	$H^* = 1{,}4 + \frac{W^*}{2{,}25}$	3,25

Определяемый параметр	Расчетная зависимость	Результат
Параметр упругости E*	$E^* = \frac{2H^*}{W^*}$	1,56
Характеристический коэффициент B	См. таблицу 10.3.2	0,395
Скорость, соответствующая переходу в жидкостной режим v_l, м/с	$v_l = \frac{0{,}89F_r\psi h_k B}{bd\mu_e}$	1,2
Средняя вязкость смазки μ_m. Па·с	Задают при $t_m = 50 \div 60°C$	0,02
Минимальный коэффициент трения $f_{\min}$	$f_{\min} = 4{,}24\sqrt{\frac{\mu_m v_l b}{F_r}}$	$5{,}36 \cdot 10^{-4}$
Действительный коэффициент трения f	$f = f_1 - \frac{\omega d(f_1 - f_{\min})}{2v_l}$	0,018
Коэффициент теплоотдачи с поверхности вала α_{T1}, Вт/(м^2·град)	$\alpha_{T1} = 18{,}14(0{,}5\omega d)^{0{,}36}$	17,47
Коэффициент теплоотдачи с поверхности корпуса подшипника α_{T2}, Вт/(м^2·град)	$\alpha_{T2} = 16{,}28\sqrt{v_0}$ (с обдувом) $\alpha_{T2} = 9{,}3 \div 16{,}28$ (без обдува)	16,28
Приведенный коэффициент теплопередачи k, Вт/(м^2·град)	$k = \frac{1}{0{,}5\frac{d}{b}\ln\frac{D}{d} + \pi\frac{db}{\alpha_{T2}A}} + \frac{3\alpha_{T1}d}{b}$	$0{,}98 \cdot 10^2$
Средняя температура подшипника $t_{\text{р}}$, °С	$t_m = t_0 + \frac{F_r d\omega f}{2Ak}$	87,5

Исходные данные:

— нагрузка на подшипник $F_r = 7{,}5 \cdot 10^5$ Н;

— частота вращения вала $\omega = 3{,}6$ с$^{-1}$;

— диаметр шейки вала $d = 0{,}5$ м;

— длина вкладыша подшипника $b = 0{,}5$ м;

— относительный зазор $\psi = 2\Delta / d = 3 \cdot 10^3$;

— коэффициент теплопроводности антифрикционного слоя $\lambda = 46{,}52$ Вт/(м^2·град);

— модуль упругости антифрикционного слоя $E = 0{,}5 \cdot 10^{11}$ Па;

— коэффициент трения $f_1 = 0{,}07$; температура окружающей среды $t_0 = 20\ ^0\text{C}$;

— сорт смазки $T_n - 22$;

— динамическая вязкость масла на входе $\mu_e = 0{,}037$ Па·с;

— площадь поверхности корпуса подшипника $A = 2$ м^2;

— критическая минимальная толщина слоя масла $h_k = 14 \cdot 10^{-3}$ мм.

Таблица 10.3.2. **Зависимость характеристического коэффициента B от параметра упругости E***

E*	B	E*	B
0,1	0,052	4,0	0,540
0,2	0,091	6,0	0,600
0,4	0,160	10,0	0,680
0,6	0,210	40,0	0,820
1,0	0,295	100,0	0,960
2,0	0,426		

Глава 10.4. **Подшипники качения**

Подшипники качения представляют собой опоры вращающихся валов, подвижные элементы которых разделены телами качения. Эти подшипники просты в эксплуатации, относительно дешевы и поэтому являются наиболее распространенными. Только в том случае, если их использование экономически невыгодно либо конструктивно невозможно, применяют подшипники скольжения.

Назначение, конструктивное исполнение и классификация подшипников. Конструктивно подшипник качения состоит из наружного 1 и внутреннего 2 колец, между которыми располагаются тела качения 3, фиксируемые в нужном положении с помощью сепаратора 4 (рис.10.4.1).

По форме тел качения подшипники бывают шариковыми (рис.10.4.2a; 10.4.3a, c, e) и роликовыми (рис.10.4.2b; 10.4.3b, d, f). Говоря об областях применения различных типов подшипников качения, следует отметить, что шарикоподшипники рекомендуется применять при относительно небольших нагрузках и больших скоростях вращения вала. Роликоподшипники, напротив, используются при больших нагрузках и малых скоростях вращения вала. Для шарикоподшипника характерен номинально точечный контакт тел качения с дорожками качения. Поскольку нагрузочная способность (т. е. способность воспринимать внешнюю нагрузку без разрушения) такого контакта значительно ниже, чем для линейного контакта ролика с дорожкой качения, то роликоподшипники более грузоподъемны по отношению к шариковым.

По виду воспринимаемой нагрузки подшипники качения разделяются на радиальные, упорные, радиально-упорные и упорно-радиальные.

К подшипникам радиальных типов относятся *шариковые радиальные* и *роликовые радиальные* подшипники.

Шариковые радиальные подшипники (рис.10.4.2a) наиболее просты и дешевы в изготовлении, поэтому в настоящее время они широко применяются в практике проектирования механического оборудования. Такие подшипники способны воспринимать не только радиальную нагрузку, но и небольшую осевую силу, а также функционировать в условиях некоторого перекоса колец (не более $10' \div 15'$).

Роликовые радиальные подшипники (рис.10.4.2b) благодаря увеличенной контактной поверхности допускают значительно бо́льшие нагрузки, чем шариковые, но они способны воспринимать только радиальную нагрузку. Кроме того, для подшипников такого типа перекосы осей не должны превышать 2'. В противном случае появляется большое давление на краях, которые существенно снижают долговеч-

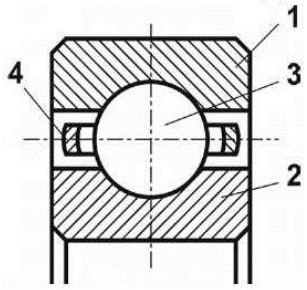
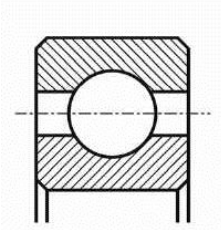


Рис.10.4.1


a)

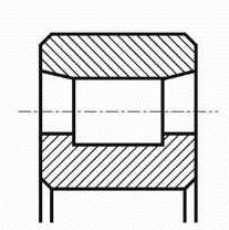

b)

Рис. 10.4.2

ность подшипника. Требования к точности монтажа могут быть значительно понижены в случае использования роликов с выпуклой образующей. Допускается также установка подшипников с радиальным натягом, что позволяет выбрать зазор и повысить точность вращения оси вала при рабочей нагрузке.

Благодаря конструктивному исполнению роликовые радиальные подшипники могут обеспечить перемещение наружного кольца по отношению к внутреннему. Это обстоятельство дает возможность использовать их в качестве плавающих опор.

Разновидностью роликовых подшипников являются *игольчатые*, диаметр тела качения которых много меньше их длины. Эти подшипники имеют малые радиальные габариты и могут использоваться без одного из колец. Роль наружного кольца, в случае его отсутствия, играет корпус, а внутреннего — шейка вала. Игольчатые подшипники обладают высокой жесткостью и могут быть использованы в качестве высокоточных опор. Из-за потенциально большого числа возможных контактов игольчатые подшипники обладают высокими демпфирующими свойствами, поэтому допустимо их применение как опор валов, работающих при высоком уровне вибрации.

К числу радиальных подшипников следует отнести ***шариковый двухрядный сферический*** (рис.10.4.3a) и ***роликовый двухрядный сферический*** подшипники (рис.10.4.3b). Такое конструктивное исполнение подшипника существенно снижает требования к его соосности, а перекосы колец могут доходить до $2 \div 3^0$. Эти подшипники способны воспринять небольшую по величине осевую нагрузку, которая, однако, не должна быть больше четверти радиальной. Очевидно также, что двухрядные подшипники имеют существенно большую грузоподъемность, чем однорядные. Повысить точность подшипников такого типа можно за счет использования радиального натяга.

Большую осевую силу воспринимают ***шариковые радиально-упорные*** (рис.10.4.3c) и ***роликовые конические*** (рис.10.4.3d) подшипники. Тело качения роликовых конических подшипниках изготовлено в форме усеченного конуса. При этом нагрузочная способность в осевом направлении определяется величиной угла

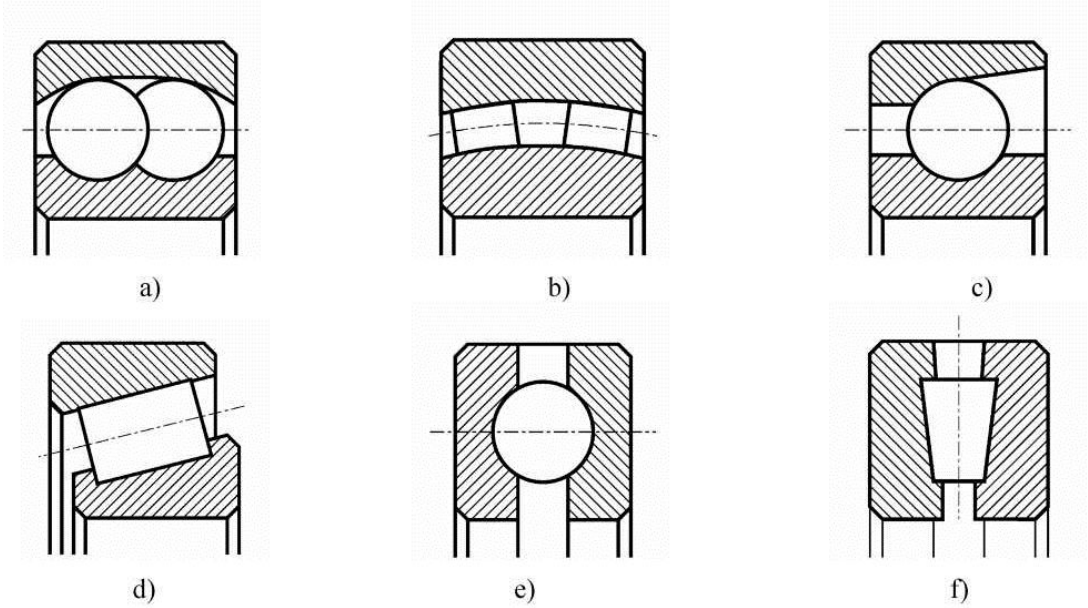


Рис. 10.4.3

контакта. В случае, если осевая сила превышает радиальную, используется ***упорно-радиальный подшипник***, который представляет собой модификацию радиально-упорного с б*о*льшим по величине углом конуса. В подавляющем большинстве случаев осевая нагрузка воспринимается радиально-упорным подшипником только в одном направлении, поэтому такие подшипники устанавливаются попарно. Для шариковых радиально-упорных подшипников допускается угол перекоса колец до $10'$, а для роликоподшипников — только $2'$. При больших нагрузках часто устанавливается несколько подшипников в одном корпусе. Наконец, для повышения точности опор подшипники этих типов могут ставиться с осевым натягом.

Упорные подшипники (рис.10.4.3e,f) предназначены для работы в условиях чисто осевого нагружения. Если к валу приложена радиальная нагрузка, то следует дополнительно использовать подшипники радиальных типов. Как правило, упорные подшипники воспринимают осевую нагрузку только в одном направлении, а при двустороннем нагружения они монтируются попарно.

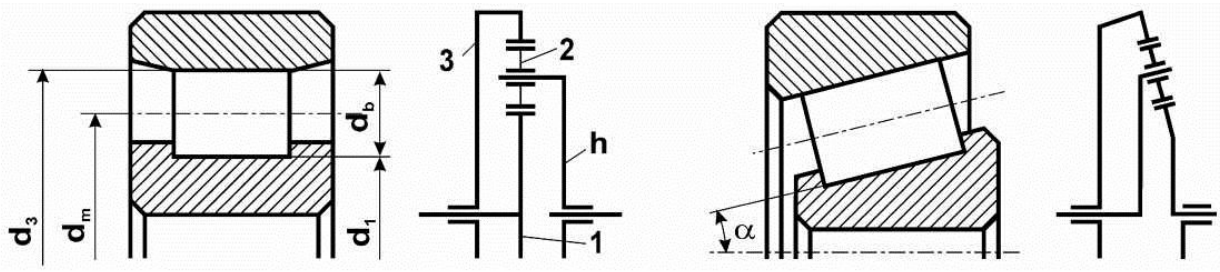
Краткое описание основных типов подшипников качения необходимо дополнить упоминанием о многообразии конструктивных решений, которые применяют производящие подшипники фирмы. Не останавливаясь на этом подробно, отметим, что все эти конструктивные особенности используются для повышения надежности и точности подшипника, улучшения его технических показателей и облегчения монтажа.

Улучшить технические показатели подшипника можно за счет повышения его класса точности. Но при этом стоимость подшипника резко возрастает, а потому более высокий класс точности следует применять лишь в случае необходимости.

Комплексной характеристикой точности подшипника является допустимое биение дорожки качения наружного и внутреннего колец. Более высокий класс точности подшипника предусматривает уменьшение поля допуска его номинальных размеров. Эти допуски, как правило, контролируются изготовителем подшипников и приводятся в каталогах.

Изменения размеров подшипника меняют его нагрузочную способность. Различия в размерах характеризуются серией подшипника, а его подбор в рамках выбранного типа сводится к определению серии.

Тела качения и кольца подшипника изготавливаются из специальных высокопрочных легированных сталей, которые имеют высокую твердость поверхности — $HRC \geq 60$, при этом обеспечивается высокая чистота обработки поверхности. Простейшие сепараторы выполняются штамповкой из сталей с малым содержанием углерода. Для высокоскоростных подшипников, с целью снижения их шума, используют массивные сепараторы из бронзы, латуни, дюралюминия и других материалов.



a) b)

Рис. 10.4.4

Кинематика подшипника качения. Для описания кинематики подшипника воспользуемся тем, что с кинематической точки зрения моделировать как шарико-, так и роликоподшипник можно планетарной передачей. Радиальный подшипник качения и эквивалентная ему планетарная передача изображены на рис.10.4.4a, а радиально-упорный — на рис.10.4.4b.

В большинстве случаев использование подшипников в опорах ограничивается такой их установкой, при которой одно из колец подшипника (как правило, внешнее) неподвижно. Пусть угловая скорость вращения внутреннего кольца равна ω_1. При таком варианте установки планетарную передачу с помощью метода обращенного движения (см. гл. 7.4) можно превратить в передачу с фиксированными осями путем остановки водила, которое моделирует работу сепаратора. Ясно, что остановить водило можно, прибавляя к фактическим скоростям вращения участвующих в движении элементов скорость, равную $-\omega_h$, где ω_h — угловая скорость вращения водила. Тогда скорости деталей при остановленном водиле будут равны: $\omega_1 - \omega_h$ — для внутреннего кольца и ω_h — для наружного.

Передаточное отношение схемы с фиксированными осями равно

$$u_{13}^h = \frac{\omega_1 - \omega_h}{-\omega_h} = -\frac{1}{u_{h1}^3} + 1,$$

откуда

$$u_{h1}^3 = \frac{1}{1 - u_{13}^h} = \frac{d_1}{d_1 + d_3} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{d_b \cos\alpha}{d_m}\right),$$

где d_b — диаметр тела качения подшипника, $d_m = \dfrac{d_1 + d_3}{2}$ — средний диаметр подшипника, α — угол контакта.

Следовательно, для частоты вращения сепаратора n_s при фиксированном наружном кольце и вращающемся с частотой n внутреннем кольце имеем

$$n_s = n_h = \frac{n}{2}\left(1 - \frac{d_b \cos\alpha}{d_m}\right). \qquad (10.4.1)$$

Аналогично для случая, при котором наружное кольцо вращается с частотой n, а внутреннее неподвижно, получаем

$$n_s = \frac{n}{2}\left(1 + \frac{d_b \cos\alpha}{d_m}\right).$$

Очевидно, что частота n_2 вращения шарика вокруг собственной оси при относительном вращении колец равна

$$n_2 = \frac{n_1}{2}\left(\frac{d_m}{d_b} - \frac{d_b}{d_m}\cos^2\alpha\right),$$

где n_1 — частота вращения внутреннего кольца.

Важным фактором, определяющим работу подшипника при высоких скоростях вращения, является возникновение центробежных сил. Величина центробежной силы F_c, действующей на тело качения массой m, равна

$$F_c = 0{,}5 m d_m \omega_h^2 .$$

Наличие центробежных сил, зависящих от скорости вращения колец подшипника, а также динамических составляющих нагрузки, которые, кроме того, зависят от точности изготовления подшипника, определяет предельно допустимое значение скорости. Предельное значение скорости вращения зависит и от вида тела качения. Для роликоподшипников эта величина существенно меньше, чем для шарикоподшипников, из-за существования множественного контакта тела качения с дорожкой качения. Обычно допустимое значение скорости вращения задается изготовителем и приводится в каталогах на подшипник.

Отметим, что реальная кинематика шарикоподшипника, конечно, более сложная, тем не менее приведенные выше рассуждения позволяют правильно оценить главные факторы, влияющие на кинематические характеристики подшипника.

Статическое нагружение подшипника качения. Для корректного описания статического состояния следует ввести понятиее н е и д е а л ь н о г о подшипника. Дело в том, что любой подшипник изготавливается с погрешностями составляющих его деталей, и в этом смысле каждый из них неидеален. Однако при переходе к модели этими погрешностями пренебрегают, и подшипник рассматривается как идеально изготовленный. Такой вариант модели в дальнейшем будем называть просто подшипником, а вариант, при котором учитываются погрешности изготовления — неидеальным подшипником.

Если к радиальному подшипнику приложена внешняя радиальная нагрузка F_r, то со стороны тел качения на внутреннее кольцо будут действовать силы реакции. Центр подшипника перемещается в направлении приложения силы на величину δ. Это перемещение вызывается контактными деформациями вследствие взаимодействия тел качения с дорожками качения. Величины деформаций пропорциональны нагрузкам и зависят от угла расположения тела качения. Обозначим через δ контактное перемещение центрального тела качения, а через δ_φ — контактное перемещение текущего тела качения, расположенного под углом φ. Тогда если пренебречь погрешностью изготовления элементов подшипника и деформациями изгиба колец, то можно полагать, что распределение контактных перемещений в зависимости от местоположения тела качения подчиняется закону

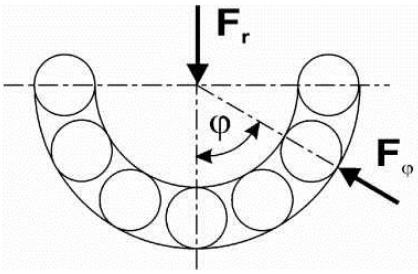


Рис. 10.4.5

$$\delta_\varphi = \delta \cos\varphi . \qquad (10.4.2)$$

Сила реакции F_φ со стороны текущего тела качения тела связана с перемещением в контакте δ_φ и может быть описана выражениями, полученными в главе 3.1 при решении контактной задачи теории упругости (рис.10.4.5). Для контакта роли-

ка с дорожкой качения эти зависимости можно приближенно описать линейными функциями

$$\delta_\varphi = c_r F_\varphi; \qquad \delta = c_r F, \tag{10.4.3}$$

а для шарикоподшипников — как

$$\delta_\varphi = c_b F_\varphi^{\frac{2}{3}}; \qquad \delta = c_b F^{\frac{2}{3}}, \tag{10.4.4}$$

где c_r и c_b — коэффициенты пропорциональности для роликоподшипника и шарикоподшипника соответственно; F — сила, действующая со стороны центрального тела качения.

Используя формулу расчета контактных деформаций (10.4.2) и соотношения (10.4.3) — (10.4.4), для роликоподшипника получаем

$$F_\varphi = F\cos\varphi, \tag{10.4.5}$$

а для шарикоподшипника —

$$F_\varphi = F\cos^{\frac{3}{2}}\varphi. \tag{10.4.6}$$

Поскольку в нагруженном состоянии внутреннее тело качения находится в равновесии, то для определения реактивных сил можно использовать уравнение равновесия.

Если предположить, что количество тел качения велико, то на выделенный участок с угловым размером $d\varphi$, расположенный под углом φ (рис.10.4.6), попадет число тел качения dz, равное $dz = \dfrac{z d\varphi}{2\pi}$. Тогда уравнение равновесия для случая радиального роликоподшипника (рис.10.4.2b) имеет вид

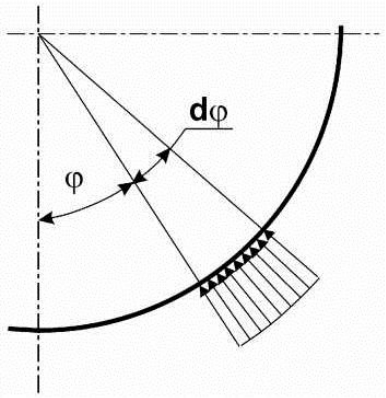


Рис.10.4.6

$$F_r = 2\int_0^{\pi/2} F_\varphi \cos\varphi dz,$$

или, с учетом (10.4.5),

$$F_r = \frac{zF}{\pi}\int_0^{\pi/2}\cos^2\varphi d\varphi = \frac{Fz}{4}. \tag{10.4.7}$$

Интегрирование в (10.4.7) производится по половине дуги, так как если в подшипнике первоначально нет осевой силы, то в контакте с дорожкой может находиться только половина тел качения. Другая половина тел качения контакта не образует, и для нее реакция принимается равной нулю.

С помощью (10.4.7) сила, действующая со стороны наиболее нагруженного тела качения при приложении радиальной нагрузки F_r, находится как

$$F = \frac{4F_r}{z}, \tag{10.4.8}$$

а на текущее тело качения —

$$F_\varphi = \frac{4F_r}{z}\cos\varphi . \qquad (10.4.9)$$

Вывод формул (10.4.8) и (10.4.9) проведен в предположении бесконечного числа тел качения и, следовательно, бесконечного числа точек их касания с кольцами. В предположении о том, что число тел качения конечно и лежит в диапазоне значений $z = 8 \div 20$, прямое суммирование в уравнении равновесия приводит к следующему результату для силы под центральным роликом:

$$F = \frac{4{,}08F_r}{z} . \qquad (10.4.10)$$

Иногда, принимая во внимание неидеальность подшипника, числовой коэффициент в (10.4.10) полагают равным 5. Сравнение формул (10.4.8) и (10.4.10) показывает, что возникающая в (10.4.7) при переходе от конечных сумм к интегральным ошибка мала, и результат (10.4.8), которым мы и будем пользоваться в дальнейшем, можно считать оправданным.

Так как сила реакции F действует нормально к поверхности контакта, то уравнение равновесия для радиально-упорного роликоподшипника следует записывать в проекции на направление этой нормали. При этом реактивная сила, действующая на кольцо от наиболее нагруженного тела качения, становится равной

$$F = \frac{4F_r}{z\cos\alpha} , \qquad (10.4.11)$$

а от текущего тела качения, расположенного под углом φ —

$$F_\varphi = \frac{4F_r}{z\cos\alpha}\cos\varphi . \qquad (10.4.12)$$

Уравнение равновесия для радиально-упорного шарикоподшипника с учетом (10.4.6) записывается как

$$F_r = \frac{zF}{\pi}\cos\alpha \int_0^{\pi/2} \cos^{5/2}\varphi d\varphi ,$$

откуда

$$F = \frac{4{,}37F_r}{z\cos\alpha} . \qquad (10.4.13)$$

При этом нагрузка, воспринимаемая текущим телом качения шарикоподшипника, равна $F_\varphi = \dfrac{4{,}37F_r}{z\cos\alpha}\cos\varphi$. (10.4.14)

Если учесть влияние зазора в подшипнике, то выражение (10.4.13) можно переписать в виде

$$F = \frac{5{,}0F_r}{z\cos\alpha} . \qquad (10.4.15)$$

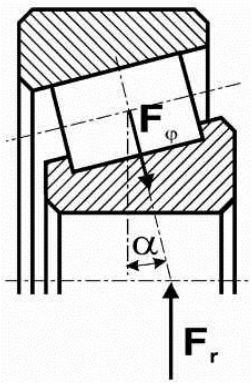


Рис.10.4.7

Даже если радиально-упорный подшипник находится под действием только радиальной силы, тем не менее возникает дополнительная осевая сила реакции S_a, обусловленная наличием угла наклона тел качения (рис.10.4.7). Определим значение этой силы. С этой целью просуммируем осевые составляющие нормальных реакций от радиальной нагрузки, что для роликоподшипника с учетом (10.4.12) дает

$$S_a = 2\int_0^{\pi/2} F_\varphi \sin\alpha dz = \frac{z}{\pi}\int_0^{\pi/2} \frac{4F_r}{z\cos\alpha}\sin\alpha\cos\varphi d\varphi, \qquad (10.4.16)$$

откуда

$$S_a = 1{,}3F_r tg\alpha .$$

Аналогично для шарикоподшипника с помощью (10.4.15) можно записать

$$S_a = 1{,}4F_r tg\alpha .$$

Для упрощения вычислений на практике без ограничения общности допустимо как для ролико-, так и для шарикоподшипников при расчете осевых сил пользоваться формулой

$$S_a = 1{,}5F_r tg\alpha , \qquad (10.4.17)$$

которая учитывает поправки на неидеальность изготовления подшипников и наличие зазора.

Если к оси радиально-упорного подшипника приложена осевая нагрузка F_a, то каждое из тел качения воспринимает одинаковую нормальную силу (напомним, что речь идет об идеальном подшипнике). Величина этой нормальной силы в контакте текущего тела качения с дорожкой качения равна

$$F_\varphi = \frac{F_a}{z\sin\alpha} . \qquad (10.4.18)$$

Для упорного подшипника $\alpha = 90^0$, поэтому из (10.4. 18) следует

$$F_\varphi = \frac{F_a}{z} .$$

Рассмотрим теперь работу роликоподшипника при условии смешанного нагружения, при котором радиальная и осевая нагрузки действуют одновременно. После приложения нагрузки, действующей вдоль оси вала под подшипником, каждое тело качения воспринимает равную по величине нормальную силу (рис.10.4.8a). Если в дальнейшем на подшипник действует радиальная сила, то при большой начальной осевой нагрузке наличие радиальной составляющей не приведет к появлению нормальных зазоров под телом качения. Нагрузка, действующая в направлении центра подшипника, перераспределит величины нормальных реакций на телах качения (рис.10.4.8b). Качественно это приведет к возрастанию реактивных сил на телах качения, расположенных со стороны приложения радиальной силы, и их уменьшению с противоположной стороны. Уравнение равновесия для роликоподшипника (10.4.7)

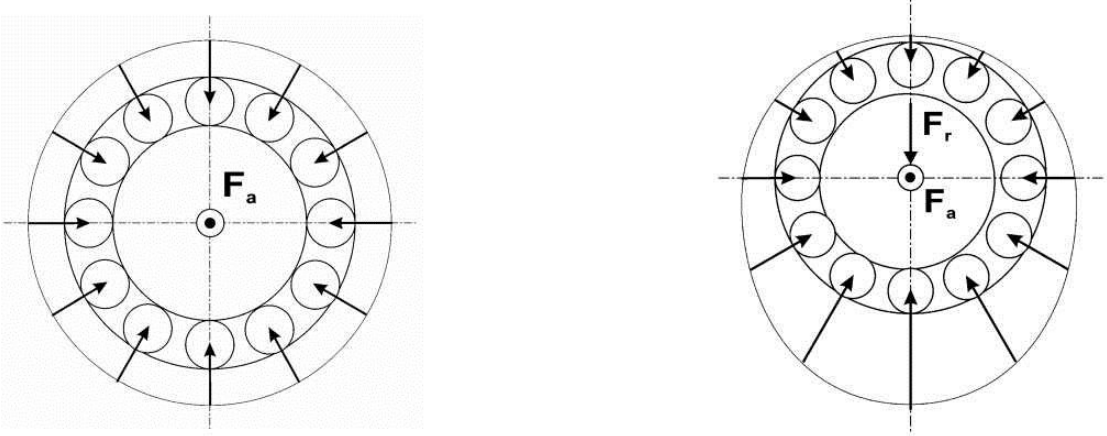


Рис.10.4.8

при таком соотношении радиальной и осевой составляющих нагрузки с учетом (10.4.5) может быть записано в следующем виде:

$$F_r = 4\int_0^{\pi/2} F_\varphi \cos\varphi dz = \frac{2zF}{\pi}\int_0^{\pi/2}\cos^2\varphi d\varphi = \frac{Fz}{2}. \qquad (10.4.19)$$

Подчеркнем, что под F здесь подразумевается сила, воспринимаемая центральным (наиболее нагруженным) телом качения. Разрешая (10.4.19) относительно F, приходим к выводу, что сила, действующая со стороны центрального ролика, вследствие радиального нагружения уменьшается в два раза по сравнению с вариантом без осевой силы (см. 10.4.8 и 10.4.11).

Для радиального роликоподшипника она равна

$$F = \frac{2F_r}{z}, \qquad (10.4.20)$$

а для радиально-упорного —

$$F = \frac{2F_r}{z\cos\alpha}. \qquad (10.4.21)$$

При этом нормальная реакция на текущее тело качения от радиальной составляющей внешней нагрузки приобретает вид

- для радиального роликоподшипника

$$F_\varphi = \frac{2F_r}{z}\cos\varphi;$$

- для радиально-упорного роликоподшипника

$$F_\varphi = \frac{2F_r}{z\cos\alpha}\cos\varphi. \qquad (10.4.22)$$

К аналогичному выводу приводит рассмотрение, проведенное для шарикоподшипника.

С учетом сказанного выше полная нормальная реакция текущего тела качения

(расположенного под углом φ) радиально-упорного роликоподшипника определится как сумма составляющих (10.4.18) и (10.4.22),

$$F_\varphi = \frac{2F_r}{z\cos\alpha}\cos\varphi + \frac{F_a}{z\sin\alpha}. \qquad (10.4.23)$$

Сумма проекций нормальных реакций на ось подшипника имеет вид

$$S_a = \int_0^{2\pi} F_\varphi \sin\alpha dz = \left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{2F_r}{\cos\alpha}\cos\varphi d\varphi + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{F_a}{\sin\alpha}d\varphi\right]\sin\alpha\,. \qquad (10.4.24)$$

Вычисление интегралов в правой части (10.4.24) и последующие простые преобразования приводят к выражению

$$S_a = F_a. \qquad (10.4.25)$$

Полученный результат (10.4.25) позволяет сделать вывод о том, что при одновременном нагружении подшипника внешними осевой и радиальной силами дополнительной внутренней осевой составляющей от радиальной нагрузки не возникает. Это обстоятельство отличает смешанное нагружение от чисто радиального, при котором на вал вследствие наличия внешней радиальной нагрузки будет действовать осевая составляющая реакции, равная (10.4.17).

В качестве примера рассмотрим осевые нагрузки в подшипниках для различных схем установки последних. На рис.10.4.9 представлены две типовые схемы установки радиально упорных подшипников, имеющие свои названия: схема "X" (рис.10.4.9а) и схема "O" (рис.10.4.9б). Ввиду конструктивных особенностей подшипники, установленные по схеме "X", искусственно уменьшают расстояние между опорами, что благоприятно влияет на вал в случае, когда нагрузка приложена между опорами. Если нагрузка расположена на консоли, то более целесообразным конструктивным решением является использование схемы "O". Это объясняется тем, что перемещение на консоли уменьшается при увеличении расстояния между опорами.

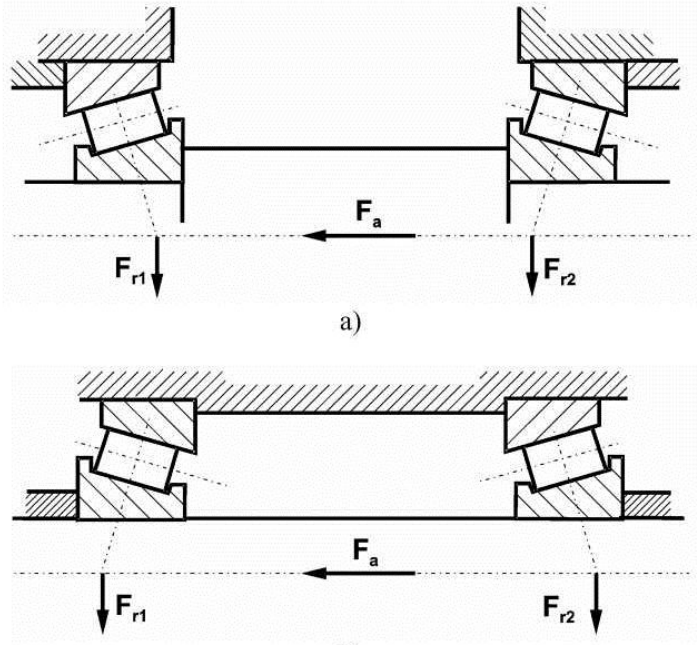


Рис. 10.4.9

Отметим, что для радиально-упорных подшипников необходимо предусмотреть регулировку осевого натяга или зазора, которая реализуется осевым перемещением одного из колец подшипника. Это перемещение, в свою

очередь, достигается либо за счет использования набора тонких металлических прокладок, которые определяют осевое положение подшипника, либо путем применения винтов, регулирующих смещения колец подшипника, и т. д.

При расположении подшипников по схеме "X" вал стремится переместиться в направлении приложения внешней осевой силы, что приводит к перераспределению действующих на подшипники осевых сил. Например, подшипник первой опоры окажется более нагруженным, чем подшипник второй опоры. Для схемы "O", напротив, более нагруженным становится подшипник второй опоры. Если подшипники после сборки имели нулевой зазор, то первый подшипник схемы "X" и второй подшипник схемы "O" получают осевой натяг, при котором последующее радиальное нагружение не приведет к возникновению дополнительных осевых сил. В других подшипниках, наоборот, появляется зазор, и при их дальнейшем радиальном нагружении появятся осевые реактивные силы S_a.

Исходя из этого, полное осевое усилие первой опоры, установленной по схеме "X", можно представить в виде

$$F_{a1} = F_a + S_{a2},$$

а второй —

$$F_{a2} = S_{a2}.$$

Для опор, установленных по схеме "O", картина осевого нагружения будет обратной, а именно

$$F_{a1} = S_{a1}; \qquad F_{a2} = F_a + S_{a1}.$$

В качестве геометрической характеристики подшипника, определяющей его осевую нагрузочную способность, применяется коэффициент $e = 1{,}5tg\alpha$. Значения этого коэффициента приводятся в соответствующих таблицах для подшипников различных типов. Следует отметить, что формула расчета значения e одинакова как для роликоподшипников, так и для шарикоподшипников. Разница заключается только в том, что для роликоподшипников угол контакта остается постоянным и не зависит от нагрузки, а для шарикоподшипников величина фактического угла контакта зависит от геометрии подшипника и от величины внешнего осевого усилия.

Как уже отмечалось выше, при радиальном нагружении радиально-упорного подшипника в нем появляется реактивная осевая составляющая (10.4.17). Если приложить к такому подшипнику осевое усилие обратного знака, то до тех пор, пока осевая нагрузка на подшипник F_a не будет превышать S_a, ее отрицательным влиянием при расчете подшипника можно пренебречь. Условие, при котором в расчете нагрузки на подшипник осевая сила игнорируется, имеет вид

$$F_a \le 1{,}5F_r tg\alpha,$$

или

$$\frac{F_a}{F_r} \le e.$$

В противном случае, т. е. когда $\frac{F_a}{F_r} > e$, компонента осевой силы должна учитываться при расчете.

В действительности картина распределения осевых сил несколько более сложная, чем описанная выше, но для приближенной оценки при выполнении инженерных расчетов такое рассмотрение допустимо.

Напряжения и деформации. Нагрузки, действующие на тела качения, являются основой для определения таких важных параметров подшипника, как смещение его колец и контактные напряжения.

Расчет напряжений и деформаций можно выполнять, используя результаты решения описанной ранее контактной задачи теории упругости (глава 3.2).

Для случая шарикоподшипника запишем параметры площадки контакта (здесь и далее в обозначениях, принятых в главе 3.2, формула (3.2.11), и при условии $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $\mu = 0{,}3$):

$$2a = 0{,}0472 n_a \left(\frac{F}{\sum\limits_{i,j} k_{ij}} \right)^{1/3}, \qquad (10.4.26)$$

$$2b = 0{,}0472 n_b \left(\frac{F}{\sum\limits_{i,j} k_{ij}} \right)^{1/3}. \qquad (10.4.27)$$

Перемещение δ и наибольшее напряжение σ_H в контакте определяются согласно (3.2.11) и (3.2.12) как:

$$\delta = 2{,}79 \cdot 10^{-4} n_\delta \left(\sum_{i,j} k_{ij}^2 F^2 \right)^{1/3};$$

$$\sigma_H = p_0 = \frac{858}{n_a n_b} \left(\sum_{i,j} k_{ij}^2 F \right)^{1/3}. \qquad (10.4.28)$$

Для случая шарикоподшипника формула (10.4.28) приобретает вид

$$\sigma_H = C_{MH} \sqrt[3]{\frac{F}{d_b^2}}, \qquad (10.4.29)$$

где C_{MH} — некоторая константа, зависящая от геометрии подшипника и материала.

В случае линейного контакта, который имеет место в роликоподшипнике, из решения контактной задачи следует выражение (3.2.19) для полуширины площадки контакта b:

$$b = \sqrt{\frac{4}{\pi} \left[\frac{F C_M}{l} \cdot \frac{\rho_1 \rho_2}{\rho_2 \pm \rho_1} \right]}. \qquad (10.4.30)$$

При этом наибольшее напряжение в контакте в соответствии с (3.2.20) равно

$$\sigma_H = p_0 = \sqrt{\frac{1}{\pi}\left[\frac{F}{lC_M}\cdot\frac{\rho_2 \pm \rho_1}{\rho_1\rho_2}\right]}. \qquad (10.4.31)$$

Задача расчета деформаций роликоподшипника рассмотрена в [24]. При практических расчетах перемещений, полагая $E = 2\cdot 10^5$ МПа, $\mu = 0{,}3$, зависимость (3.2.23) можно заменить некоторой степенной функцией, а именно

$$\delta = 4{,}05\cdot 10^{-5}\frac{F^{0{,}925}}{l^{0{,}85}}. \qquad (10.4.32)$$

Ввиду близости показателя степени в (10.4.32) к единице часто полагают, что перемещение δ линейно зависит от нагрузки.

Важным критерием расчета прочности подшипника является отсутствие заметных пластических деформаций в контакте тела качения с дорожкой. Назовем это *условием статической прочности*, которое записывается в виде

$$\sigma_H \le \sigma_{Ha}, \qquad (10.4.33)$$

где σ_{Ha} — допускаемое напряжение в контакте, полученное из условия предельно допустимых значений пластических деформаций. В результате выполненных исследований установлено, что эти предельно допустимые значения зависят от типа контакта и равны:

- σ_{Ha} = 4200 МПа — для шариковых подшипников (кроме сферических);
- σ_{Ha} = 4600 МПа — для сферических самоустанавливающихся подшипников;
- σ_{Ha} = 4000 МПа — для роликоподшипников.

Статическая грузоподъемность подшипников. Для подшипников, скорость вращения вала под которыми подчиняется условию $n \le 10$ об/мин, усталостные разрушения маловероятны, поэтому критерием их расчета является статическая прочность.

Условие статической прочности (10.4.33) можно записать для подшипника в целом, введя понятие статической грузоподъемности. Под статической грузоподъемностью будем понимать максимальную нагрузку (радиальную C_{0r} для радиальных и радиально-упорных подшипников и осевую C_{0a} для упорных и упорно-радиальных), при приложении которой остаточная деформация наиболее нагруженного тела качения не превышает $0{,}0001d_b$.

Рассчитаем статическую грузоподъемность шарикоподшипника, основываясь на рекомендациях ISO.

Для радиальных и радиально-упорных шарикоподшипников условие статической прочности (10.4.33) с учетом (10.4.29) и (10.4.15) запишем в виде

$$\sigma_H = C_{MH}\sqrt[3]{\frac{5F_r}{zd_b^2\cos\alpha}} \le \sigma_{Ha}. \qquad (10.4.34)$$

Разрешая (10.4.34) относительно F_r в предположении о том, что радиус дорожки качения r_s в поперечном сечении подчиняется условию $r_s \le 0{,}53 d_b$, можно получить

$$C_{0r} = 12{,}3 i z d_b^2 \cos\alpha . \qquad (10.4.35)$$

Аналогично для подшипников иных типов имеем:

для сферических —

$$C_{0r} = 3{,}33 i z d_b^2 \cos\alpha , \qquad (10.4.36)$$

для упорных и упорно-радиальных —

$$C_{0a} = 49 z d_b^2 \sin\alpha . \qquad (10.4.37)$$

Здесь i и z — число рядов и число тел качения в ряду соответственно.

Статическая радиальная грузоподъемность C_{0r} и статическая осевая грузоподъемность C_{0a} роликоподшипников определяются аналогичными выражениями:

$$C_{0r} = 21{,}6 i z l \cos\alpha ; \quad C_{0a} = 98{,}1 z d_b l \sin\alpha . \qquad (10.4.38)$$

Условие статической прочности (10.4.33) для радиальных и радиально-упорных подшипников при радиальном нагружении можно записать в форме

$$C_{0r} > F_r .$$

В этом неравенстве статическая грузоподъемность подшипника сравнивается с наибольшим значением радиальной силы от внешней нагрузки.

Для упорных и упорно-радиальных подшипников, к оси которых приложена внешняя нагрузка в направлении этой оси, получаем

$$C_{0a} > F_a .$$

Если подшипник подвергается воздействию *смешанной нагрузки*, ее можно условно привести к эквивалентной радиальной P_{0r} (для радиальных и радиально-упорных подшипников) и осевой P_{0a} (для упорных и упорно-радиальных) силам. Критерием такого приведения является равенство нормальных напряжений в контакте, которое мы будем понимать следующим образом: эквивалентная нагрузка вызывает точно такие же нормальные напряжения в контакте наиболее нагруженных тел качения, которые возникают при действительных условиях нагружения.

Условие статической прочности для смешанного контакта в радиальных и радиально-упорных подшипниках имеет вид

$$C_{0r} > P_{0r} ,$$

в упорных и упорно-радиальных —

$$C_{0a} > P_{0a} .$$

Числовые значения эквивалентных нагрузок P_{0r} и P_{0a} можно определить из равенства максимальных нормальных напряжений. Покажем это.

Так как при радиальном нагружении радиальных и радиально-упорных роликоподшипников наибольшая нормальная реакция определяется выражением (10.4.11), а при смешанном — (10.4.23) при $\cos\varphi = 1$, то равенство наибольших нормальных реакций от эквивалентного радиального (при действии эквивалентной нагрузки P_{0r}) и смешанного воздействий записывается как

$$\frac{4P_{0r}}{z\cos\alpha} = \frac{2F_r}{z\cos\alpha} + \frac{F_a}{z\sin\alpha},$$

или

$$P_{0r} = X_0 F_r + Y_0 F_a; \quad X_0 = 0{,}5; \quad Y_0 = 0{,}25ctg\alpha. \qquad (10.4.39)$$

Аналогично для упорных и упорно-радиальных подшипников при эквивалентном осевом нагружении с помощью (10.4.18) получаем

$$\frac{P_{0a}}{z\sin\alpha} = \frac{2F_r}{z\cos\alpha} + \frac{F_a}{z\sin\alpha},$$

или

$$P_{0a} = X_0 F_r + Y_0 F_a; \quad X_0 = 2; \; Y_0 = 1. \qquad (10.4.40)$$

В коэффициенты X_0 и Y_0 для радиальных и радиально-упорных шариковых подшипников можно ввести несущественные поправки, связанные с изменением угла контакта в зависимости от нагрузки. Аналогичные поправки вносятся в эти коэффициенты и для радиальных и радиально-упорных роликовых подшипников из-за погрешностей их изготовления. По этой причине в литературе встречаются слегка подкорректированные значения X_0 и Y_0 (см. таблицы 10.4.1 и 10.4.2).

Долговечность подшипника в условиях радиального нагружения. Как уже упоминалось выше, статическая прочность является основным критерием расчета только при небольших значениях частоты вращения подшипника, т. е. при условии $n \le 10$ об/мин. В противном случае кроме расчета статической прочности необходимо определять долговечность подшипника.

Основной причиной выхода из строя подшипников качения является *усталостное выкрашивание* дорожек качения колец и тел качения под действием переменных контактных напряжений. Явление контактного выкрашивания представляет собой вялотекущий процесс зарождения трещины, ее дальнейшего роста и последующего выхода на поверхность. Это может привести к скалыванию частиц металла с поверхности контакта. Ранее было показано (глава 2.10), что сдвиг слоев металла способен вызвать необратимые процессы появления трещин. Поэтому логично предположить, что зарождение трещины начинается с тех точек объема, где имеют место наибольшие напряжения сдвига. Перемена напряжений, вызванная вращением подшипника, запускает процесс роста трещины. Линейные размеры трещины увеличиваются с возрастанием числа циклов нагружения и напряжений в контакте.

Таблица 10.4.1. **Коэффициенты X_0 и Y_0 для радиальных и радиально-упорных шариковых подшипников**

α, °	Однорядные		Двухрядные	
	X_0	Y_0^{*1}	X_0	Y_0^{*1}
Радиальные шариковые				
—	0,6	0,5	0,6	0,5
Радиально-упорные шариковые				
15	0,5	0,46	1	0,92
20	0,5	0,42	1	0,84
25	0,5	0,38	1	0,76
30	0,5	0,33	1	0,66
35	0,5	0,29	1	0,58
40	0,5	0,26	1	0,52
45	0,5	0,22	1	0,44
Самоустанавливающиеся шариковые				
10	0,5	$0{,}22ctg\alpha$	1	$0{,}44ctg\alpha$

*1 Величины Y_0 для промежуточных углов контакта определяются линейным интерполированием

Таблица 10.4.2. **Коэффициенты X_0 и Y_0 для радиальных и радиально-упорных роликовых подшипников**

Тип подшипника	X_0	Y_0
Однорядный $\alpha \neq 0$	0,5	$0{,}22ctg\alpha$
Двухрядный $\alpha \neq 0$	1	$0{,}44ctg\alpha$

Для оценки долговечности подшипника необходимо рассмотреть процесс нагружения тел качения и дорожек качения во времени, который, как показано в главе 2, можно описать кривой выносливости типа (2.10.8):

$$\sigma_H^m N = const\,, \qquad (10.4.41)$$

Здесь σ_H — напряжение в контакте тела качения с дорожкой качения;

N — число циклов нагружения тела качения опасной точки;

m — показатель степени кривой выносливости, причем для случая контакта шарика с дорожкой качения можно принять m =9.

Разрушение подшипника начинается в местах возникновения максимальных контактных напряжений дорожек качения. В том случае, когда наружное кольцо подшипника неподвижно, а внутреннее вращается, напряжение достигнет наи-

большего значения на дорожке качения наружного кольца в точке приложения радиальной нагрузки, если в этой точке размещено тело качения.

Если сепаратор подшипника совершает один полный оборот, то число нагружений наиболее опасной точки будет равно числу тел качения в подшипнике z. Следовательно, полное число циклов нагружения связано с числом оборотов сепаратора, так как после каждого оборота тела качения возвращаются в исходное положение, и цикл нагружения начинается сначала.

Число циклов нагружения N наиболее опасной точки дорожки качения за время t (измеренное в часах) по аналогии с формулой (7.1.104), полученной при рассмотрении нагружения зуба зубчатого колеса, равно

$$N = 60tn_s z\,,$$

где n_s, $[n_s]$=[об/мин] — частота вращения сепаратора.

Для случая, когда внешнее кольцо неподвижно, а внутреннее вращается, с учетом (10.4.1) имеем

$$N = 60tz\frac{n}{2}\left(1-\frac{d_b\cos\alpha}{d_m}\right). \qquad (10.4.42)$$

где n, $|n|$=|об/мин| — частота вращения вала.

В свою очередь, наибольшее контактное напряжение с учетом (10.4.29) и (10.4.15) равно

$$\sigma_H = C_{MH}\sqrt[3]{\frac{5F_r}{d_b^2 z\cos\alpha}}\,. \qquad (10.4.43)$$

Тогда с помощью (10.4.42) и (10.4.43) уравнение кривой выносливости (10.4.41) переписывается в виде

$$\left[C_{MH}\sqrt[3]{\frac{5F_r}{d_b^2 z\cos\alpha}}\right]^m \cdot 60tz\frac{n}{2}\left(1-\frac{d_b\cos\alpha}{d_m}\right) = const\,. \qquad (10.4.44)$$

Введем далее понятие *ресурса*, который измеряется в миллионах оборотов вала, а именно

$$L = \frac{60tn}{10^6}\,.$$

Опираясь на это определение, выражение (10.4.44) можно представить как

$$F_r L^{\frac{1}{3}} = \left[\frac{2\cdot 10^{\,6}\cdot const}{\left(1-\frac{d_b\cos\alpha}{d_m}\right)}\right]^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{5C_{MH}^3} d_b^2 z^{\frac{2}{3}}\cos\alpha\,.$$

Вынося за скобки знаменателя правой части $\cos\alpha$ и полагая для малых углов $1/\cos\alpha \cong 1$, перепишем это выражение в форме

$$F_r L^3 = f_c d_b^2 z^{\frac{2}{3}} \cos^{\frac{2}{3}} \alpha , \qquad (10.4.45)$$

где f_c — некоторая константа, зависящая от типа подшипника, его геометрии и материала, из которого он изготовлен (табл. 10.4.4—10.4.7),

$$f_c = \frac{1}{5C_{MH}^3}\left[\frac{2\cdot 10^{-6} const}{\left(1-\frac{d_b}{d_m}\right)}\right]^{\frac{1}{3}}.$$

Поскольку правая часть формулы (10.4.45) представляет собой постоянную величину, то можно записать

$$F_r L^3 = C . \qquad (10.4.46)$$

где С — характеристика подшипника, называемая динамической грузоподъемностью, равная

$$C = f_c d_b^2 z^{\frac{2}{3}} \cos^{\frac{2}{3}} \alpha . \qquad (10.4.47)$$

Физический смысл динамической грузоподъемности ясен из 10.4.46: динамическая грузоподъемность представляет собой радиальную нагрузку, при приложении которой подшипник способен совершить до разрушения один миллион оборотов.

Значение динамической грузоподъемности, рассчитанное по формуле (10.4.47), уточняется результатами экспериментальных исследований долговечности подшипников и приводится в специализированных каталогах. Ресурсные испытания подшипников качения характеризуются значительным рассеянием полученных результатов, поэтому следует отметить, что приведенные в каталогах величины динамической грузоподъемности, если это не оговорено особо, соответствуют 90% вероятности безотказной работы. Это означает, что при такой вероятности безотказной работы 10% подшипников из партии не доработают до заявленной долговечности и разрушатся раньше ожидаемого срока.

Если от подшипника требуется более высокая надежность, то расчетное время работы подшипника, рассчитываемое численно методами теории надежности, уменьшится.

Говоря о рассеянии ресурсных испытаний подшипников, необходимо отметить, что статистически результаты рассеяния можно описать распределением Вейбулла (1.1.27). Учет надежности при определении времени безотказной работы подшипников ведется исходя из этого закона распределения рассеяния.

С учетом сказанного выше для обеспечения большей надежности величину долговечности следует умножить на коэффициент a_1 (таблица 10.4.3).

В зависимости от специальных свойств подшипника и условий его работы

производители подшипников могут рекомендовать и другие повышающие или понижающие долговечность коэффициенты.

Таблица 10.4.3. **Коэффициент a_1**

Надежность, %	90	95	96	97	98	99
Коэффициент a_1	1,00	0,62	0,53	0,44	0,33	0,21

В общем случае нагружения ресурс работы шарикоподшипника L в зависимости от приложенной к нему нагрузки P равен согласно (10.4.46)

$$L = \left(\frac{C}{P}\right)^3 \tag{10.4.48}$$

а роликоподшипника —

$$L = \left(\frac{C}{P}\right)^{\frac{10}{3}}. \tag{10.4.49}$$

Если подшипник эксплуатируется при нормальной температуре под действием статического внешнего нагружения, причем наружное кольцо подшипника неподвижно, а внутреннее вращается, то под P понимается радиальная сила.

Следует отметить, что выкрашивание дорожек качения колец и связанное с этим процессом разрушение постепенно приводят к увеличению вибрации в опоре, изменению ее точности, интенсивному износу, появлению шума и т. д. Это является сигналом для замены подшипника, хотя фактическое его разрушение может наступить значительно позже.

Удобно в качестве единицы измерения вместо долговечности L, измеряемой в миллионах оборотов, использовать долговечность L_h, выраженную в часах. Связь между L и L_h задается формулой

$$L_h = \frac{L \cdot 10^6}{60n}, \tag{10.4.50}$$

где n — $[n]$=[об/мин] — скорость вращения подшипника.

Динамическая грузоподъемность подшипников различных типов. При выводе расчетных зависимостей (10.4.42—10.4.47) для динамической грузоподъемности предполагалось, что внешняя нагрузка действует статически и постоянна во времени. Под нагрузкой мы будем понимать только радиальную силу для радиальных и радиально-упорных подшипников и только осевую — для упорных и упорно-радиальных. Такой вариант нагружения назовем *базовым вариантом*.

С учетом результатов экспериментальных исследований и соотношения (10.4.47) радиальная грузоподъемность шариковых радиальных и радиально-упорных подшипников вычисляется как

$$C = f_c (i\cos\alpha)^{0,7} z^{2/3} d_b^{1,8}, \qquad d_b \le 25,4;$$
$$C = 3,647 f_c (i\cos\alpha)^{0,7} z^{2/3} d_b^{1,4}, \qquad d_b > 25,4.$$

Значения коэффициента f_c приведены в таблицах 10.4.4 — 10.4.7.

Динамическая грузоподъемность для упорных и упорно-радиальных однорядных и двойных шариковых подшипников имеет вид

$$C = f_c z^{2/3} d_b^{1,8}, \qquad d_b \le 25{,}4, \qquad \cos\alpha = 90^0;$$

$$C = f_c (\cos\alpha)^{0,7} (tg\alpha) z^{2/3} d_b^{1,8}, \qquad d_b \le 25{,}4, \qquad \cos\alpha \ne 90^0;$$

$$C = 3{,}647 f_c z^{2/3} d_b^{1,4}, \qquad d_b > 25{,}4, \qquad \cos\alpha = 90^0;$$

$$C = 3{,}647 f_c (\cos\alpha)^{0,7} (tg\alpha) z^{2/3} d_b^{1,4}, \qquad d_b > 25{,}4, \qquad \cos\alpha \ne 90^0.$$

Здесь z — число тел качения, которые воспринимают нагрузку в одном направлении при одностороннем осевом нагружении.

Таблица 10.4.4. **Значения коэффициента f_c для радиальных и радиально-упорных шарикоподшипников**

$\frac{d_b \cos\alpha}{d_m}$	Радиально однорядные, радиально-упорные однорядные и двухрядные	Радиальные двухрядные (несамоустанавливающиеся	Радиальные сферические двухрядные	$\frac{d_b \cos\alpha}{d_m}$	Радиально однорядные, радиально-упорные однорядные и двухрядные	Радиальные двухрядные (несамоустанавливающиеся	Радиальные серические двухрядные
0,05	46,7	44,2	17,3	0,22	59,6	56,5	35,2
0,06	49,1	46,5	18,7	0,24	59,0	55,9	36,8
0,07	51,1	48,4	19,9	0,26	58,2	55,1	38,3
0,08	52,9	50,1	21,1	0,28	57,2	54,2	39,4
0,09	54,4	51,4	22,3	0,30	56,02	53,1	40,3
0,10	55,6	52,7	23,4	0,32	54,8	52,0	41,0
0,12	57,5	54,5	25,6	0,34	53,3	50,5	41,2
0,14	58,9	55,8	27,6	0,36	51,7	49,1	41,3
0,16	59,6	56,6	29,7	0,38	50,0	47,4	41,0
0,18	59,6	56,8	31,7	0,40	48,3	45,8	40,4
0,20	59,9	56,8	33,6				

Для радиальных и радиально-упорных однорядных и двойных роликоподшипников имеем

$$C = f_c (i l_b \cos\alpha)^{7/9} z^{3/4} d_b^{29/27}.$$

Для роликовых упорных и упорно-радиальных подшипников принимаем

$$C = f_c l_b^{7/9} z^{3/4} d_b^{29/27} \qquad \text{если } \alpha = 90^0;$$

$$C = f_c (l_b \cos\alpha)^{7/9} (tg\alpha) z^{3/4} d_b^{29/27} \qquad \cos\alpha \neq 90^0.$$

Здесь l_b — длина ролика, равная длине контактной линии l.

Эквивалентная нагрузка. Под нагрузкой P, приложенной к подшипнику, в общем случае понимают приведенную, или *эквивалентную*, динамическую нагрузку. Приведенной динамической нагрузкой называют силу, которая, действуя на подшипник, обеспечивает такой же расчетный срок службы, как и при действительных условиях нагружения.

Таблица 10.4.5. **Значения коэффициента f_c для упорных и упорно-радиальных шарикоподшипников**

$\frac{d_b}{d_m}$ (при $\alpha=90^0$) $\frac{d_b\cos\alpha}{d_m}$ (при $\alpha\neq90^o$)	f_c для α^0				$\frac{d_b}{d_m}$ (при $\alpha=90^0$) $\frac{d_b\cos\alpha}{d_m}$ (при $\alpha\neq90^o$)	f_c для α^0			
	90	45	60	75		90	45	60	75
0,01	36,6	42,0	39,1	37,4	0,14	81,1	84,1	78,3	—
0,02	45,2	51,7	48,0	45,9	0,16	84,3	85,1	79,3	—
0,03	51,1	58,2	54,2	51,7	0,18	87,4	85,5	79,6	—
0,04	55,7	63,2	58,9	56,1	0,20	90,2	85,4	79,6	—
0,05	59,5	67,3	62,7	59,7	0,22	92,9	84,9	—	—
0,06	62,9	70,6	65,7	62,7	0,24	95,3	84,0	—	—
0,07	65,8	73,4	68,4	65,2	0,26	97,6	82,8	—	—
0,08	68,6	75,9	70,6	67,4	0,28	100,0	81,3	—	—
0,09	71,0	77,9	72,6	69,2	0,30	102,0	79,6	—	—
0,10	73,2	79,6	74,1	70,7	0,32	103,9	—	—	—
0,12	77,4	82,4	76,7	—	0,34	105,9	—	—	—

Таблица 10.4.6. **Значения коэффициентов f_c для радиальных и радиально-упорных роликовых подшипников**

$\frac{d_b \cos\alpha}{d_m}$	f_c	$\frac{d_b \cos\alpha}{d_m}$	f_c	$\frac{d_b \cos\alpha}{d_m}$	f_c
0,01	45,7	0,08	71,7	0,20	78,3
0,02	53,5	0,09	72,8	0,22	77,7
0,03	58,5	0,10	73,9	0,24	77,2
0,04	62,3	0,12	76,1	0,25	76,1
0,05	67,0	0,14	77,2	0,28	74,9
0,06	67,8	0,16	77,7	0,30	73,8
0,07	69,4	0,18	78,3		

В том случае, если условия работы и нагружения подшипника полностью соответствуют условиям, принятым при создании модели, полагаем

- $P = F_r$ — для радиального и радиально-упорного подшипников;
- $P = F_a$ — для упорного и упорно-радиального подшипников.

Если же если условия работы подшипника отличаются от описанных выше, в выражения для нагрузки следует ввести ряд поправок:

- $P = F_r V K_s K_t$ — для радиального и радиально-упорного подшипников;
- $P = F_a K_s K_t$ — для упорного и упорно-радиального подшипников,

где K_s и K_t — соответственно коэффициент безопасности, который вводится для того, чтобы учесть динамичность приложения нагрузки и ее влияние на долговечность подшипника (таблица 10.4.8), и температурный коэффициент (таблица 10.4.9); V — кинематический коэффициент, равный $V = 1$ при вращении внутреннего кольца и $V = 1{,}2$ — наружного.

Таблица 10.4.7. **Значения коэффициентов f_c для упорных и упорно-радиальных роликоподшипников**

$\frac{d_b \cos\alpha}{d_m}$	f_c		$\frac{d_b \cos\alpha}{d_m}$	f_c	
	$\alpha = 90^0$	$\alpha = 50^0$		$\alpha = 90^0$	$\alpha = 50^0$
0,01	99,3	104,8	0,20	193,0	170,9
0,05	137,8	143,3	0,25	198,4	165,4
0,10	165,4	165,4	0,30	209,5	—
0,15	182,0	170,9			

Таблица 10.4.8. **Значения коэффициента безопасности** K_s

Характер нагрузки на подшипник	K_s
Спокойная нагрузка	1
Легкие толчки, кратковременные перегрузки до 25%	$1{,}1 \div 1{,}2$
Умеренные толчки, кратковременные перегрузки до 50%	$1{,}3 \div 1{,}8$

Задача расчета долговечности подшипника сильно усложняется, если он воспринимает радиальную F_r и осевую F_a внешние нагрузки одновременно. Вариант смешанного нагружения может быть приведен к эквивалентному базовому варианту. Критерием такого приведения служит параметр долговечности. Согласно этому критерию, долговечность смешанного нагружения должна быть такой же, что и долговечность базового варианта, к которому это смешанное нагружение приводится.

В качестве основания для приведения можно принять тот факт, что постоянная нормальная нагрузка вызывает в телах качения такое же усталостное разрушение, что и переменная нагрузка F_{ne}, для которой сумма кубов нормальных постоянных сил равна сумме кубов нормальных переменных нагрузок F_{ni}. К такому выводу пришли исследователи после многочисленной серии усталостных испытаний. Аналитически это условие можно записать в виде

$$F_{n1}^3 + F_{n2}^3 + \ldots + F_{ni}^3 + \ldots + F_{nz}^3 = \sum_{i=1}^{z} F_{ne}^3 = const\ . \qquad (10.4.51)$$

Проиллюстрируем сказанное выше. Рассмотрим вначале случай радиального нагружения. Если базовый вариант радиального нагружения привести к действию на тела качения постоянной нормальной нагрузкой, то в интегральной форме такая зависимость, с учетом (10.4.12) и (10.4.51), выглядит как

$$F_{ne}^3 z = \sum_{i\ 1}^{i=z} F_{ni}^3 = 2\int_0^{\pi/2} \left(\frac{4F_r}{z\cos\alpha}\cos\varphi\right)^3 dz\ . \qquad (10.4.52)$$

Отсюда, полагая $dz = \dfrac{z d\varphi}{2\pi}$ и разрешая (10.4.52) относительно F_{ne}, получаем

$$F_{ne} = \frac{4F_r}{z\cos\alpha}\left[\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2}\cos^3\varphi d\varphi\right]^{1/3} = 0{,}6\frac{4F_r}{z\cos\alpha} = \frac{2{,}4F_r}{z\cos\alpha}\ . \qquad (10.4.53)$$

Для смешанного нагружения процедура определения эквивалентной нагрузки принципиально не отличается от рассмотренного выше случая. Нормальная реакция текущего тела качения $F_{n\varphi}$, вычисляемая по формуле (10.4.23), приводится к

эквивалентной постоянной нагрузке по результатам суммирования сумм кубов нормальных сил:

$$F_{ne}^3 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F_{n\varphi}^3 d\varphi; \qquad F_{n\varphi} = \frac{2F_r}{z\cos\alpha}\cos\varphi + \frac{F_a}{z\sin\alpha}. \qquad (10.4.54)$$

Таблица 10.4.9. **Значения температурного коэффициента K_t**

Рабочая температура, ^0C	K_t
125	1,05
150	1,1
175	1,15
200	1,25
225	1,35
250	1,4

Процедуру прямого суммирования можно упростить, заменив переменную составляющую нормального усилия ее средним значением, равным половине амплитудного. Это существенно облегчает вычисления и приводит к результатам, близким к результатам прямого суммирования.

Учитывая сформулированные выше упрощения, случай смешанного нагружения может быть заменен постоянным нормальным нагружением, как это было сделано ранее для случая радиального нагружения базового варианта. Сравнивая результаты приведений к постоянной нагрузке, можно найти базовый режим нагружения, который эквивалентен случаю, при котором подшипник воспринимает как радиальную, так и осевую составляющие внешнего нагружения. С учетом (10.4.54) запишем

$$F_{n\varphi} = \frac{F_r}{z\cos\alpha} + \frac{F_a}{z\sin\alpha} = \frac{2{,}4F_{re}}{z\cos\alpha}. \qquad (10.4.55)$$

Окончательно выражение для расчета приведенной радиальной нагрузки приобретает вид

$$F_{re} \cong 0{,}4F_r + 0{,}4F_a ctg\alpha. \qquad (10.4.56)$$

Очевидно, что в условиях смешанного нагружения подшипников величину P в общем виде можно определить из уравнения

$$P = (F_r VX + F_a Y)K_s K_t, \qquad (10.4.57)$$

где X и Y — коэффициенты приведения радиальной и осевой сил. Ранее было показано, что границей, отделяющей случай чисто радиального нагружения от смешанного, является параметр e. Между параметрами X, Y и e установлены следующие соотношения:

$$e = \frac{1-X}{Y}; \qquad Y = \frac{1-X}{e}.$$

При этом для роликоподшипников получаем

- $X = 0{,}4$ и $Y = 0{,}4ctg\alpha$, если $\dfrac{F_a}{F_r V} \geq e$;
- $X = 1{,}0$ и $Y = 0{,}0$, если $\dfrac{F_a}{F_r V} < e$.

Для шарикоподшипников фактический угол контакта, как известно, зависит от радиального зазора и является переменной величиной, поэтому при расчете коэффициентов X и Y вводится поправочный коэффициент η, величина которого определяется выражением $\eta = 1 - 0{,}33\sin\alpha$. Тогда

- $X = 1 - 0{,}6/\eta$ и $Y = 0{,}4ctg\alpha/\eta$, если $\dfrac{F_a}{F_r V} \geq e$;
- $X = 1{,}0$ и $Y = 0{,}0$, если $\dfrac{F_a}{F_r V} < e$.

Коэффициенты X и Y и параметр e для различных типов подшипников приведены в таблицах 10.4.10 — 10.4.12.

Таблица 10.4.10. **Значения коэффициентов X, Y и V для радиальных и радиально-упорных шарикоподшипников**

α, °	$\dfrac{F_a^{*1}}{C_0}$	V		X*1			Y*1			e*1
		по отношению к вектору нагрузки внутреннее кольцо:		Однорядные*2	Двухрядные*3		Однорядные*2	Двухрядные*3		
		вращается	неподвижно	$\dfrac{F_a}{VF_r} > e$	$\dfrac{F_a}{VF_r} \leq e$	$\dfrac{F_a}{VF_r} > e$	$\dfrac{F_a}{VF_r} > e$	$\dfrac{F_a}{VF_r} \leq e$	$\dfrac{F_a}{VF_r} > e$	
Радиальные однорядные										
—	0,014	1	1,2	0,56	1	0,56	2,30	0	2,30	0,19
	0,028						1,99		1,99	0,22
	0,056						1,71		1,71	0,26
	0,084						1,55		1,55	0,28
	0,11						1,45		1,45	0,30
	0,17						1,31		1,31	0,34
	0,28						1,15		1,15	0,38
	0,42						1,04		1,04	0,42
	0,56						1,00		1,00	0,44

α, °	$\frac{F_a^{*1}}{C_0}$	V		X*1			Y*1			e*1
		по отношению к вектору нагрузки внутреннее кольцо:		Однорядные*2	Двухрядные*3		Однорядные*2	Двухрядные*3		
		вращается	неподвижно	$\frac{F_a}{VF_r} > e$	$\frac{F_a}{VF_r} \le e$	$\frac{F_a}{VF_r} > e$	$\frac{F_a}{VF_r} > e$	$\frac{F_a}{VF_r} \le e$	$\frac{F_a}{VF_r} > e$	
Радиально-упорные										
10	0,014 0,029 0,057 0,086 0,11 0,17 0,29 0,43 0,57	1	1,2	0,46	1	0,75	1,68 1,71 1,52 1,41 1,34 1,23 1,10 1,01 1,00	2,18 1,98 1,76 1,63 1,55 1,42 1,27 1,17 1,16	3,06 2,78 2,47 2,29 2,18 2,00 1,79 1,64 1,63	0,29 0,32 0,36 0,38 0,40 0,44 0,49 0,54 0,54
15	0,015 0,029 0,058 0,087 0,12 0,17 0,29 0,44 0,58	1	1,2	0,44	1	0,72	1,47 1,40 1,30 1,23 1,19 1,12 1,02 1,00 1,00	1,65 1,57 1,46 1,38 1,34 1,26 1,14 1,12 1,12	2,39 2,28 2,11 2,00 1,93 1,82 1,66 1,63 1,63	0,38 0,40 0,43 0,46 0,47 0,50 0,55 0,56 0,56
20	—	1	1,2	0,43	1	0,70	1,00	1,09	1,63	0,57
25		1	1,2	0,41	1	0,67	0,87	1,92	1,41	0,68
30		1	1,2	0,39	1	0,63	0,76	0,78	1,24	0,80
35		1	1,2	0,37	1	0,60	0,66	0,86	1,07	0,95
40		1	1,2	0,35	1	0,57	0,57	0,55	0,93	1,14
Радиальные сферические двухрядные										
—	—	1	1	0,40	1	0,65	0,4 ctgα	0,42 ctgα	0,65 ctgα	1,5 ctgα

*1 Значения X, Y и *e* для нагрузок или углов контакта, не указанных в табл.10.4.10, определяют линейной интерполяцией.

*2 Для однорядных подшипников при $\frac{F_a}{VF_r} \le e$ принимают X=1. Y=0.

При определении эквивалентной нагрузки на однорядные сдвоенные радиально-упорные подшипники, обращенные друг к другу: одноименными торцами колец (типы 236000, 246000, 266000, 336000, 346000, 366000) принимают значения X и Y, как для двухрядных подшипников; разноименными торцами колец (типы 436000. 446000. 466000) принимают значения X и Y, как для однорядных подшипников.

*3 Только для двухрядных подшипников симметричной конструкции.

Таблица 10.4.11. **Коэффициенты X и Y для упорных и упорно-радиальных шариковых подшипников**

α^o	X	Y	X	Y	X	Y	e
	Одинарные*1		Двойные				
	$\frac{F_a}{F_r} > e$		$\frac{F_a}{F_r} \le e$		$\frac{F_a}{F_r} > e$		
50	0,73	1	1,37	0,57	0,73	1	1,49
55	0,81		1,60	0,56	0,81		1,79
60	0,92		1,90	0,55	0,92		2,17
65	1,06		2,30	0,54	1,06		2,68
70	1,28		2,90	0,53	1,28		3,43
75	1,66		3,89	0,52	1,66		4,67
80	2,43		5,86	0,52	2,43		7,09
85	4,80		11,75	0,51	4,80		14,29

*1 $\frac{F_a}{F_r} \le e$ не применять для одинарных подшипников.

Таблица 10.4.12. **Значения коэффициентов X, Y и V для радиальных и радиально-упорных роликоподшипников**

Типы подшипников	V		X*1			
	Внутреннее кольцо по отношению к вектору нагрузки		Однорядные		Двухрядные	
	вращается	неподвижно	$\frac{F_a}{VF_r} \le e$	$\frac{F_a}{VF_r} > e$	$\frac{F_a}{VF_r} \le e$	$\frac{F_a}{VF_r} > e$
Сферические и конические $\alpha \ne 0$	1	1,2	1	0,4	1	0,67

Типы подшипников	Y[*1]				c
	Однорядные		Двухрядные		Однорядные и двухрядные
	$\frac{F_a}{VF_r} \le c$	$\frac{F_a}{VF_r} > c$	$\frac{F_a}{VF_r} \le c$	$\frac{F_a}{VF_r} > c$	
Сферические и конические $\alpha \neq 0$	0	0,4ctgα	0,45ctgα	0.67ctgα	1.5ctgα

[*1] Для $F_a = 0$; Y = 0 и X = 1.

Расчет подшипников при переменных во времени внешних нагрузках. Режим нагружения, при котором внешняя нагрузка на подшипник меняется во времени, называется *переменным* (рис. 2.10.12). Если расчет такого подшипника в переменном режиме вести по максимальным нагрузкам, то его долговечность оказывается существенно меньше фактической. По этой причине в расчетах следует учитывать также характер внешнего нагружения.

Как показано ранее, наиболее просто это сделать, используя гистограмму относительного нагружения. Гистограмма, замененная плавной функцией, называется *графиком нагрузки*.

Учет переменности нагружения можно выполнить, используя гипотезу линейного суммирования. С этой целью определим долговечности подшипника при текущих значениях нагрузки как

$$L_1 = \left(\frac{C}{P_1}\right)^m, \; L_2 = \left(\frac{C}{P_2}\right)^m, \ldots, \; L_i = \left(\frac{C}{P_i}\right)^m, \qquad (10.4.58)$$

где m — показатель степени, причем $m = 3$ для шарикоподшипников и $m = 10/3$ для роликоподшипников.

Если фактическое время работы при текущей нагрузке P_i выразить через соответствующее этой нагрузке число циклов нагружения N_i, то, согласно гипотезе линейного суммирования, можно записать

$$\frac{N_1}{L_1} + \frac{N_2}{L_2} + \ldots + \frac{N_i}{L_i} + \ldots = 1. \qquad (10.4.59)$$

Выражение (10.4.59) с учетом (10.4.58) переписывается в форме

$$N_1 P_1^m + N_2 P_2^m + \ldots + N_i P_i^m + \ldots = N P_e^m,$$

или

$$P_e = \sqrt[m]{\frac{P_1^m N_1 + P_2^m N_2 + \ldots + P_i^m N_i + \ldots}{N}}.$$

Здесь N — число циклов нагружения за все расчетное время работы подшипника;

P_e — приведенная нагрузка, равнопрочная по критерию выносливости случаю переменного нагружения.

Так как число циклов нагружения пропорционально произведению $n_i t_i$, то

$$P_e = \sqrt[m]{\left(\frac{P_1^m n_1 t_1 + P_2^m n_2 t_2 + \ldots + P_i^m n_i t_i + \ldots}{n_m t} \right)}, \qquad (10.4.60)$$

где n_m — среднее число оборотов подшипника; t — полное время работы подшипника; t_i — время действия текущей нагрузки.

При постоянной скорости вращения подшипника имеем

$$P_e = \sqrt[m]{\left(\frac{P_1^m t_1 + P_2^m t_2 + \ldots + P_i^m t_i + \ldots}{t} \right)}. \qquad (10.4.61)$$

Выражение (10.4.61) можно записать в интегральной форме как

$$P_e = \sqrt[m]{\frac{1}{t}\left(\int_0^t P^m dt \right)}. \qquad (10.4.62)$$

Интегральная форма (10.4.62) более полно описывают долговечность подшипника, нагруженного переменной внешней нагрузкой.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Александров А. В., Потапов В. Д.* Основы теории упругости и пластичности. М.: Высшая школа, 1990. 400 с.
2. *Араманович И. Г., Лунц Г. Л., Эльсгольц Л. Э.* Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. М.: Наука, 1968. 416 с.
3. *Артоболевский И. И.* Теория механизмов и машин. М.: Наука, 1988. 640 с.
4. *Бабаков И. М.* Теория колебаний. М.: Наука, 1968. 560 с.
5. *Биргер И. А., Мавлютов Р. Р.* Сопротивление материалов. М.: Наука, 1986. 560 с.
6. *Бугров Я. С., Никольский С. М.* Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. М.: Наука, 1984. 192 с.
7. *Варданян Г. С., Андреев В. И., Атаров Н. М.* и др. Сопротивление материалов с основами теории упругости и пластичности. М.: Изд-во АСВ, 1995. 568 с.
8. *Вентцель Е. С, Овчаров Л. А.* Теория вероятностей и ее инженерные приложения. М.: Наука, 1988. 480 с.
9. *Воскресенский В. А., Дьяков В. И.* Расчет и проектирование опор скольжения (жидкостная смазка). М.: Машиностроение, 1990. 223 с.
10. *Дарков А. В., Шпиро Г. С.* Сопротивление материалов. М.: Высшая школа, 1989. 624 с.
11. *Демидов С. П.* Теория упругости. М.: Высшая школа, 1979. 432 с.
12. *Долинский Ф. В., Михайлов М. Н.* Краткий курс сопротивления материалов. М.:, Высшая школа, 1988. 432 с.
13. Зубчатые передачи: Справочник / Под ред. Гинзбурга Е. Г. Л.: Машиностроение. Ленингр. отд-ние, 1980. 416 с.
14. *Ильин В. А., Позняк Э. Г.* Линейная алгебра. М.: Наука, 1984. 320 с.
15. *Иосилевич Г. Б.* Детали машин. М.: Машиностроение, 1988. 368 с.
16. *Капур К., Ламберсон Л.* Надежность и проектирование систем. М.: Мир, 1980. 604 с.
17. *Кудрявцев В. Н.* Детали машин. Л.: Машиностроение. Ленингр. отд-ние, 1980. 464 с.
18. *Когаев В. П., Дроздов Ю. Н.* Прочность и износостойкость деталей машин. М.: Высшая школа, 1991. 319 с.
19. Когаев В.П. Расчеты на прочность при напряжениях, переменных во времени. М.: Машиностроение, 1993. 364 с.
20. *Коднир Д. С.* Контактная гидродинамика смазки деталей машин. М.: Машиностроение, 1976. 304 с.
21. *Красковский, Дружинин Ю.А.*, Расчет и проектирование элементов приборных устройств. М.: Высшая школа, 1991. с.
22. *Лахтин Ю. М., Леонтьева В. П.* Материаловедение. М.: Машиностроение, 1990. 528 с.
23. *Левитский Н. И.* Теория механизмов и машин. М.: Наука, 1990. 592 с.
24. *Макушин В. М.* Напряженное состояние и прочность деталей в местах кон-

такта. Труды кафедры сопротивления материалов МВТУ им. Н. Э. Баумана «Некоторые вопросы теоретических и экспериментальных исследований в области прочности». 1947. С. 79—145.
25. Машиностроение: Энциклопедия. Т. IV-1. М.: Машиностроение, 1995.
26. *Николаев Г. А., Куркин С. А., Винокуров В. А.* Сварные конструкции. Прочность сварных соединений и деформации конструкций. М.: Высшая школа, 1982. 272 с.
27. *Николаев Г. А., Винокуров В. А.* Сварные конструкции. Расчет и проектирование. М.: Высшая школа, 1990. 446 с.
28. Основы расчета и конструирования деталей и механизмов летательных аппаратов / Под ред. В. Н. Кестельмана и Г. И. Рощина. М.: Машиностроение, 1989. 456 с.
29. *Пановко Я. Г.* Введение в теорию механических колебаний. М.: Наука, 1991. 256 с.
30. *Перель Л. Я., Филатов А. А.* Подшипники качения: Справочник. М.: Машиностроение, 1992. 608 с.
31. *Серенсен С. В., Громан М. Б., Когаев В. П.* и др. Валы и оси. Конструирование и расчет. М.: Машиностроение, 1940. 320 с.
32. *Тимошенко С. П., Гудьер Д.* Теория упругости. М.: Наука, 1979. 560 с.
33. *Феодосьев В. И.* Сопротивление материалов. М.: Наука, 1972. 544 с.
34. *Эльсгольц Л. Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Наука, 1965. 424 с.

Система автоматизированного расчета и проектирования механического оборудования и конструкций в области машиностроения и строительства

APM WinMachine

Научно-технический центр **«Автоматизированное проектирование машин»** (НТЦ АПМ), работающий на рынке информационных технологий более 13-ти лет, предлагает предприятиям, проектным и исследовательским организациям, а также техническим университетам CAD\CAE Систему автоматизированного проектирования **APM WinMachine**. Система предназначена для выполнения всего многообразия расчетов машин, механизмов и конструкций и полноценного инженерного анализа создаваемого оборудования с целью выбора его оптимальных параметров, а также оформления и хранения конструкторской документации. Это новейшее программное обеспечение, созданное в России, недорогое по цене, которое в полном объеме учитывает требования ГОСТ, СНиП и частично национальных стандартов зарубежных государств.

Имеющиеся в **APM WinMachine** возможности инструментального обеспечения решения инженерных задач позволяют выполнить расчет:

- *энергетических и кинематических параметров;*
- *прочности, жесткости и устойчивости;*
- *выносливости при переменных режимах нагружения;*
- *вероятности, надежности и износостойкости;*
- *динамических характеристик.*

APM WinMachine — это наукоемкий программный продукт, созданный на базе современных инженерных методик проектирования, численных методов механики, математики и моделирования, гармонично сочетающий опыт поколений конструкторов, инженеров-механиков и других специалистов с возможностями компьютерной техники и технологии.

В настоящее время в состав APM WinMachine входит параметрический чертежно-графический редактор, информационная и графическая база данных, электронный учебник, модули инженерных расчетов, инструменты для расчета напряженно-деформированного состояния (НДС) методом конечных элементов, средства анализа динамического состояния механических конструкций и их устойчивости. Все это в конечном итоге позволяет выполнить весь комплекс необходимых вычислений и в полном объеме подготовить конструкторскую документацию, в случае необходимости используя возможности экспорта и импорта графической и расчетной информации.

Созданное с использованием предлагаемого нами программного обеспечения оборудование будет соответствовать наилучшим мировым аналогам, оптимальным по цене, весу, энергопотреблению и т. п., и, как результат, станет конкурентоспособным на мировом рынке.

Система **APM WinMachine** построена по модульному принципу, причем каждый из модулей может работать как в составе Системы, так и самостоятельно:

- **APM Graph** — плоский параметрический чертежно-графический редактор с инструментом расчета размерных цепей.
- **APM Studio** — препроцессор создания моделей для конечно-элементного анализа в модуле APM Structure 3D с возможностью импорта STEP-файлов.
- **APM Mechanical Data** — библиотека стандартных деталей и узлов, справочных данных по общему машиностроению.
- **APM Material Data** — библиотека материалов.

- **APM Construction Data —** библиотека графической информации по стандартным деталям и элементам строительных конструкций.
- **APM Technology Data —** библиотека технологической информации (оборудование, техоснастка, формы технологических процессов).
- **APM Base** — модуль создания и редактирования баз данных.
- **APM DOCs —** модуль для автоматизации работы с конструкторской документацией.
- **APM Book** — электронный учебник «Основы проектирования машин», в котором изложены основные методы расчета, реализованные в Системе APM WinMachine.
- **APM Structure3D** — модуль расчета и проектирования произвольных конструкций, состоящих из пластинчатых, стержневых, а также объемных элементов и их произвольных комбинаций методом конечных элементов. С его помощью можно рассчитать напряженно-деформированное состояние конструкции в статическом режиме, выполнить расчеты на устойчивость и определение собственных частот, а также проанализировать поведение конструкции при произвольном динамическом нагружении.
- **APM Joint** — модуль расчета и проектирования соединений деталей машин и элементов конструкций, который позволяет выполнить комплексный расчет всех типов резьбовых, сварных, заклепочных соединений и соединений деталей вращения.
- **APM Trans** — модуль проектирования передач вращения, предназначенный для расчета всех типов зубчатых передач, а также червячных, ременных и цепных передач, и генерации чертежей элементов этих передач в автоматическом режиме.
- **APM Bear** — модуль расчета неидеальных подшипников качения, позволяющий провести комплексный анализ опор качения всех известных типов.
- **APM Plain** — модуль расчета и анализа радиальных и упорных подшипников скольжения, работающих в условиях жидкостного и полужидкостного трения.
- **APM Shaft** — модуль расчета, анализа и проектирования валов и осей.
- **APM Drive** — модуль расчета и проектирования привода произвольной структуры, а также планетарных и волновых передач. С его помощью выполняется комплексный расчет кинематических характеристик и проектирование как привода в целом, так и отдельных его элементов (подшипников качения, передач зацеплением и валов), с автоматической генерацией чертежей как отдельных деталей, так и в сборе, включая корпус.
- **APM Spring** — модуль расчета и проектирования пружин и других упругих элементов машин, при помощи которого можно рассчитать и вычертить пружины сжатия, растяжения и кручения, плоские пружины, а также тарельчатые пружины и торсионы.
- **APM Cam** — модули расчета и проектирования кулачковых механизмов с автоматической генерацией чертежей и рычажных механизмов произвольной структуры.
- **APM Dynamics** — модуль моделирования кинематических и динамических процессов механических систем и механизмов.
- **APM Screw** — модуль для расчета неидеальных передач поступательного движения. Он способен рассчитать винтовые передачи скольжения, шарико-винтовые и планетарные винтовые передачи.
- **APM Beam** — модуль расчета и проектирования балочных элементов конструкций.
- **APM Technology** — модуль проектирования технологических процессов и оформления технологической документации.

тел. 514-84-19. E-mail: com@apm.ru; www.apm.ru;
Адрес: 141070, Московская область, г. Королев, Октябрьский бульвар, 14, офис 6.